0.4 Διαφόριση συναρτήσεων

<u>Ορισμός</u>

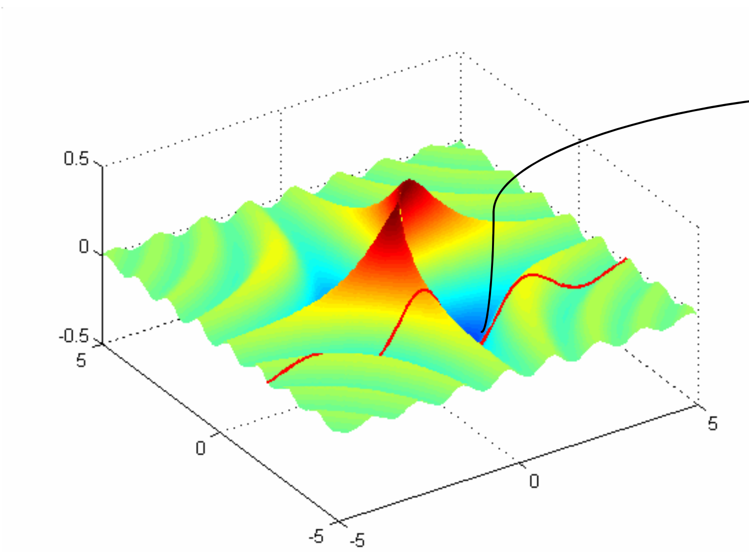
Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μια πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών με A ανοικτό και $(\alpha, \beta) \in A$. Τότε οι **<u>μερικές παράγωγοι</u>** της συνάρτησης f ως προς τις μεταβλητές x και y στο σημείο (α, β) ορίζονται από τους τύπους

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta) = f_x(\alpha, \beta) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\alpha + h, \beta) - f(\alpha, \beta)}{h}$$

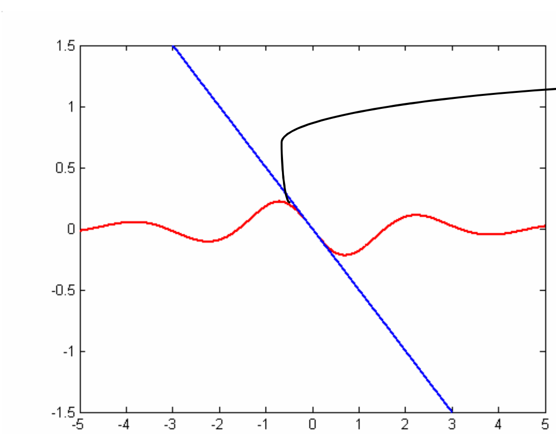
και

$$\frac{\partial f}{\partial y}(\alpha, \beta) = f_y(\alpha, \beta) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\alpha, \beta + h) - f(\alpha, \beta)}{h}$$

υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχουν (στο $\mathbb{R}$) τα αναφερόμενα όρια .



Περιορισμός της $f(x, y)$ στο $y = \beta$



Η $\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha, \beta)$ είναι η παράγωγος της <u>συνάρτησης</u> $f(x, \beta)$ στο σημείο $x = \alpha$

Άσκηση 4.1

Υπολογίστε τις πρώτες μερικές παραγώγους της συνάρτησης

i. $f(x,y)=x^3y^5-2x^2y+x^4$

ii. $f(x,y)=e^{xy}\eta\mu x\sigma\upsilon\nu y+x^{yz}$

iii. $f(x,y,z)=z\eta\mu\dfrac{y}{x+z}+\sigma\upsilon\nu(x+z^2)$

iv. $f(x,y,z)=(x^2+y^3)\ln(1+z^2)+\tau o\xi\varepsilon\phi(x+z)$

Άσκηση 4.2

Εξετάστε αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$ και αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0,0)$.

i. $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ (\eta'\ 1) & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

ii. $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{x^2+y^2}\eta\mu y & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

iii. $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^4}{x-y^4} & ,\ x-y^4\neq 0\\ 0 & ,\ x-y^4=0\end{cases}$$

iv. $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu(x^2y^2)}{x^2+y^2} & ,\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

