Λύσεις θεμάτων Φεβρουαρίου 2022

Κλιμάκιο 1

Θέμα 1. Εφαρμόζουμε τον κανόνα της αλυσίδας. Συμβολίζουμε με x, y τις μεταβλητές της f και θέτουμε $x(s,t) := st - s^2, y(s,t) = t - s$. Τότε

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial s}(s,t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(s,t),y(s,t))\frac{\partial x}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(s,t),y(s,t))\frac{\partial y(s,t)}{\partial s}\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(s,t),y(s,t))(t-2s) - \frac{\partial f}{\partial y}(x(s,t),y(s,t))\\ \frac{\partial g}{\partial t}(s,t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(s,t),y(s,t))\frac{\partial x}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(s,t),y(s,t))\frac{\partial y(s,t)}{\partial t}\\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(s,t),y(s,t))s + \frac{\partial f}{\partial y}(x(s,t),y(s,t))\end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις δύο ισότητες και χρησιμοποιώντας τη δοσμένη έκφραση για την $\partial_x f$, έχουμε

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial g}{\partial t}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(st - s^2, t-s\right)\cdot(t-s) = (t-s)e^{st-s^2}(t-s) = (t-s)^2\, e^{st-s^2} \geq 0$$

[Προσοχή: Καταχρηστικά, καθένα από τα σύμβολα x, y συμβολίζει δύο πράγματα. Δηλαδη, το $\frac{\partial f}{\partial x}$ σημαίνει παράγωγο της f ως προς την πρώτη μεταβλητή, την οποία συμβολίζουμε με x, ενώ στο $x(s,t)$ το x είναι το όνομα μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών, των s, t. Θα μπορούσαμε να ονομάσουμε $z(s,t) = st - s^2, w(s,t) = t - s$, οπότε ο κανόνας της αλυσίδας θα ήταν

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s,t) = \frac{\partial f}{\partial x}(z(s,t),w(s,t))\frac{\partial z}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial f}{\partial y}(z(s,t),w(s,t))\frac{\partial w(s,t)}{\partial s}.]$$

Θέμα 2. Στο εσωτερικό του A η f είναι παραγωγίσιμη. Επομένως, τα μόνα κρίσιμα σημεία της εκεί είναι τα σημεία μηδενισμού του ∇f.

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x} = 6x - 8y + 2 = 0\\ \frac{\partial f}{\partial y} = -8x + 8y + 16 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}14x - 14 = 0\\ x + y = 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 1\\ y = 1\end{cases}$$

Το $(1,1)$ είναι στοιχείο του A^o, οπότε αυτό είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f στο A. Η Εσσιανή της f στο $(1, 1)$ είναι

$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix}6 & -8\\ -8 & -8\end{pmatrix}$$

και οι κύριες υποορίζουσες του πίνακα είναι $\Delta_1 = 6 > 0, \Delta_2 = -48 - 64 < 0$. Κατά τα γνωστά, το $(1, 1)$ είναι σαγματικό σημείο.

Θέμα 3. (α) Υπολογίζουμε το διαδοχικό ολοκλήρωμα με τη σειρά ολοκλήρωσης που μας δίνεται (αλλάζοντας σειρά το κάνει δυσκολότερο).

$$\int_0^1 \left(x^3 + \frac{4x^2}{2} - \frac{x^2}{2}\right)dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

(β) Χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες. Το ημικύκλιο D περιγράφεται σε πολικές συντεταγμένες ως $\{(r,\theta) : r \in [0,a], \theta \in [0,\pi]\}$. Έτσι, το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_0^\pi \int_0^a (r\,\sin\theta)\, r\, dr d\theta = \frac{a^3}{3}\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta = \frac{a^3}{3}\,[-\cos\theta]_0^\pi = \frac{2a^3}{3}.$$

Θέμα 4. (α) Έχουμε για το D τις εξής δύο δυνατές περιγραφές.

$$\begin{aligned}D &= \left\{(r,\theta,z) : z \in [0,1],\ r \in [0,\ \sqrt{1-z}],\ \theta \in [0,2\pi]\right\}\\ &= \left\{(r,\theta,z) : r \in [0,1],\ z \in [0, 1-r^2],\ \theta \in [0,2\pi]\right\}.\end{aligned}$$

(β) Ο όγκος του χωρίου ισούται με το τριπλό ολοκλήρωμα της συνάρτησης 1 στο χωρίο. Υπολογίζουμε το τριπλό ολοκλήρωμα χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες.

