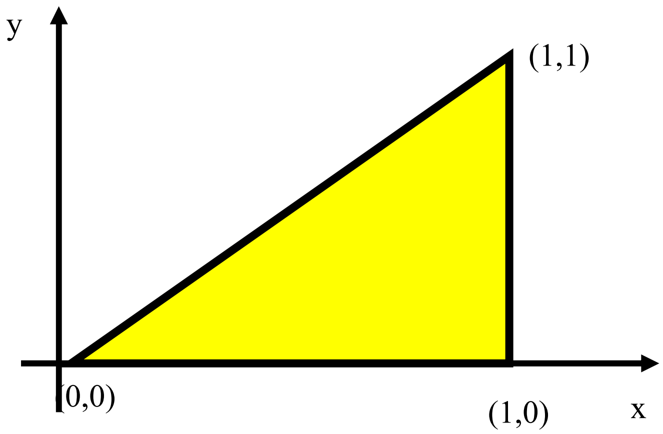
0.6 Διπλά ολοκληρώματα

Άσκηση 6.1

Να υπολογισθούν τα διπλά ολοκληρώματα

1. $\int_0^1\int_{x+1}^{x+2} x^2 y dy dx$
2. $\int_0^1\int_0^1 x^2 y^2 \sqrt{x^3+y^3}\, dx dy$
3. $\int_0^1\int_y^1 x^2 \sigma\upsilon\nu(x^2-xy) dx dy$



Λύση

$$I=\int_0^1\int_y^1 x^2\sigma\upsilon\nu\left(x^2-xy\right)dxdy=\int_0^1\int_0^x x^2\sigma\upsilon\nu\left(x^2-xy\right)dydx=$$

$$=\int_0^1\left[-x\eta\mu\left(x^2-xy\right)\right]_0^x dx=\int_0^1 x\eta\mu x^2 dx=\left[-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x^2\right]_0^1=\frac{1}{2}\left(1-\sigma\upsilon\nu 1\right)$$

4. $\int_0^1\int_y^1 \frac{y}{(1+x^3)^5} dx dy$

Λύση

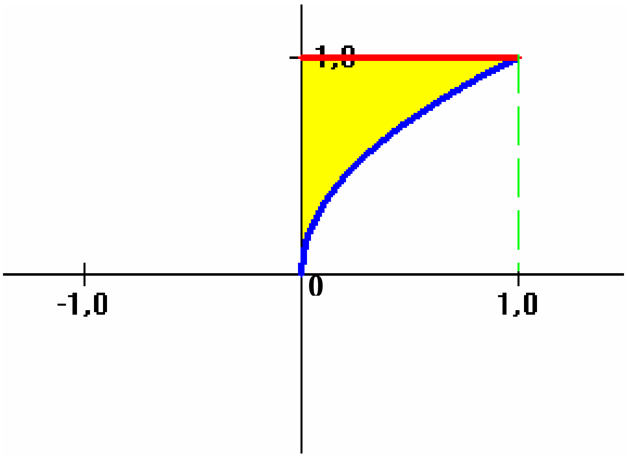
$$\int_0^1\int_y^1 \frac{y}{(1+x^3)^5}dxdy=\int_0^1\int_0^x \frac{y}{(1+x^3)^5}dydx=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^3)}dx=\ldots$$

5. $\int_0^1 \int_x^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dydx$

Λύση

$$\int_0^1 \int_x^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dydx = \int_0^1 \int_0^y \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = \ldots = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$$

6. $\int_0^1 \left[\int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3}\,dy \right] dx$



Λύση

$$\int_0^1 \left[\int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3}\,dy \right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^{y^2} \sqrt{1+y^3}\,dx \right] dy = \int_0^1 y^2 \sqrt{1+y^3}\,dy = \ldots$$

7. $\int_0^{\alpha} \int_0^{\sqrt{\alpha^2-x^2}} (\alpha^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\,dydx$, $(\alpha>0)$