<u>Λύση</u>

i. Παρατήρηση 8.6, σελ. 339[1]

ii. $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. Η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$, διότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, αφού για $x=0$ είναι

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)}\frac{x}{x^2+y^2}\eta\mu y=\lim_{y\to 0}\frac{0}{y^2}\eta\mu y=\lim_{y\to 0}0=0$$ και για $y=x$

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)}\frac{x}{x^2+y^2}\eta\mu y=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x^2}\eta\mu x=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=\frac{1}{2}$$

[1] Οι σελίδες αναφέρονται στο Διδακτικό Βιβλίο

iii. $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. Η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$, διότι δεν υπάρχει το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, αφού για $y=0$ $\lim\limits_{(x,0)\to(0,0)} \dfrac{x^3-y^4}{x-y^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x}=\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$ και για $x=0$ $\lim\limits_{(0,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-y^4}{x-y^4}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{-y^4}{-y^4}=\lim\limits_{y\to 0} 1=1$

iv. $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$. Η f είναι συνεχής στο $(0,0)$, αφού είναι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\eta\mu(x^2y^2)}{x^2+y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\eta\mu(x^2y^2)}{x^2y^2}\,\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}=1\cdot 0=0=f(0,0)$$

Άσκηση 4.3

Υπολογίστε όλες τις δεύτερες μερικές παραγώγους της συνάρτησης

i. $f(x,y,z)=ze^{xy}+\sigma\upsilon\nu(x+y^3)$

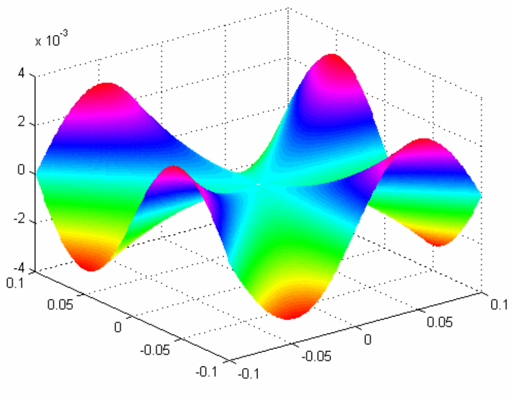
ii. $f(x,y,z)=x^{y+z}+\tau o\xi\varepsilon\varphi(x+y^2+z^3)$

Άσκηση 4.4

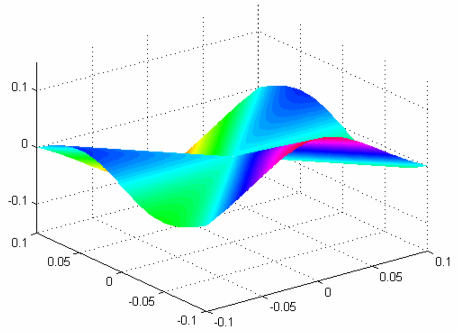
Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} της συνάρτησης

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ,\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,\ (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$ και ότι οι f_{xy}, f_{yx} είναι ασυνεχείς στο $(0,0)$.



Η γραφική παράσταση της $f_x(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$ και της $f_x(0,y)=-y$ φαίνονται στο παρακάτω σχήμα



Λύση

$f_{xy}(0,0)=-1$, $f_{yx}(0,0)=1$. Παράδειγμα 8.14, σελ. 348-349. Οι f_{xy}, f_{yx} είναι ασυνεχείς στο $(0,0)$. Πράγματι

α΄ τρόπος: Εάν η f_{xy} ήταν συνεχής στο $(0,0)$, τότε θα ήταν και η f_{yx} (λόγω της μορφής της συνάρτησης). Οπότε από το Θεώρημα 8.13, Clairaut, σελ. 350, θα έπρεπε $f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)$. Άτοπο, άρα οι f_{xy}, f_{yx} δεν είναι συνεχείς στο $(0,0)$

β΄ τρόπος: Υπολογίστε τις $f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$ για $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ και αποδείξτε την ασυνέχεια αυτών στο $(0,0)$.

