0.1 Ο χώρος $\mathbb{R}^n$

Άσκηση 1.1

i. Έστω $\vec{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$, $\vec{y}=(y_1,y_2,...,y_n)$ στοιχεία του $\mathbb{R}^n$. Ως **εσωτερικό γινόμενο** των $\vec{x},\vec{y}$ ορίζεται ο πραγματικός αριθμός $\vec{x}\cdot\vec{y}=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$. Αποδείξτε ότι ισχύουν οι ιδιότητες
   a) $\vec{x}\cdot\vec{x}\geq 0$. Αν $\vec{x}\cdot\vec{x}=0$ τότε $\vec{x}=\vec{0}$
   b) $\vec{x}\cdot\vec{y}=\vec{y}\cdot\vec{x}$
   c) $\lambda(\vec{x}\cdot\vec{y})=(\lambda\,\vec{x})\cdot\vec{y},\ \lambda\in\mathbb{R}$
   d) $\vec{x}\cdot(\vec{y}+\vec{z})=\vec{x}\cdot\vec{y}+\vec{x}\cdot\vec{z}$

ii. Αποδείξτε ότι $\left|\vec{x}\cdot\vec{y}\right|\leq\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}\sqrt{\vec{y}\cdot\vec{y}}$, αναλυτικά $\left|x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n\right|\leq$ $\sqrt{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+...+x_n^{\,2}}\sqrt{y_1^{\,2}+y_2^{\,2}+...+y_n^{\,2}}$.(Ανισότητα Cauchy-Schwarz)
   Η ισότητα ισχύει αν υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ με $\vec{y}=\lambda\vec{x}$ (ή $\vec{x}=\lambda\vec{y}$).

Λύση

i. Εύκολα (να λυθεί)

ii. Αν $\vec{x}=\vec{0}$ ή $\vec{y}=\vec{0}$ ισχύει η ισότητα
   Έστω $\vec{x}\neq\vec{0}$, $\vec{y}\neq\vec{0}$. Έχουμε $(\lambda\,\vec{x}-\vec{y})\cdot(\lambda\,\vec{x}-\vec{y})\geq 0$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. Άρα (από την i)), $\lambda^2(\vec{x}\cdot\vec{x})-2\lambda(\vec{x}\cdot\vec{y})+(\vec{y}\cdot\vec{y})\geq 0$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. Επειδή $\vec{x}\cdot\vec{x}>0$ θα πρέπει η διακρίνουσα $\Delta=(2(\vec{x}\cdot\vec{y}))^2-4(\vec{x}\cdot\vec{x})(\vec{y}\cdot\vec{y})\leq 0$. Άρα, $\left|\vec{x}\cdot\vec{y}\right|\leq\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}\sqrt{\vec{y}\cdot\vec{y}}$
   (Πρόταση 4.4, σελ 147, Διδακτικό βιβλίο).

Σχόλιο

Η ανισότητα των Cauchy-Schwarz αποδεικνύεται και με την μέθοδο της Μαθηματικής Επαγωγής (στην διάσταση n του $\mathbb{R}^n$).

Άσκηση 1.2

Αν X είναι διανυσματικός χώρος, μια απεικόνιση $\left\|\cdot\right\|: X\to\mathbb{R}^+$ καλείται **νόρμα** στον X αν ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες
   a) $\left\|x\right\|\geq 0,\ x\in X$. Εάν $\left\|x\right\|=0$ τότε $x=0$
   b) $\left\|\lambda\,x\right\|=\left|\lambda\right|\left\|x\right\|,\ \lambda\in\mathbb{R},\ x\in X$
   c) $\left\|x+y\right\|\leq\left\|x\right\|+\left\|y\right\|,\quad x,y\in X$ (Τριγωνική ιδιότητα)

i. Αποδείξτε ότι η $\left\|\vec{x}\right\|=\sqrt{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+...+x_n^{\,2}}=\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}$, $\vec{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$ είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. (Η νόρμα αυτή καλείται Ευκλείδεια)

ii. Αποδείξτε ότι $\left\|\vec{x}\right\|_1=|x_1|+|x_2|+...+|x_n|$, $\left\|\vec{x}\right\|_\infty=\max\{|x_1|,|x_2|,...,|x_n|\}$ είναι νόρμες στον $\mathbb{R}^n$.