$$\mathrm{Vol}(D) = \iiint_D dxdydz = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z}} \int_0^{2\pi} r\, d\theta dr dz = 2\pi \int_0^1 \frac{1-z}{2} dz = \frac{1}{2}\pi.$$

Θέμα 5. Το χωρίο D είναι απλό, και οι συναρτήσεις $x^3, e^{x^2} - y^3$ είναι C^1 σε αυτό, οπότε το Θεώρημα Green δίνει

$$I = \iint_D \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(x^3) - \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x^2} - y^3\right) \right\} dxdy = \iint_D (3x^2 + 3y^2) dxdy = 3 \int_0^{\pi} \int_0^1 r^2 r dr d\theta = \frac{3}{4}\pi.$$

Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε πολικές συντεταγμένες. [Προσέξτε ότι η γωνία κινείται από το 0 ως το π γιατί το D είναι ημικύκλιο.]

Θέμα 6. Για την επιφάνεια E, χρησιμοποιούμε την παραμετρικοποίηση $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ με $D = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$ και $\Phi(x, y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2)$ για κάθε $(x, y) \in D$ (πρόκειται για επιφάνεια που είναι γράφημα συνάρτησης).

$$\Phi_x \times \Phi_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = (2x, 2y, 1).$$

Η παραμετρικοποίηση αυτή δείχνει ότι η E είναι κανονική επιφάνεια. Επιπλέον, το D είναι στοιχειώδες χωρίο του επιπέδου, και η F είναι C^1 και $1 - 1$ στο D (άρα ικανοποιούνται οι απαιτήσεις που δίνονται στην αρχή της Παραγράφου 7.4 του βιβλίου των Marsden-Tromba).

(α) Με βάση γνωστό τύπο,

$$\text{Εμβαδόν}(E) = \iint_D \|\Phi_x \times \Phi_y\|\, dxdy = \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr d\theta$$

$$\overset{s=r^2}{=} 2\pi \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{1 + 4s}\, ds = \pi \left[\frac{(1 + 4s)^{\frac{3}{2}}}{3/2} \frac{1}{4} \right]_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(s^{\frac{3}{2}} - 1\right)$$

Χρησιμοποιήσαμε πολικές συντεταγμένες.

(β) Χρησιμοποιούμε τον ορισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος για τη συνάρτηση $f(x, y, z) = z$.

$$\begin{aligned} \iint_E f(x, y, z)\, dS &= \iint_D f(\Phi(x, y)) \|\Phi_x \times \Phi_y\|\, dxdy \\ &= \iint_D (1 - x^2 - y^2) \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dxdy. \end{aligned}$$

Κλιμάκιο 2

Θέμα 1. Εφαρμόζουμε τον κανόνα της αλυσίδας και έχουμε [όπου εμφανίζονται μερικές παράγωγοι της f, υπολογίζονται στο σημείο $(x,y)=(au-bv, bu+av)$]

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}\,a + \frac{\partial f}{\partial y}\,b,\\
\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v) &= a\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,a + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\,b\right) + b\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\,a + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,b\right) = a^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2ab\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\\
\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(-b) + \frac{\partial f}{\partial y}\,a,\\
\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,(-b)^2 - b\,\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\,a + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\,a(-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,a^2 = b^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2ab\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}.
\end{aligned}$$

Προσθέτουμε τις εκφράσεις για τις $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$ και προκύπτει το αποτέλεσμα.

Θέμα 2. Προφανώς, αφού

$$f(x,y) = a\left(x^2 + (y-1)^2\right) + (x-1)^2 + y^2,$$

η f είναι C^2 συνάρτηση (μάλιστα είναι C^∞). Υπολογίζουμε το ανάδελτά της.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2ax + 2(x-1) = (2a+2)x - 2,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 2a(y-1) + 2y = (2a+2)y - 2a.
\end{aligned}$$

Έτσι,

$$\nabla f(x_0,y_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{1}{a+1} \\[2ex] y_0 = \dfrac{a}{a+1} \end{cases}$$

Ο Εσσιανός πίνακας είναι

$$Hf(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 2a+2 & 0 \\ 0 & 2a+2 \end{pmatrix},$$

που με το κριτήριο Sylvester βλέπουμε ότι είναι θετικά ορισμένος. Άρα το (x_0,y_0) είναι σημείο τοπικού ελαχίστου.