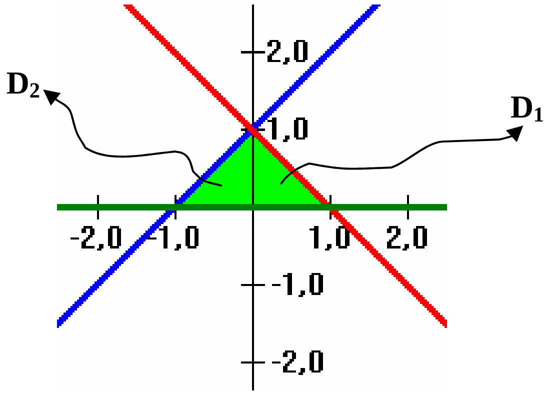
Λύση

$$\int_0^{\alpha} \int_0^{\sqrt{\alpha^2-x^2}} (\alpha^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\,dydx = \int_0^{\alpha} \int_0^{\sqrt{\alpha^2-y^2}} (\alpha^2-y^2)^{\frac{3}{2}}\,dxdy =$$

$$= \int_0^{\alpha} (\alpha^2-y^2)^{\frac{3}{2}} (\alpha^2-y^2)^{\frac{1}{2}}\,dy = \int_0^{\alpha} (\alpha^2-y^2)^2\,dy = \int_0^{\alpha} (a^4 - 2\alpha^2 y^2 + y^4)dy =$$

$$= a^5 - \frac{2}{3}a^2 a^3 + \frac{1}{5}a^5 = \frac{8}{5}a^5$$

8. $\iint\limits_D (x+y)dxdy$, όπου $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |x|+y\leq 1, y\geq 0\right\}$



Λύση

Είναι $D=D_1\cup D_2$, όπου $D_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\leq 1,\ \ x,y\geq 0\right\}$ και $D_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -x+y\leq 1,\ \ x\leq 0, y\geq 0\right\}$. Άρα

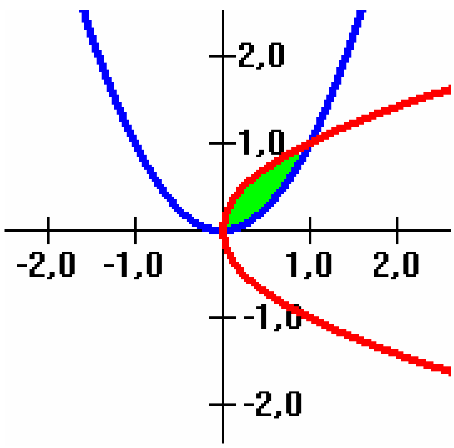
$$\iint\limits_D (x+y)dxdy=\iint\limits_{D_1}(x+y)dydx+\iint\limits_{D_2}(x+y)dydx=$$

$$=\int_0^1\int_0^{1-x}(x+y)dydx+\int_{-1}^0\int_0^{1+x}(x+y)dydx=...=\frac{1}{3}$$

9. $\iint\limits_D xydxdy$, όπου D περιβάλλεται από τις $x=y^2$ $y=x^2$

Λύση

$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq x\leq 1,\ \ x^2\leq y\leq\sqrt{x}\right\}$ ...



Άσκηση 6.2

Να υπολογισθούν τα διπλά ολοκληρώματα

1. $\int_{-1}^{+1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} e^{-(x^2+y^2)} dxdy$

Λύση

Ανάλογα με το παράδειγμα 10.13 σελ. 545-546 $(a=1)$

2. $\iint\limits_D \left(1-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}\right)^{\frac{3}{2}} dxdy$, $D=\left\{(x,y)\in R^2 : \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{y}{\beta}\right)^2\le 1\right\}$, $(\alpha,\beta>0)$

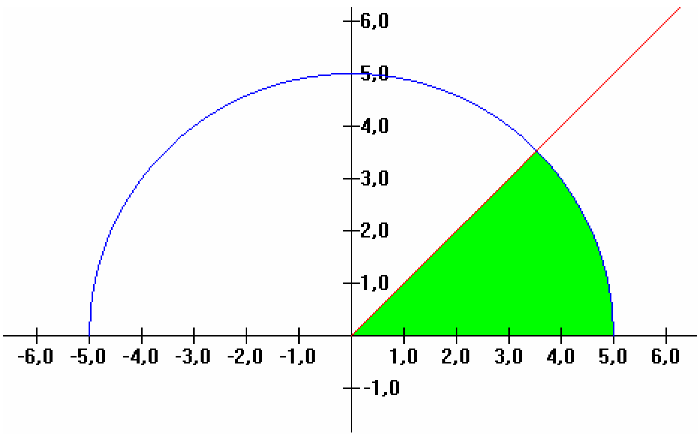
Λύση

Θεωρούμε το μετασχηματισμό $T(r,\theta)=(\alpha r\sigma\upsilon\nu\theta, \beta r\eta\mu\theta)$.

