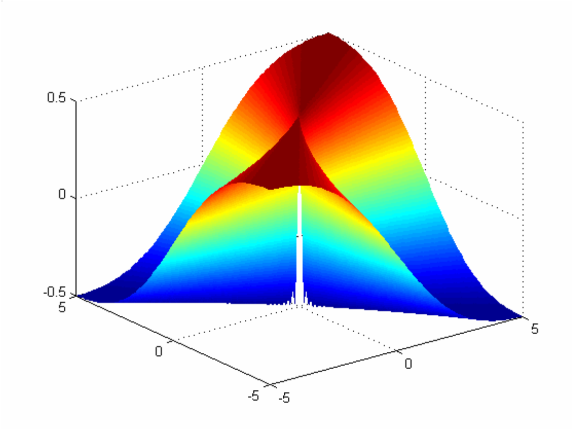
0.3 Όρια, Συνέχεια συναρτήσεων

Μπορείτε να «σχεδιάσετε» τις γραφικές παραστάσεις και να τις περιεργαστείτε πληκτρολογώντας στο Matlab το κομμάτι κώδικα που βρίσκεται μετά τις ασκήσεις.

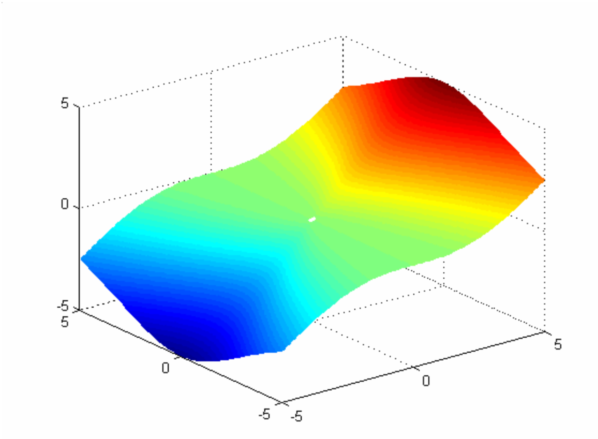
Άσκηση 3.1

Υπολογίστε το όριο (αν υπάρχει) ή αποδείξτε ότι το όριο δεν υπάρχει

i. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

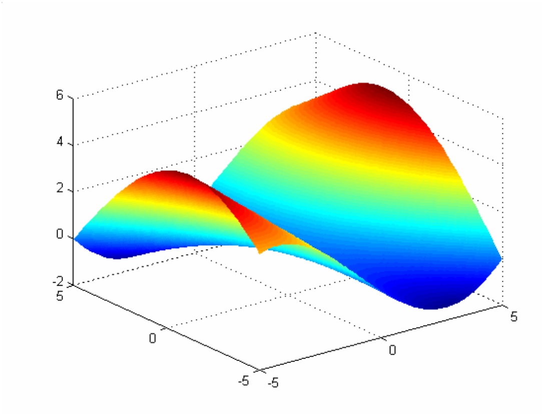


ii. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$

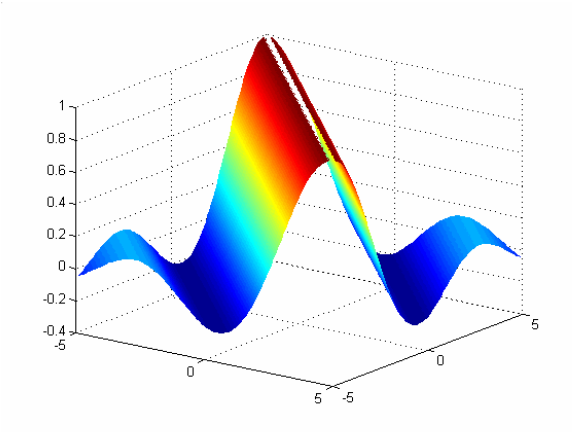


iii. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}$

iv. $\lim\limits_{(x,y)\to(\pi,\pi)} x\cdot \eta\mu\left(\frac{x+y}{4}\right)$



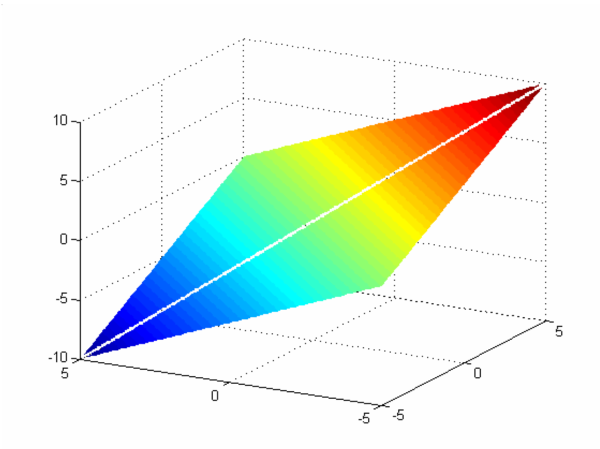
v. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\eta\mu(x+y)}{x+y}$