Διαφορισιμότητα συναρτήσεων

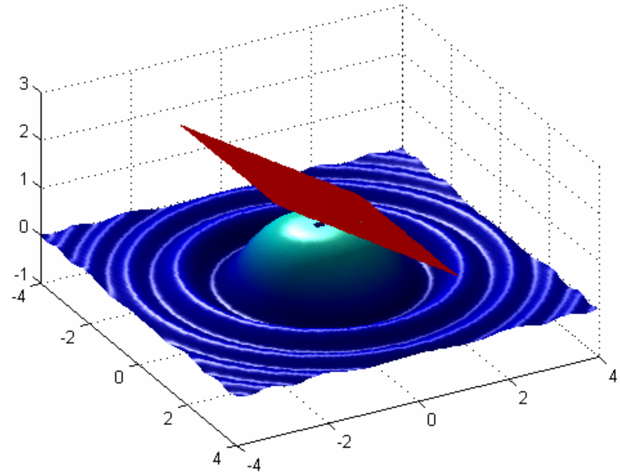
Έστω $f:A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ μια πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών με A ανοικτό και $(\alpha,\beta)\in A$.

i. Η f είναι **διαφορίσιμη** στο (α,β) αν και μόνον αν υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, έτσι ώστε να ισχύει
$$\lim_{(x,y)\to(\alpha,\beta)}\frac{f(x,y)-f(\alpha,\beta)-T(x-\alpha,y-\beta)}{\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}}=0$$

ii. Εάν η f είναι διαφορίσιμη στο (α,β) ο γραμμικός μετασχηματισμός $Df(\alpha,\beta):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, με $Df(\alpha,\beta)(x,y)=f_x(\alpha,\beta)x+f_y(\alpha,\beta)y,(x,y)\in\mathbb{R}^2$ είναι το διαφορικό της f στο (α,β).

(Ορισμός 8.14 σελ. 354, Θεώρημα 8.16 σελ 356-357, Ορισμός 8.17 σελ. 357, Θεώρημα 8.20 σελ. 359).

Στην γραφική παράσταση που ακολουθεί, το επίπεδο που φαίνεται είναι το **εφαπτόμενο επίπεδο**. Το **διαφορικό** είναι ο γραμμικός μετασχηματισμός που περιγράφει το παράλληλο σε αυτό επίπεδο που περνά από την **αρχή των αξόνων**.



Άσκηση 4.5

Υπολογίστε την κλίση (∇ - ανάδελτα) (για τις i,ii), τον πίνακα Jacobi (για τις iii,iv) και το διαφορικό της δοσμένης συνάρτησης στο αναφερόμενο σημείο.

i. $f(x,y) = x^2 y + y\eta\mu x$ στο $(1,0)$

ii. $f(x,y,z) = x \cdot \tau o\xi\varepsilon\varphi \dfrac{y}{x}$ στο $(1,2,-2)$

iii. $\vec{f}(x,y) = (x^2 y + 1,\ x + y,\ x^3)$ στο $(-2,1)$

iv. $\vec{f}(x,y,z) = (xe^{xz},\ y^5)$ στο $(1,2,0)$

<u>Λύση</u>

Εφαρμόστε το Θεώρημα 8.25 σελ. 367, Θεώρημα 9.19 σελ. 4.22.

Άσκηση 4.6

Υπολογίστε το διαφορικό της $f(x,y) = xe^{y^2} + y\sigma\upsilon\nu x$ στο σημείο $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

i. Αποδείξτε ότι $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\left|xe^{y^2} + y\sigma\upsilon\nu x - x - y\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

ii. Υπολογίστε τους αριθμούς $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ ώστε να ισχύει $\lim\limits_{(x,y)\to(\pi,1)} \dfrac{\left|xe^{y^2} + y\sigma\upsilon\nu x - \mathrm{A}x - \mathrm{B}y - \Gamma\right|}{\sqrt{(x-\pi)^2 + (y-1)^2}} = 0$

Λύση

Οι μερικές παράγωγοι $f_x(x,y)=e^{y^2}-y\eta\mu x$, $f_y(x,y)=2xye^y+\sigma\upsilon\nu x$ είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^2$, άρα (Θεώρημα 8.25 σελ. 367) η f είναι διαφορίσιμη στο $\mathbb{R}^2$ με $f(x_0,y_0)=(e^{y_0^2}-y_0\eta\mu x_0)x+(2x_0y_0e^{y_0}+\sigma\upsilon\nu x_0)y$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ και $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\dfrac{\left|f(x,y)-f(x_0,y_0)-Df(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0)\right|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0$ (*) (Βλέπε και Θεώρημα 8.20 σελ. 359).

