0.5 Ακρότατα συναρτήσεων

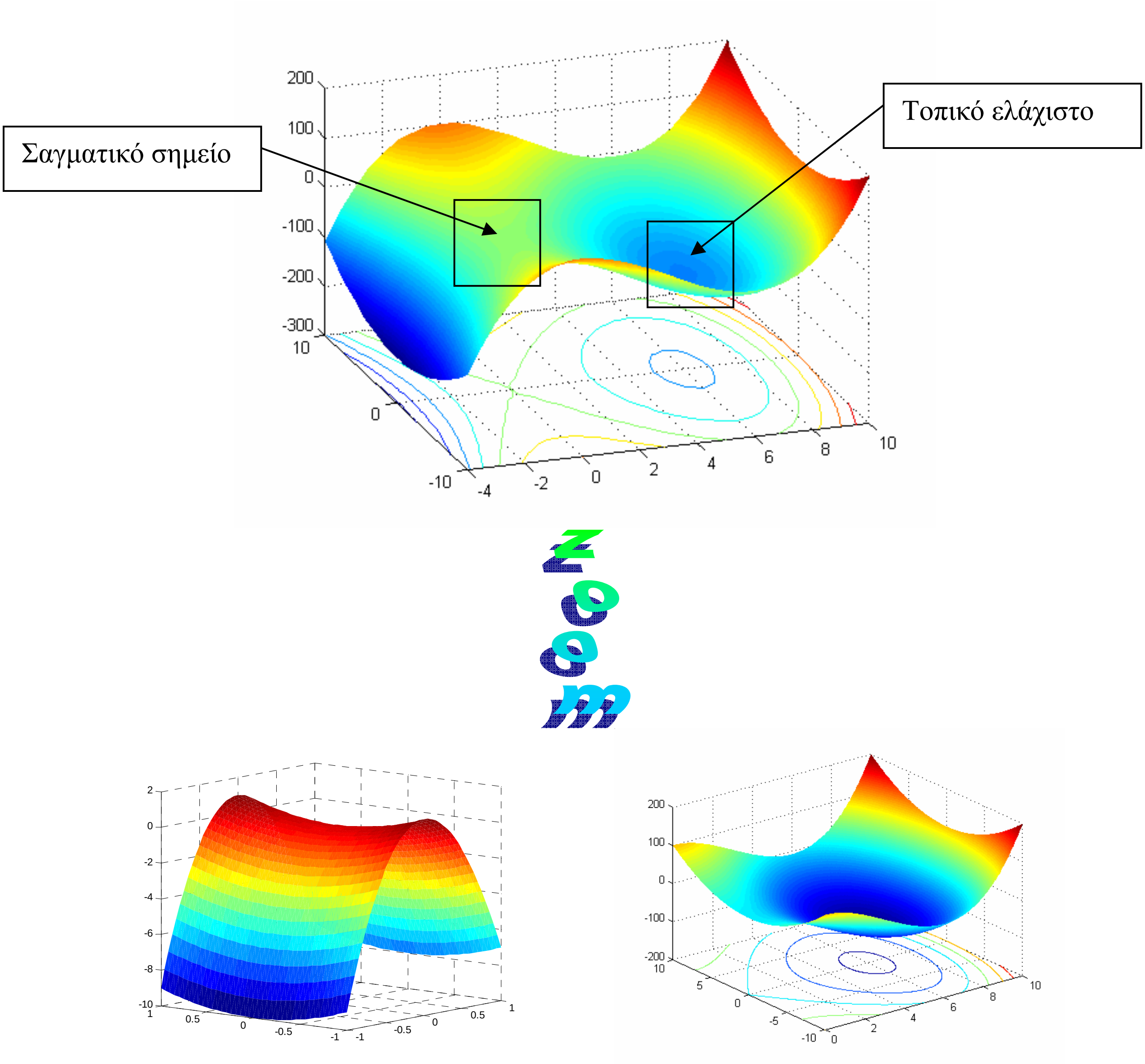
Να βρεθούν τα σημεία τοπικών ακροτάτων και τα σαγματικά σημεία των συναρτήσεων

Άσκηση 5.1

$f(x,y) = x^3 - 9x^2 + y^2$

Λύση

Το $(6,0)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου και το $(0,0)$ σαγματικό σημείο της f (όπως παραδ. 9.25, σελ. 479, Διδ. βιβλίο)



Άσκηση 5.2
$f(x,y,z)=x^3+y^2+z^2-3x$

Λύση

Το $(1,0,0)$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου και το $(-1,0,0)$ σαγματικό σημείο της f (παρ. 9.26, σελ. 479, Διδ. βιβλίο)

Άσκηση 5.3
$f(x,y)=x^2-x^4-y^4$

Λύση

Κρίσιμα σημεία είναι τα $(0,0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$όμως δεν μπορούμε να αποφανθούμε αν είναι σημεία τοπικού ακροτάτου ή σαγματικά. Παρατηρούμε ότι :

Για κάθε $(x,y)\in R^2$ $f(x,y)=x^2-x^4-y^4=-\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2-y^4+\frac{1}{4}\le f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)=\frac{1}{4}$.

Άρα τα σημεία $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ είναι σημεία (ολικού) μεγίστου.

Για το σημείο $(0,0)$ έχουμε $f(0,y)=-y^4<0=f(0,0)$ για κάθε $(0,y)\in R^2$ με $y\neq 0$, ενώ $f(x,0)=x^2-x^4>0=f(0,0)$ για κάθε $(x,0)\in R^2$ με $0<|x|<1$. Άρα το $(0,0)$ είναι σαγματικό σημείο της f .