§ 3.4 Ακρότατα με περιορισμούς / πολλαπλασιαστές Lagrange

Παράδειγμα: Ποια η μέγιστη και ποια η ελάχιστη τιμή της $f(x,y,z) = x-y+z$ στο σύνολο $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 2\}$;

Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό

$f, g : U \to \mathbb{R}$ C^1 συναρτήσεις, $c \in \mathbb{R}$ ώστε

$S := \{x \in U : g(x) = c\} \neq \emptyset$, και $x_0 \in S$.

Θεώρημα: Αν η $f|S$ (ο περιορισμός της f στο S) έχει τοπικό ακρότατο στο x_0 και $\nabla g(x_0) \neq 0$ τότε $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$.

Άρα αν το $x_0 = (x_1, \quad , x_n)$ είναι σημείο ακροτάτου, μπορούμε να το εντοπίσουμε λύνοντας το σύστημα των $n+1$ εξισώσεων

$$g(x_1, \quad , x_n) = c$$

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$$

για τους $n+1$ αγνώστους $x_1, x_2, \quad , x_n, \lambda$.

Πρακτικά: Ψάχνουμε τα σημεία $(x_1, \quad , x_n, \lambda)$ που είναι ο τα ακρότατα της $h(x_1, x_2, \quad , x_n, \lambda) = f(x) - \lambda(g(x) - c)$.

$$\nabla h(x, \lambda) = (\partial_{x_1} f, \quad , \partial_{x_n} f, \; c - g(x))$$

Παράδειγμα $f(x,y) = x^2 - y^2$, $g(x,y) = x^2+y^2$, $U = \mathbb{R}^2$

$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 1\}$

Ποια τα ακρότατα της $f|S$;

λύση

~~Επειδή~~ οι f, g είναι C^1 στο $U \ (= \mathbb{R}^2)$.

Λύνουμε το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2 = 1 \\ \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ (2x, -2y) = \lambda (2x, 2y) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} x^2+y^2=1 \\ x = \lambda x \\ y = -\lambda y \end{array}$$

Επειδή $x^2+y^2=1$, δεν είναι δυνατόν να έχουμε $x=y=0$.

— Αν $x \neq 0$, τότε $\lambda = 1$ και $y=0$, και άρα $x^2=1$.

λύσεις οι $(x,y,\lambda) = (-1,0,1), (1,0,1)$

— Αν $y \neq 0$, τότε $\lambda = -1$ και $x=0$, και άρα $y^2 = 1$

λύσεις οι $(x,y,\lambda) = (0,-1,-1), (0,1,-1)$

Πιθανά σημεία ακροτάτων: $(-1,0), (1,0), (0,-1), (0,1)$

οι τιμές της f είναι: $1, 1, -1, -1$.

Άρα η ελάχιστη τιμή της $f|S$ είναι η -1 και λαμβάνεται στα σημεία $(0,-1), (0,1)$.

Η μέγιστη τιμή της $f|S$ είναι 1 και λαμβάνεται στα σημεία $(-1,0), (1,0)$.

Αν έχουμε περισσότερους περιορισμούς;

$U\subset\mathbb{R}^n$ ανοιχτό, $m,n\in\mathbb{N}^+$, $m<n$

$f, g_1, g_2, \dots, g_m: U\to\mathbb{R}^n$ C^1 συναρτήσεις

ώστε $S=\{x\in U: g_1(x)=\dots=g_m(x)=0\}\neq\emptyset$.

<u>Θεώρημα</u> Αν $x_0\in S$ και

- η $f|S$ έχει τοπικό ακρότατο στο x_0
- $\nabla g_1(x_0),\dots,\nabla g_m(x_0)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα

Τότε $\exists\, \lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m\in\mathbb{R}$ ώστε

$$\nabla f(x_0)=\lambda_1\nabla g_1(x_0)+\dots+\lambda_m\nabla g_m(x_0)$$

Οι $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$ λέγονται πολλαπλασιαστές Lagrange.
Έχουμε έναν για κάθε περιορισμό $g_i(x)=0$.

Πρακτικά: Ψάχνουμε σημεία που είναι 0 το ανάδελτα της

$$H(\underbrace{x_1,\dots,x_n}_{x},\lambda_1,\dots,\lambda_m)=f(x)-\lambda_1 g_1(x)-\dots-\lambda_m g_m(x)$$

- παρατηρούμε ότι $\nabla_x H(x,\lambda)=\nabla f(x)-\lambda_1\nabla g_1(x)-\dots-\lambda_m\nabla g_m(x)$
  ανάδελτα μόνο για τις $x_1,\dots,x_n$

και
- $\partial_{\lambda_i}H(x,\lambda)=-g_i(x)$

παράδειγμα 5. Σελ. 189 - 190 στο βιβλίο.

