# 0.2 Ακολουθίες στον $\mathbb{R}^n$

## *Άσκηση 2.1*

a) Έστω $A \neq \emptyset$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$. Αποδείξτε ότι
   i. Το $\vec{a}$ είναι εγγύτατο σημείο του A $\Leftrightarrow$ όταν υπάρχει ακολουθία $(\vec{a}_\nu)_{\nu \in N}$ του A με $\lim\limits_{\nu\to\infty} \vec{a}_\nu = \vec{a}$.
   ii. Το $\vec{a}$ είναι σημείο συσσώρευσης του A $\Leftrightarrow$ όταν υπάρχει ακολουθία $(\vec{a}_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ του A με $\vec{a}_\nu \neq \vec{a}$, $\nu \in \mathrm{N}$, με $\lim\limits_{\nu\to\infty} \vec{a}_\nu = \vec{a}$.

b) Αποδείξτε ότι κάθε φραγμένη ακολουθία $(\vec{x}_\nu)_{\nu \in N}$ του $\mathbb{R}^n$ (δηλαδή $\exists$ $M \in \mathbb{R}$: $\|\mathrm{x}_\nu\| \leq M$, $\nu \in N$) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

## *Λύση*

a) Δουλέψτε με την βοήθεια των παρατηρήσεων σελ. 234-235, θεωρήματα 6.13, 6.14, Διδακτικό βιβλίο.
b) Θεώρημα 6.10, σελ. 230, Διδακτικό βιβλίο.

## *Άσκηση 2.2*

Υπολογίστε το όριο ( υπάρχει) των ακολουθιών $\vec{a}_n$ όπου:

i. $\vec{a}_n = \left(\dfrac{1}{n}, \sqrt[n]{n}\right)$

ii. $\vec{a}_n = \left(\dfrac{n+1}{2^n}, \dfrac{1}{3^n}\right)$

iii. $\vec{a}_n = \left((-1)^n, \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

iv. $\vec{a}_n = \left(\dfrac{1}{n^2}, \dfrac{\eta\mu^2 n}{\sqrt{n}}\right)$

v. $\vec{a}_n = \left(1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \ldots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}, \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right)$

vi. $\vec{a}_n = \left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n}, \dfrac{\eta\mu n}{n}\right)$

vii. $\vec{a}_n = \left(\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n, \sqrt[n]{e}, \dfrac{\ln(n)}{n}\right)$

## ***<u>Υπόδειξη</u>***

Χρησιμοποιούμε το θεώρημα 6.5, σελ. 228, Διδακτικό βιβλίο.

v. $\vec{a}_n = (a_{1n}, a_{2n})$ όπου $a_{1n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $a_{2n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Γνωρίζουμε ότι $\lim_{n\to\infty} a_{1n} = \ln 2$ και $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = e$ (Ανάλυση Ι, e-class). Άρα $\lim_{n\to\infty} \vec{a}_n = (\ln 2, e)$.

vi. $\vec{a}_n = (a_{1n}, a_{2n})$ όπου $a_{1n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$, $a_{2n} = \frac{\eta\mu n}{n}$. Γνωρίζουμε ότι $\lim_{n\to\infty} a_{1n} = +\infty$ (Ανάλυση Ι, e-class). Άρα, δεν υπάρχει το όριο της $\vec{a}_n$.