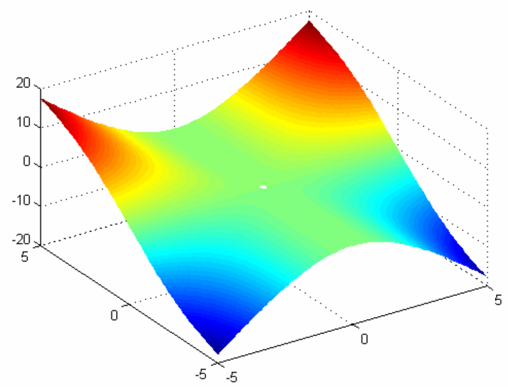
i. Προκύπτει από την (*) αν θέσουμε $(x_0,y_0)=(0,0)$

ii. Προκύπτει από την (*) αν θέσουμε $(x_0,y_0)=(\pi,1)$ και αναρωτηθούμε πόσοι γραμμικοί μετασχηματισμοί την ικανοποιούν.

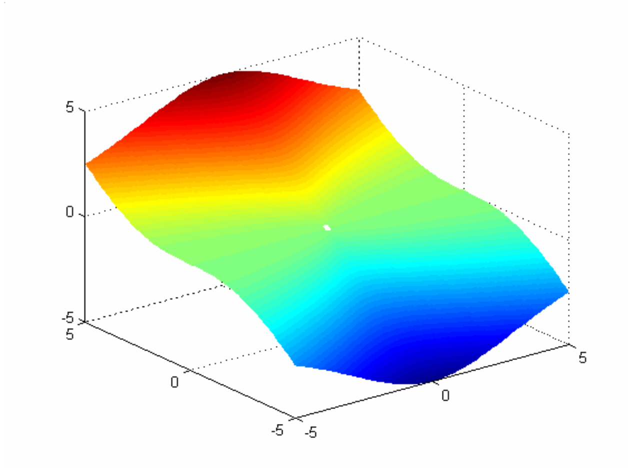
Άσκηση 4.7

Υπολογίστε το διαφορικό της δοσμένης συνάρτησης f στο αναφερόμενο σημείο

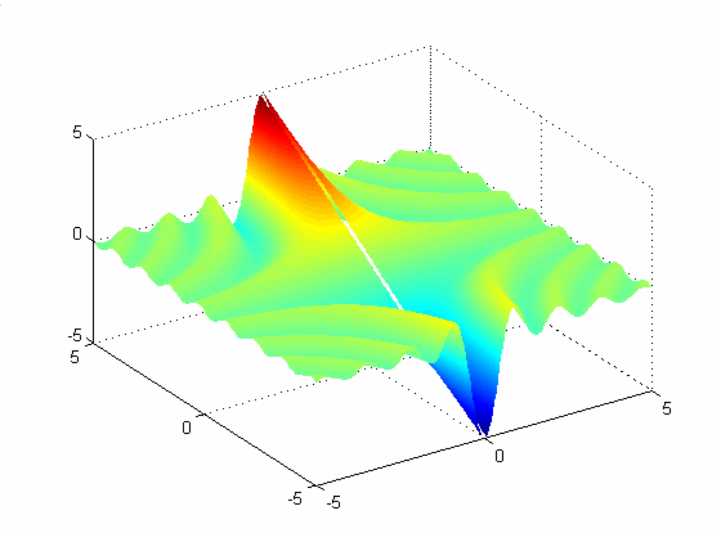
i. $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases} \quad \text{στο } (0,0)$$



ii. $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases} \quad \text{στο } (0,0)$$