Δεν την έκανα στην τάξη, αλλά είναι χρήσιμη άσκηση

Άσκηση 30 σελ 211 (επαναληπτικές ασκήσεις κεφαλαίου 3)

Βρείτε το μέγιστο και το ελάχιστο της

$f(x,y) = xy - y + x - 1$ στο σύνολο $x^2+y^2 \leq 2$

Βήμα 1 Λύση

Αναζητάμε σημεία (x,y) με $(x,y) \in \{(x,y): x^2+y^2 < 2\}$

$= A^{\circ}$ ← το εσωτερικό του $A = \{(x,y): x^2+y^2 \leq 2\}$

και $\nabla f(x,y) = (0,0)$.

$(0,0) = \nabla f(x,y) = (y+1, x-1) \Rightarrow (x,y) = (1,-1)$

όμως $(1,-1) \notin A^{\circ}$, άρα η f δεν έχει κρίσιμο σημείο στο A°

Βήμα 2 Μελετάμε την $f|\partial A$.

$\partial A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = 0\}$

με $g(x,y) = x^2+y^2-2$

Χρησιμοποιούμε το θεώρημα για τους πολλαπλασιαστές Lagrange. Ζητάμε λύσεις του συστήματος

$$\left.\begin{array}{l} g(x,y)=0 \\ \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y) \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} x^2+y^2=2 \\ y+1 = 2\lambda x \\ x-1 = 2\lambda y \end{array} \Leftrightarrow$$

Σημειώνουμε ότι οι f, g είναι C^1 και αν $g(x,y)=0$ τότε $\nabla g(x,y) \neq 0$. οπότε ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος.

$$x^2+y^2=2 \quad (1)$$
$$2\lambda x-y=1 \quad (2)$$
$$x-2\lambda y=1 \quad (3)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (3) επί 2λ, την αφαιρούμε από την (2), και παίρνουμε την $(4\lambda^2-1)y = 1-2\lambda$ (2')

Περίπτωση 1 $\lambda=\frac{1}{2}$

Τότε οι (1), (2), (3) $\iff \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x-y=1 \end{cases} \iff \begin{cases} (y+1)^2+y^2=2 \\ x=y+1 \end{cases}$

$$\iff \dots \iff \begin{cases} y=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x=\cancel{\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}}\ y+1 \end{cases}$$

Άρα πιθανά ακρότατα τα

$$(x,y)=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (4)$$

Περίπτωση 2 $\lambda\neq\frac{1}{2}$

Τότε στην (2') διαιρούμε με $1-2\lambda$ και παίρνουμε

$$y=-\frac{1}{1+2\lambda}$$

Η (3) γίνεται $x=\frac{1}{1+2\lambda}$. Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε $2=\frac{1}{(1+2\lambda)^2}+\frac{1}{(1+2\lambda)^2} \iff (1+2\lambda)^2=1 \iff$

$\lambda=0$ ή $\lambda=-1$

$\lambda = 0$ δίνει $(x,y) = (1,-1)$ (5)

$\lambda = -1$ δίνει $(x,y) = (-1,1)$

Η $f|\partial A$ είναι συνεχής και το ∂A είναι κλειστό και φραγμένο. Άρα η ~~[illegible]~~ $f|\partial A$ παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Από το Θεώρημα ακροτάτων με περιορισμό έπεται ότι τα μοναδικά σημεία που μπορεί η $f|\partial A$ να πάρει τις ακρότατες τιμές της είναι αυτά στις (4), (5).

Για τα σημεία της (4) έχουμε

$$f(x,y) = (x-1)(y+1) = y \cdot x = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Για τα σημεία της (5) έχουμε

$$f(1,-1) = 0$$

$$f(-1,1) = -4$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο A και το A κλειστό και φραγμένο, παίρνει ελάχιστη και μέγιστη τιμή σε αυτό. Επειδή ~~[illegible]~~ δεν έχει κρίσιμα σημεία στο A^{o}, έπεται ότι παίρνει τη μέγιστη και την ελάχιστή της τιμή σε σημεία του ∂A. Από τα παραπάνω έπεται ότι η μέγιστή της τιμή είναι το $\frac{1}{2}$ (και ~~[illegible]~~ την παίρνει μόνο στα σημεία (4)) ενώ η ελάχιστη της τιμή είναι το -4.