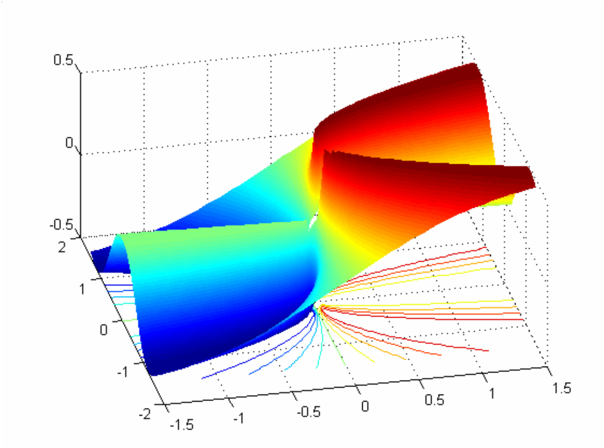
vi. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x^2+y^2}$

vii. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2-1}$

viii. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x+y}$



ix. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$



x. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2-y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$

xi. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2y^2z^2}{x^2+y^2+|z|}$

xii. $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} (1+x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{\eta\mu(x^2+y^2+z^2)}}$

Λύση

i. Παράδειγμα 7.7, σελ. 264, Διδακτικό βιβλίο

ix. Παράδειγμα 7.8, σελ. 265, Διδακτικό βιβλίο

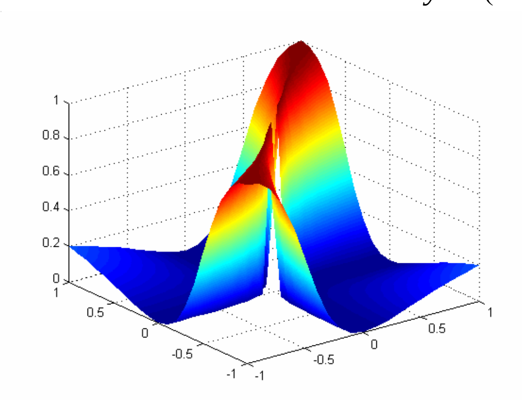
xii. Θέτουμε $t = x^2+y^2+z^2$

Να λυθούν οι υπόλοιπες.

Άσκηση 3.2

i. Έστω $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$ και (α,β) σημείο συσσώρευσης του A. Αποδείξτε ότι αν υπάρχουν τα $\lim\limits_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} f(x,y)$ και $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x,y)$, τότε υπάρχει το διαδοχικό όριο $\lim\limits_{y\to\beta}(\lim\limits_{x\to\alpha} f(x,y))$ και $\lim\limits_{y\to\beta}(\lim\limits_{x\to\alpha} f(x,y)) = \lim\limits_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} f(x,y)$.

ii. Έστω $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.



Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y)) = 0$, αλλά ότι το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

iii. Έστω $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, $x+y\neq 0$. Αποδείξτε ότι $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) \neq \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))$ και ότι το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ δεν υπάρχει.

Λύση

i. Έστω $\ell = \lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)} f(x,y)$ και $\varepsilon > 0$. Τότε $\exists$ $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε

$l - \dfrac{\varepsilon}{2} < f(x,y) < l + \dfrac{\varepsilon}{2}$ για $(x,y) \in \left(\left(\alpha-\delta, \alpha+\delta\right) \times \left(\beta-\delta, \beta+\delta\right) \right) \cap \mathrm{A}$.

Έστω $y \in \left(\beta-\delta, \beta+\delta\right)$ για το οποίο ορίζεται το $\lim_{x\to a} f(x,y)$. Τότε

$l - \dfrac{\varepsilon}{2} \le \lim_{x\to a} f(x,y) \le l + \dfrac{\varepsilon}{2}$ ή $\left| \lim_{x\to a} f(x,y) - l \right| \le \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$.