Θέμα 3. (α) Αντικαθιστούμε $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ στην εξίσωση του κύκλου

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2 \Leftrightarrow r^2\cos^2\theta + a^2 - 2ar\cos\theta + r^2\sin^2\theta = a^2 \Leftrightarrow r^2 = 2ar\cos\theta$$

$\Leftrightarrow r = 0$ ή $r = 2a\cos\theta$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ γιατί $r \geq 0$ (αλλά και από το σχήμα, γιατί πρέπει $x \geq 0$, όλα τα σημεία είναι στο δεξί ημιεπίπεδο). Για $\theta = \frac{\pi}{2}$ παίρνουμε και το σημείο $(0,0)$ $(r=0)$. Άρα η εξίσωση $r = 2a\cos\theta$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ περιγράφει όλα τα σημεία.

(β)

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a\cos\theta} r\,r\,dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2a\cos\theta)^3}{3} d\theta = \frac{8a^3}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{4}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos(3\theta)\right) d\theta$$

$$= \frac{8a^3}{3}\left(\frac{3}{4}2 + \frac{1}{4}\frac{1}{3}(-2)\right) = \frac{32}{9}a^3.$$

Θέμα 4. (α) Ας ονομάσουμε Γ_1 το τμήμα του C στο άνω ημιεπίπεδο (είναι ένα ημικύκλιο) και Γ_2 το τμήμα του C πάνω στον άξονα $y = 0$. Παραμετρικοποιούμε αυτές τις καμπύλες ως εξής.

$\Gamma_1 : \gamma_1(t) = (a\cos t, a\sin t)\ ,\ t \in [0, \pi]$.
$\Gamma_2 : \gamma_2(t) = (t, 0)\ ,\ t \in [-a, a]$. Τότε

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\Gamma_1} (x^2y\,dx - y^2x\,dy) + \int_{\Gamma_2} (x^2y\,dx - y^2x\,dy) \\
&= \int_0^{\pi} (a^3\cos^2 t,\ \sin t,\ -a^3\sin^2 t\cos t) \cdot (-a\sin t,\ a\cos t)\,dt + \int_{-a}^{a} (0,0)\cdot(1,0)dt \\
&= -\int_0^{\pi} \left(a^4\cos^2 t\sin^2 t + a^4\sin^2 t\cos^2 t\right)dt = -\frac{a^4}{2}\int_0^{\pi} (\sin(2t))^2 dt = -\frac{a^4}{2}\int_0^{\pi} \frac{1-\cos(4t)}{2}dt = -\frac{a^4}{4}\pi.
\end{aligned}$$

(β) Το χωρίο D είναι απλό, και οι συναρτήσεις $x^2y, -y^2x$ είναι C^1 σε αυτό, οπότε το Θεώρημα Green δίνει

$$I = \iint_D (-y^2 - x^2)\,dxdy = \int_0^a \int_0^{\pi} (-r^2)r\,d\theta dr = -\frac{a^4}{4}\pi.$$

Θέμα 5. Για την S θεωρούμε την παραμετρικοποίηση $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$, $\Phi(x,y) = (x, y, g(x,y))$.
(α) Κατά τα γνωστά, ένα τέτοιο διάνυσμα είναι το

$$n(x,y) = \Phi_x \times \Phi_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \partial_x g \\ 0 & 1 & \partial_y g \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = (-2x, 2y, 1).$$

(β) Επειδή το διάνυσμα στο (α) είναι πάντοτε διάφορο του 0, έχουμε ότι η S είναι κανονική επιφάνεια. Επιπλέον, το D είναι στοιχειώδες χωρίο του επιπέδου, και η F είναι C^1 και $1-1$ στο D (άρα ικανοποιούνται οι απαιτήσεις που δίνονται στην αρχή της Παραγράφου 7.4 του βιβλίου των Marsden-Tromba). Επομένως το εμβαδόν της επιφάνειας είναι

$$\begin{aligned}
\iint_D \|\Phi_x \times \Phi_y\|\,dxdy &= \iint_D \sqrt{1 + 4(x^2+y^2)}\,dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1+4r^2)^{1/2}\,r\,d\theta dr \\
&= 2\pi\left[\frac{(1+4r^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}8}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(5^{\frac{3}{2}} - 1\right).
\end{aligned}$$

Στη δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε πολικές συντεταγμένες.

(γ) Το θεώρημα Stokes δίνει ότι το ζητούμενο επιφανειακό ολοκλήρωμα ισούται με

$$J := \iint_D \mathrm{curl}F \cdot d\mathbf{S}.$$

Και εφόσον

$$\mathrm{curl}F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & 0 & xy \end{vmatrix} = (x, -y, 0),$$

υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
J &= \iint_D \mathrm{curl}F(x,y)\cdot(\Phi_x \times \Phi_y)\,dxdy = \iint_D (-2x^2 - 2y^2)\,dxdy \\
&= -2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\,r\,drd\theta = -4\pi\frac{1}{4} = -\pi.
\end{aligned}$$