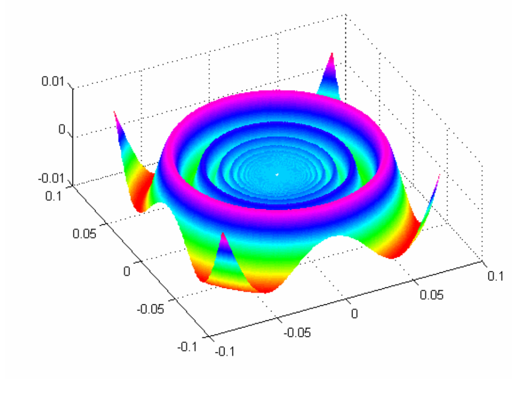


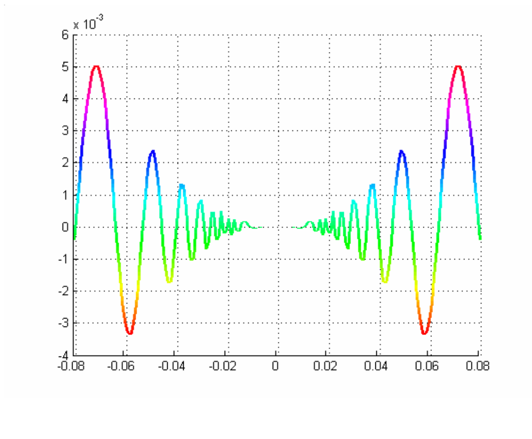
iii. $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\eta\mu xy}{x}\ , & x\neq 0\\ 0\ , & x=0\end{cases}\ \text{στο } (0,y_0)$$



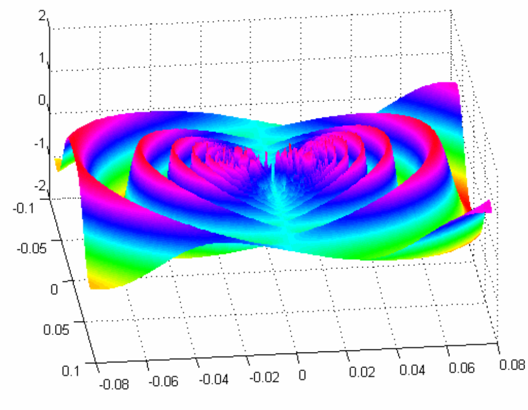
iv. $$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\eta\mu\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\ , & (x,y)\neq(0,0)\\ 0\ , & (x,y)=(0,0)\end{cases}\quad \text{στο } (0,0)$$

Η γραφική παράσταση της $f(x,y)$ και της $f(x,0)$ φαίνονται στα παρακάτω σχήματα

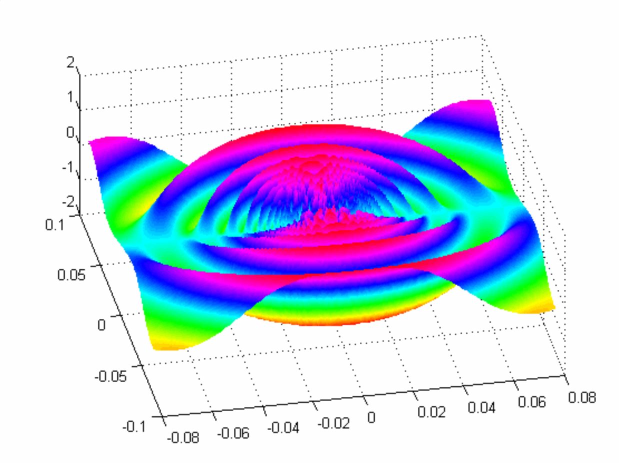




Η γραφική παράσταση της f_x στην iv) φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Η γραφική παράσταση της f_y στην iv) φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



Λύση

i. Παράδειγμα 8.17 σελ. 360

ii. Παράδειγμα 8.18 σελ. 361 (Ανάλογα)

iii. Η f είναι ασυνεχής στο $(0, y_0)$, $y_0 \neq 0$ (γιατί;), άρα δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0, y_0)$, $y_0 \neq 0$.

