Ανάλυση ΙΙ

Εξέταση 22 Σεπτεμβρίου 2022

1. (15 Βαθμοί) Έστω C^1 συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και
$$g(x,y,z) := x^3 f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$
για κάθε $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, y \in \mathbb{R}$. Να δειχθεί ότι για κάθε $(x,y,z) \in (\mathbb{R}\backslash\{0\}) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ισχύει
$$x\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) + z\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = 3g(x,y,z).$$

2. (15 Βαθμοί) Έστω $f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x,y) = (x-4)\log(xy)$ για κάθε $x, y > 0$.
(α) Να προσδιοριστει αν η f έχει κρίσιμα σημεία στο πεδίο ορισμού της και να καθοριστεί η φύση καθενός (τοπικό μέγιστο, τοπικό ελάχιστο, σαγματικό σημείο).
(β) Είναι η f φραγμένη άνω ή κάτω;

3. (15 Βαθμοί) Έστω $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής και $a > 0$. Να δειχθεί ότι
$$\int_0^a \int_0^y g(x)\,dx\,dy = \int_0^a (a-x)g(x)\,dx.$$

4. (20 Βαθμοί) Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα
$$\int_0^1 \int_{y^{1/2}}^{y^{1/5}} \sqrt{1-x^3}\,dx\,dy.$$

5. (20 Βαθμοί) Έστω το τεταρτοκύκλιο $D := \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, C το σύνορο του D, και το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα
$$I := \int_C x^2 y dx - y^2 x dy,$$
όπου το C είναι θετικά προσανατολισμένο ως προς το χωρίο D.
(α) Να υπολογιστεί το I με χρήση του ορισμού του επικαμπύλιου ολοκληρώματος.
(β) Να υπολογιστεί το I με χρήση του θεωρήματος Green.

6. (20 Βαθμοί) Έστω $D := \{x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ και E η επιφάνεια που είναι το γράφημα της συνάρτησης $g : D \to \mathbb{R}$ με $g(x,y) = x^2 - y^2$ για κάθε $(x,y) \in D$. Θεωρούμε ως θετική την πλευρά της E που βλέπει προς τον θετικό z-ημιάξονα.
(α) Να οριστεί συνεχής συνάρτηση $n : D \to \mathbb{R}^3$ ώστε $n(x,y)$ να είναι διάνυσμα μη μηδενικό, κάθετο στην E στο σημείο $(x, y, g(x,y))$, και με την τρίτη του συντεταγμένη θετική.
(β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας E.
(γ) Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα (πρώτου είδους)
$$\iint_E x^2\,dS.$$

Άριστα είναι το 100. Η διάρκεια της εξέτασης είναι $1\frac{1}{2}$ ώρα. **Καλή επιτυχία!**

Απαντήσεις

1. Εφαρμόζουμε τον κανόνα της αλυσίδας.

2. (α) Κρίσιμο σημείο το $(4, 1/4)$. Είναι σαγματικό σημείο.
(β) Η συνάρτηση δεν είναι φραγμένη άνω ή κάτω γιατί $\lim_{y\to\infty} f(5, y) = \infty$ και $\lim_{y\to 0} f(5, y) = -\infty$.

3. Το αριστερό μέλος είναι το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $(x, y) \mapsto g(x)$ στο χωρίο $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y \leq a\}$. Αλλάζοντας σειρά ολοκλήρωσης (εδώ ένα σχήμα βοηθάει), έχουμε ότι το ολοκλήρωμα ισούται με

$$\int_0^a \int_x^a g(x)\, dy\, dx = \int_0^a (a - x)g(x)\, dx.$$

4. Αλλάζοντας σειρά ολοκλήρωσης (πάλι ένα σχήμα βοηθάει), έχουμε ότι το ολοκλήρωμα ισούται με

$$\int_0^1 \int_{x^5}^{x^2} \sqrt{1 - x^3}\, dy\, dx = \int_0^1 (x^2 - x^5) \sqrt{1 - x^3}\, dx = \int_0^1 x^2(1 - x^3) \sqrt{1 - x^3}\, dx$$
$$= \frac{1}{3} \int_0^1 y^{3/2}\, dy = \frac{1}{3} \frac{1}{\frac{3}{2} + 1} = \frac{2}{15}.$$

Για την τρίτη ισότητα, κάναμε την αλλαγή μεταβλητής $y = 1 - x^3$.

5. Το ολοκλήρωμα ισούται με -2π.

6. (β) Το εμβαδόν ισούται με

$$\iint_D \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 r \sqrt{1 + 4r^2}\, dr\, d\theta = \ldots$$