iii. Ισχύει $\|\vec{x}\|_\infty \le \|\vec{x}\| \le \|\vec{x}\|_1 \le n\|\vec{x}\|_\infty$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

Λύση

i. Οι ιδιότητες a), b) είναι εύκολο να αποδειχθούν (να γίνουν). Όσο αφορά την c) έχουμε $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = (\vec{x}+\vec{y})\cdot(\vec{x}+\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{x} + 2(\vec{x}\cdot\vec{y}) + \vec{y}\cdot\vec{y} \le \vec{x}\cdot\vec{x} + 2\sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}}\sqrt{\vec{y}\cdot\vec{y}} + \vec{y}\cdot\vec{y}$
(χρησιμοποιούμε την άσκηση 1.1, ii)
Άρα $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 \le \|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 = \left(\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|\right)^2$
Άρα $\|\vec{x}+\vec{y}\| \le \|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|$
Επομένως η $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + \ldots + x_n^{\ 2}}$ είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$.
(Πρόταση 4.5, σελ. 147, Διδακτικό βιβλίο).

ii. Εύκολη (να λυθεί)

iii. Εύκολη (να λυθεί)

Άσκηση 1.3

Αποδείξτε ότι $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 2\left(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2\right)$, όπου $\vec{x},\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ και $\|\cdot\|$ η Ευκλείδεια νόρμα. (Κανόνας παραλληλογράμμου).

Λύση

$$\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = \left(\vec{x}+\vec{y}\right)\cdot\left(\vec{x}+\vec{y}\right) + \left(\vec{x}-\vec{y}\right)\cdot\left(\vec{x}-\vec{y}\right) = 2(\vec{x}\cdot\vec{x}) + 2(\vec{y}\cdot\vec{y}) = 2\left(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2\right)$$

<u>Σχόλιο</u>

Εάν αντικαταστήσουμε την Ευκλείδεια νόρμα με τις νόρμες $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_\infty$ (άσκηση 1.2, ii.) δεν ισχύει ο κανόνας του παραλληλογράμμου (ελέγξτε το τετράγωνο του $\mathbb{R}^2$ με κορυφές τα σημεία (0,0), (1,0), (1,1) και (0,1)).

Άσκηση 1.4

Έστω $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ στοιχεία του $\mathbb{R}^3$. Ως **<u>εξωτερικό γινόμενο</u>** των $\vec{x}, \vec{y}$ ορίζεται το διάνυσμα

$$\vec{x}\times\vec{y} =: \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} =: (x_2y_3 - x_3y_2)\vec{i} + (x_3y_1 - x_1y_3)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k}$$, όπου $\vec{i} = (1,0,0)$,
$\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$.

i. Αποδείξτε ότι $\|\vec{x}\times\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 - (\vec{x}\cdot\vec{y})^2$ (Ταυτότητα του Lagrange)

ii. Αποδείξτε ότι $\|\vec{x}\times\vec{y}\| = \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|\eta\mu\theta$ όπου $\theta\in[0,\pi]$ η γωνία των στοιχείων $\vec{x}$ και $\vec{y}$. (Ως γνωστό ισχύει $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}\|\|\vec{y}\|}$ για $\vec{x},\vec{y}\neq\vec{0}$).

iii. Έστω $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{R}^3$. Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο με κορυφές τα $(0,0,0)$, $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{x}+\vec{y}$. Αποδείξτε ότι το εμβαδόν Ε του παραλληλογράμμου είναι $E=\|\vec{x}\times\vec{y}\|$.

Λύση

i. Πρόταση 2.21, σελ 65, Διδακτικό βιβλίο
ii. Θεώρημα 2.22, σελ 65, Διδακτικό βιβλίο
iii. Πρόταση 2.24, σελ 69, Διδακτικό βιβλίο