Η f είναι συνεχής στο $(0,0)$ και $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ (γιατί;). Έχουμε

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)(x,x)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\eta\mu xy}{x\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Όμως το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\eta\mu xy}{x\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\eta\mu x^2}{x\,|x|} \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ δεν υπάρχει άρα (Θεώρημα 8.20 σελ. 359) η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$.

iv. Η f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$, αλλά οι μερικές παράγωγοι δεν είναι συνεχείς στο $(0,0)$ (παράδειγμα 8.21 σελ. 365 – 367, διδακτικό βιβλίο).

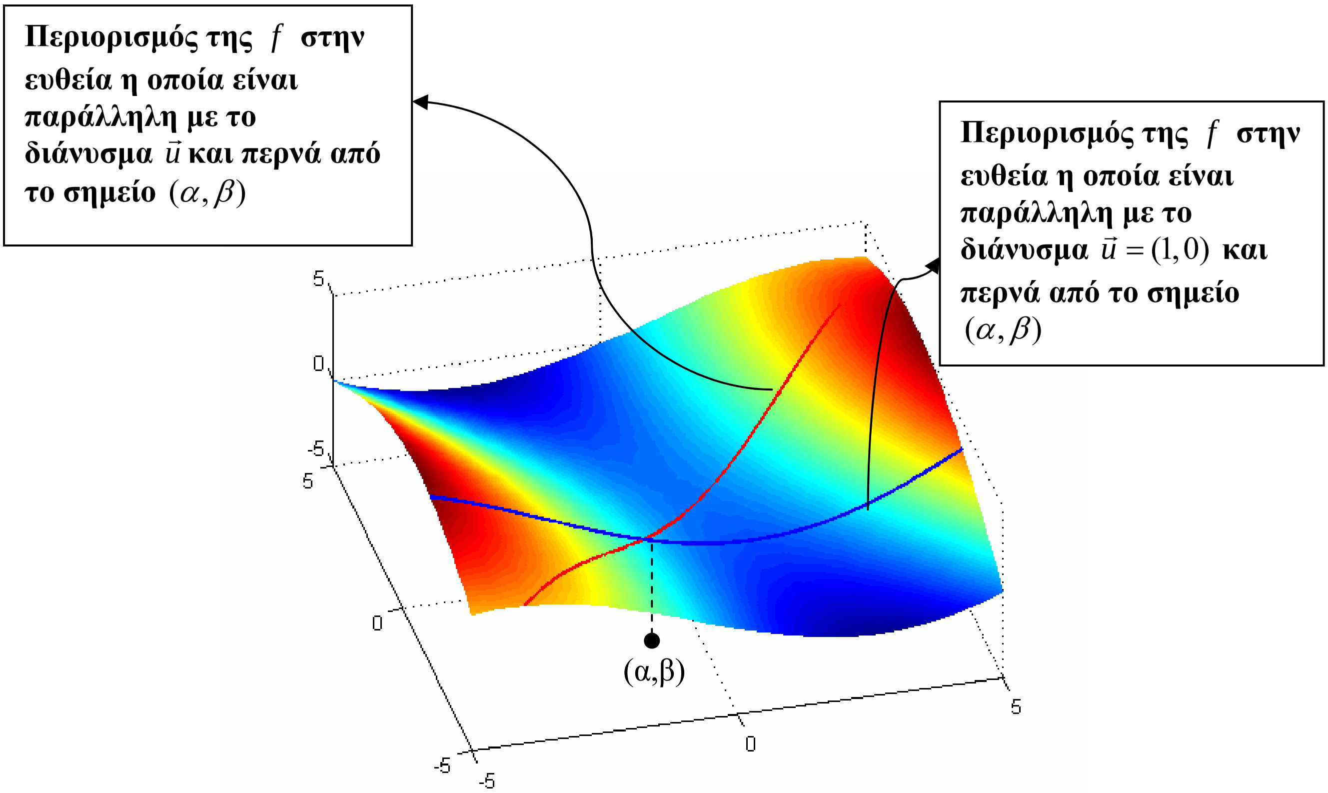
Ορισμός

Έστω $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μια πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών με A ανοικτό και $(\alpha,\beta) \in A$ και $\vec{u} = (u_1, u_2)$ μια κατεύθυνση του $\mathbb{R}^2$ (δηλαδή ότι $\|\vec{u}\| = 1$). Τότε **κατευθυνόμενη παράγωγος** της συνάρτησης f στο σημείο $\vec{a}$ ως προς την **κατεύθυνση** $\vec{u}$ είναι ο πραγματικός αριθμός $f_{\vec{u}}(\vec{a})$, ο οποίος ορίζεται από τον τύπο

