Ανάλυση ΙΙ

Εξέταση 17 Φεβρουαρίου 2022

1. (20 Βαθμοί) Έστω C^2 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $a, b \in \mathbb{R}$ με $a^2 + b^2 = 1$. Θεωρούμε την $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $g(u, v) = f(au - bv, bu + av)$ για κάθε $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Να δειχθεί ότι για κάθε $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ισχύει

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u, v) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

Στο δεξί μέλος, $\partial/\partial x, \partial/\partial y$ δηλώνουν παραγώγιση ως προς το πρώτο και δεύτερο όρισμα της f αντίστοιχα, ενώ οι μερικές παράγωγοι της f υπολογίζονται στο σημείο $(x, y) := (au - bv, bu + av)$.

2. (15 Βαθμοί) Έστω $a > 0$. Για οποιοδήποτε σημείο $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ονομάζουμε $d_1(x, y)$ την απόστασή του από το $(0, 1)$ και $d_2(x, y)$ την απόστασή του από το $(1, 0)$ και τέλος θέτουμε $f(x, y) = ad_1(x, y)^2 + d_2(x, y)^2$. Να δειχθεί ότι η $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ έχει τοπικό ελάχιστο σε ένα σημείο (x_0, y_0) το οποίο και να προσδιοριστεί.
Προαιρετικό ερώτημα: Να δειχθεί ότι το σημείο αυτό είναι σημείο ολικού ελαχίστου.

3. (25 Βαθμοί) Έστω $a > 0$. (α) Ζωγραφίστε στο επίπεδο τον κύκλο με εξίσωση $(x-a)^2 + y^2 = a^2$. Να βρεθεί η εξίσωσή του σε πολικές συντεταγμένες. [Δηλαδή να γραφεί η εξίσωση του κύκλου με μεταβλητές τα r, θ που ορίζονται από τις $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$.]
(β) Να υπολογιστεί με χρήση πολικών συντεταγμένων το ολοκλήρωμα

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy,$$

όπου $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + y^2 \leq a^2\}$.

4. (20 Βαθμοί) Έστω $a > 0$, το ημικύκλιο $D := \{(x, y) : y \geq 0, x^2 + y^2 \leq a^2\}$, C το σύνορο του D, και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$I := \int_C x^2 y dx - y^2 x dy$$

όπου το C είναι θετικά προσανατολισμένο ως προς το χωρίο D.
(α) Να υπολογιστεί το I με χρήση του ορισμού του επικαμπύλιου ολοκληρώματος.
(β) Να υπολογιστεί το I με χρήση του θεωρήματος Green. [Στο διπλό ολοκλήρωμα που θα προκύψει, είναι χρήσιμες οι πολικές συντεταγμένες.]

5. (30 Βαθμοί) Έστω $D := \{x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ και S η επιφάνεια που είναι το γράφημα της συνάρτησης $g : D \to \mathbb{R}$ με $g(x, y) = x^2 - y^2$ για κάθε $(x, y) \in D$. Θεωρούμε ως θετική την πλευρά της S που βλέπει προς τον θετικό z-ημιάξονα.
(α) Να οριστεί συνεχής συνάρτηση $n : D \to \mathbb{R}^3$ ώστε $n(x, y)$ να είναι διάνυσμα μη μηδενικό, κάθετο στην S στο σημείο $(x, y, g(x, y))$, και με την τρίτη του συντεταγμένη θετική. [Δηλαδή που δείχνει προς τη θετική πλευρά της S. Δεν είναι απαραίτητο το διάνυσμα να έχει μήκος 1.]
(β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας S.
(γ) Θεωρούμε τη διανυσματική συνάρτηση $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ με $F(x, y, z) = (0, 0, xy)$. Με χρήση του θεωρήματος Stokes να προσδιοριστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα που ισούται με το επικαμπύλιο $\int_{\partial S} F \cdot \mathbf{ds}$ και να υπολογιστεί ένα από τα δύο. Στο τελευταίο ολοκλήρωμα, το σύνορο ∂S έχει τον επαγόμενο προσανατολισμό από την S.

Ενδεχομένως να σας φανεί χρήσιμη η ταυτότητα $\cos^3(x) = \frac{3}{4}\cos(x) + \frac{1}{4}\cos(3x)$.

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $1\frac{1}{2}$ ώρα. **Καλή επιτυχία!**