Άρα υπάρχει το $\lim_{y\to\beta}(\lim_{x\to\alpha} f(x,y))$ και μάλιστα $\lim_{y\to\beta}(\lim_{x\to\alpha} f(x,y)) = l$.

ii. - iii. Να λυθούν

Άσκηση 3.3

Εξετάστε ως προς την συνέχεια τις συναρτήσεις

i. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ $\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$

ii. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu(x^2+2y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 1, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ $\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$

iii. $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{\eta\mu(xy)}{x} + z\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ $\quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

iv. $\vec{f}(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{e^{xy}-1}{x}, \dfrac{1}{x^2+1}, \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} e^{y} \right), & x\neq 0 \\ (y,1,0), & x=0 \end{cases}$ $\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$

v. $\vec{f}(x,y,z) = \begin{cases} \left(\dfrac{xy-z^2}{x^2+y^2+z^2}, \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y+z^2}, \right), & (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ (1,0), & (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$ $\quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

Λύση

i. Χρησιμοποιείστε τον ορισμό της συνέχειας με δ=ε.

ii. Για $y=x$ έχουμε $\lim\limits_{(x,x)\to(0,0)} \dfrac{\eta\mu(x^2+2x^2)}{x^2+x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu(3x^2)}{2x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu(3x^2)}{2x^2}\dfrac{3}{2} =$ $= \dfrac{3}{2} \neq 1 = f(0,0)$. Άρα η f είναι ασυνεχής στο $(0,0)$. Για $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ η f είναι συνεχής.

iv. $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ όπου $f_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{xy}-1}{x} &, \ x\neq 0 \\ y &, \ x=0 \end{cases}$,

$f_2(x,y) = \dfrac{1}{x^2+1}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ και $f_3(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}e^y &, \ x\neq 0 \\ 0 &, \ x=0 \end{cases}$.

- Για την f_1 έχουμε : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\beta)} \dfrac{e^{xy}-1}{x} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,\beta)} \dfrac{e^{xy}-1}{xy} y = \beta = f_1(0,\beta)$.
- Για την f_3 έχουμε : $\lim\limits_{(x,y)\to(0,\beta)} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}e^y = 0 = f_3(0,\beta)$

Συμπεραίνουμε (εύκολα) ότι οι f_1, f_2 f_3 είναι συνεχείς για κάθε $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ άρα και η $\vec{f}$ είναι συνεχείς σε κάθε $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

iii,v Να λυθούν.

Άσκηση 3.4

Εξετάστε αν υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ (και αν υπάρχει να υπολογιστεί), ώστε κάθε μία από τις συναρτήσεις να είναι συνεχής στο $(0,0)$.

i. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2} &, \ (x,y)\neq(0,0) \\ \lambda &, \ (x,y)=(0,0) \end{cases}$

ii. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}\sqrt[3]{y} &, \ (x,y)\neq(0,0) \\ \lambda &, \ (x,y)=(0,0) \end{cases}$

iii. Οι συναρτήσεις της άσκησης 3.1

Λύση

i. Όπως το Παρ. 8.38, σελ. 392, Διδακτικό βιβλίο

ii. Ισχύει $\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2}$ και $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt[3]{y} = 0$. Άρα $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Για να είναι η f συνεχής στο $(0,0)$ πρέπει $\lambda = f(0,0) = 0$.

iii. Να λυθούν.

Κώδικας σε MATLAB για γραφικές παραστάσεις

```
clear all;
clc;

[X,Y] = meshgrid(-5:0.5:5);

figure(1)

R1=X.*Y;
R3=X.^2 +Y.^2;
Z=R1./R3;

surf(X,Y,Z,'FaceColor','interp','EdgeColor','none','FaceLighting','phong')

figure (2);

R1=X.^3;
R3=X.^2 +Y.^2;
Z=R1./R3;

surf(X,Y,Z,'FaceColor','interp','EdgeColor','none','FaceLighting','phong')

figure (3);

R2=X.^2 + X.*Y + Y.^2;
R3=X.^2 - Y.^2;
Z=R2./R3;

surf(X,Y,Z,'FaceColor','interp','EdgeColor','none','FaceLighting','phong')

figure (4);

R1=X + Y;
R2=sin(R1/4);
Z=X.*R2;

surf(X,Y,Z,'FaceColor','interp','EdgeColor','none','FaceLighting','phong')

figure (5);

R1=X + Y;
R2=sin(R1);
Z=R2./R1;

surf(X,Y,Z,'FaceColor','interp','EdgeColor','none','FaceLighting','phong')

figure (6);
R1=X
```

```
R3=X.^2 +Y.^2;
Z=X./(X.^2 +Y.^2);

surf(X,Y,Z,'FaceColor','interp','EdgeColor','none','FaceLighting','phong')

figure (7);
R1=X.*Y
R3=X.^2 + Y.^2-1;
Z=R1./R3;

surf(X,Y,Z,'FaceColor','interp','EdgeColor','none','FaceLighting','phong')

figure (8);
R1=X + Y;
R2=X.^2 - Y.^2;
Z=R2./R1;

surf(X,Y,Z,'FaceColor','interp','EdgeColor','none','FaceLighting','phong')
```