$$f_{\vec{u}}(\vec{a}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\alpha + u_1 h, \beta + u_2 h) - f(\alpha,\beta)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{u}) - f(\vec{a})}{h}$$

Αν επιπλέον η πραγματική συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη στο $\vec{a} = (\alpha,\beta) \in A$ τότε υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\vec{u}}(\vec{a})$ και ισχύει ο τύπος

$$f_{\vec{u}}(\vec{a}) = Df(\vec{a})(\vec{u}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{u} \quad , \|\vec{u}\| = 1$$



Άρα η **κατευθυνόμενη παράγωγος** είναι η παράγωγος της (κόκκινης) συνάρτησης σε κάποιο σημείο (ενώ η **μερική παράγωγος** ως προς x είναι η παράγωγος της μπλε συνάρτησης σε κάποιο σημείο).

Άσκηση 4.8

Να υπολογιστεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της $f(x,y,z) = 2ye^x + e^{-y} + e^z \eta\mu y$ στο σημείο $(0, \frac{\pi}{2}, 0)$ ως προς την κατεύθυνση $\vec{u} = (1,1,1)$.

Λύση

Ανάλογα με το παράδειγμα 8.39 σελ. 394

Άσκηση 4.9

Υπολογίστε την κατευθυνόμενη παράγωγο της $f(x,y,z)=e^{x}\sigma\upsilon\nu(\pi yz)$ στο σημείο $(0,1,\frac{1}{2})$ σε κατεύθυνση παράλληλη με την ευθεία που τέμνονται τα επίπεδα $x+y+z-1=0$ και $x-2y+3z-1=0$.

Λύση

Ένα παράλληλο διάνυσμα προς την ευθεία είναι το $\vec{\alpha}=(5,-2,-3)$ (παράδειγμα 3.9 σελ 99-100). Συνεχίζουμε όπως στην άσκηση 4.8.

Άσκηση 4.10

Έστω η θερμοκρασία (σε ^{o}C) σε κάθε σημείο $(x,y,z)\in\mathbb{R}^{3}$ (x,y,z σε μέτρα) δίνεται από την συνάρτηση $T(x,y,z)=75-2x^{2}+y^{2}-z^{2}$

i. Υπολογίστε την κατευθυνόμενη παράγωγο της T στο σημείο $P=(2,-1,1)$ ως προς την κατεύθυνση του $\vec{u}=(4,-3,\ 12)$
ii. Βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα που δείχνει την κατεύθυνση ως προς την οποία η T ελαττώνεται γρηγορότερα στο P και τον ρυθμό μεταβολής κατά την κατεύθυνση αυτή.

Λύση

ii. Ανάλογα με το παράδειγμα 8.41 σελ 396.

Άσκηση 4.11

Υποθέτουμε ότι για τις συναρτήσεις των ασκήσεων ισχύουν οι προϋποθέσεις των θεωρημάτων που θα χρησιμοποιηθούν

i.

1. Αν $u=f(x,y)$ και θέσουμε $x=e^{s}\sigma\upsilon\nu t$ και $y=e^{s}\eta\mu t$, αποδείξτε ότι ισχύει $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{2}=e^{-2s}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^{2}+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^{2}\right]$.
2. Αν $z=f(x-y)$, αποδείξτε ότι ισχύει $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$.
3. i) Εάν $z=f(x^{2}+y^{2})$ αποδείξτε ότι $x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=0$.

ii) Εάν $z = f(e^{xy})$ βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\frac{\partial z}{\partial x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y}$.

4. Εάν $z = f(x, y)$, όπου $x = s + 2\mathrm{t}$, $y = s - 2\mathrm{t}$, υπολογίστε την τιμή του $k \in \mathbb{R}$ (αν υπάρχει) ώστε να ισχύει $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + k\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial z}{\partial s}\frac{\partial z}{\partial t}$.

5. Εάν $z = f(u, v)$ όπου $u = \alpha x + y$, $v = x + \beta y$

   i) Υπολογίστε την $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ συναρτήσει των $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ και $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}$.

   ii) Εάν $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 3\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - 5\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$, υπολογίστε τις τιμές των α, β ώστε η εξίσωση αυτή να μας δίνει την $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.

6. Θεωρούμε τις διαφορίσιμες συναρτήσεις $f = f(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ και $g = g(x, z) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και θέτουμε $w = f(x, y, z)$ και $y = g(x, z)$. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους : $\frac{\partial w}{\partial x}$ και $\frac{\partial w}{\partial z}$.

Άσκηση 4.12

1. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $x = r\sigma\upsilon\nu\theta$, $y = r\eta\mu\theta$, $r > 0$. Αποδείξτε ότι:

   i) $$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)^2$$

   ii) $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

<u>Λύση</u>

i) (Παράδειγμα 9.13 σελ 438.).

Άσκηση 4.13

Έστω $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ και $x = r\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\phi$, $y = r\eta\mu\theta\eta\mu\phi$ και $z = r\sigma\upsilon\nu\phi$. Αποδείξτε ότι :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{z}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2\eta\mu^2\phi}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2\sigma\upsilon\nu\phi}\frac{\partial f}{\partial \phi}.$$

Άσκηση 4.14

Αποδείξτε ότι η $f(\mathrm{t}, x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{1}{\mathrm{t}^{n/2}} e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}{4\mathrm{t}}}, (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, \mathrm{t} > 0$ ικανοποιεί την εξίσωση τις θερμότητας $\frac{\partial f}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$.

Άσκηση 4.15

Αποδείξτε ότι η $u(x,\mathrm{t})=\frac{1}{2}\left[f(x+\mathrm{t})-f(x-\mathrm{t})\right]+\frac{1}{2}\int_{x-\mathrm{t}}^{x+\mathrm{t}} g(s)ds$, $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{t}\geq 0$ ικανοποιεί την απλούστερη μορφή της κυματικής εξίσωσης $\frac{\partial^2 u}{\partial \mathrm{t}^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u(x,0)=f(x)$ και $\frac{\partial u}{\partial \mathrm{t}}(x,0)=g(x)$.

Άσκηση 4.16

Έστω U ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, με την ιδιότητα $\{t\vec{x}: t\in(0,+\infty)\, και\, \vec{x}\in U\}\subseteq U$ και $f:U\to\mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση ομογενής, βαθμού ομογένειας α ($f(\mathrm{t}\vec{x})=\mathrm{t}^a f(\vec{x}), \vec{x}\in\mathbb{R}^n,\ \vec{x}\neq\vec{0},\ \mathrm{t}>0, a\in\mathbb{R}$). Αποδείξτε ότι $\vec{x}\cdot\nabla f(\vec{x})=af(\vec{x})$ για κάθε $\vec{x}\in U$ (Euler).

Λύση

Θεώρημα 9.32, Euler σελ. 436.

Άσκηση 4.17

Έστω $u(x,y)=x^2 f\left(\frac{x}{y}\right)$. Αποδείξτε ότι $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=2u$.

Λύση

Χρησιμοποιούμαι την 4.16

Άσκηση 4.18

Έστω η βαρυτική συνάρτηση $V(x,y,z)=-\frac{GMm}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $(x,y,z)\in U\equiv$ $\equiv\mathbb{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ (Νόμος Newton της Παγκόσμιας Έλξης). Αποδείξτε ότι $x\frac{\partial V}{\partial x}+y\frac{\partial V}{\partial y}+z\frac{\partial V}{\partial z}=-V$.

Λύση

Παράδειγμα 9.10 σελ. 437