Η Ιακωβιανή (ορίζουσα) του μετασχηματισμού είναι $(\alpha\beta r)$ και $D=T\left([0,1]\times[0,2\pi]\right)$ οπότε ευρίσκουμε:

$$\iint\limits_D (1-\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2})dxdy == \int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r^2)^{\frac{3}{2}}(\alpha\beta r)d\theta dr = ... = 10\alpha\beta\pi$$

3. $\iint\limits_D xdxdy$, $D=\left\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2\le 25, y\le x, y\ge 0\right\}$

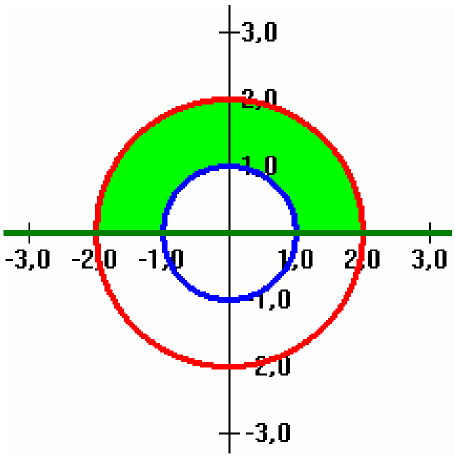


Λύση

$$\iint\limits_D xdxdy = \int_0^5\int_0^{\frac{\pi}{4}}(r\sigma\upsilon\nu\theta)rd\theta dr = ...$$ (γιατί;)

4. $\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy$, $D=\{(x,y)\in R^2 : \alpha^2 \le x^2+y^2 \le \beta^2, y\ge 0\}$, $(0<\alpha<\beta)$

Όπου D είναι το πράσινο χωρίο του σχήματος.



Λύση

Θεωρούμε τον πολικό μετασχηματισμό $x = r\sigma\upsilon\nu\theta$ και $y = r\eta\mu\theta$ όπου $\alpha \le r \le \beta$ και $0 \le \theta \le \pi$

$$\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy = \int_0^{\pi}\int_{\alpha}^{\beta} r\frac{r\sigma\upsilon\nu\theta + r\eta\mu\theta}{r^2}drd\theta = (\beta-\alpha)\int_0^{\pi}(\sigma\upsilon\nu\theta+\eta\mu\theta)d\theta =$$

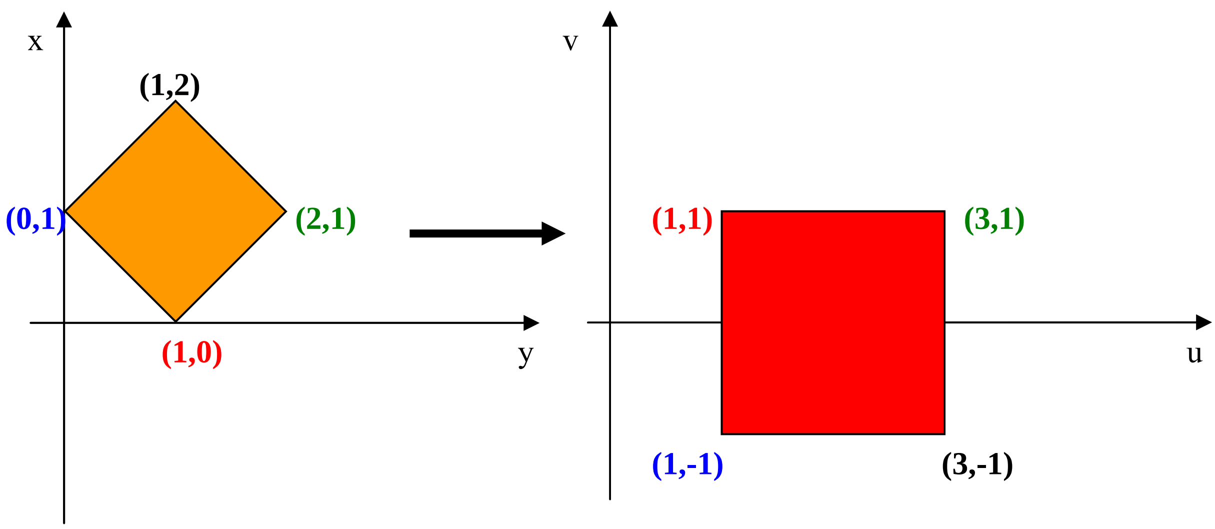
$$= (\beta-\alpha)\int_0^{\pi}\eta\mu\theta d\theta = 2(\beta-\alpha)$$

Άσκηση 6.3

Να υπολογιστεί το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_D (x+y)^3(x-y)^3dxdy$, όπου D το τετράγωνο με κορυφές τα σημεία $A(1,0)$, $B(2,1)$, $\Gamma(1,2)$ και $\Delta(0,1)$.

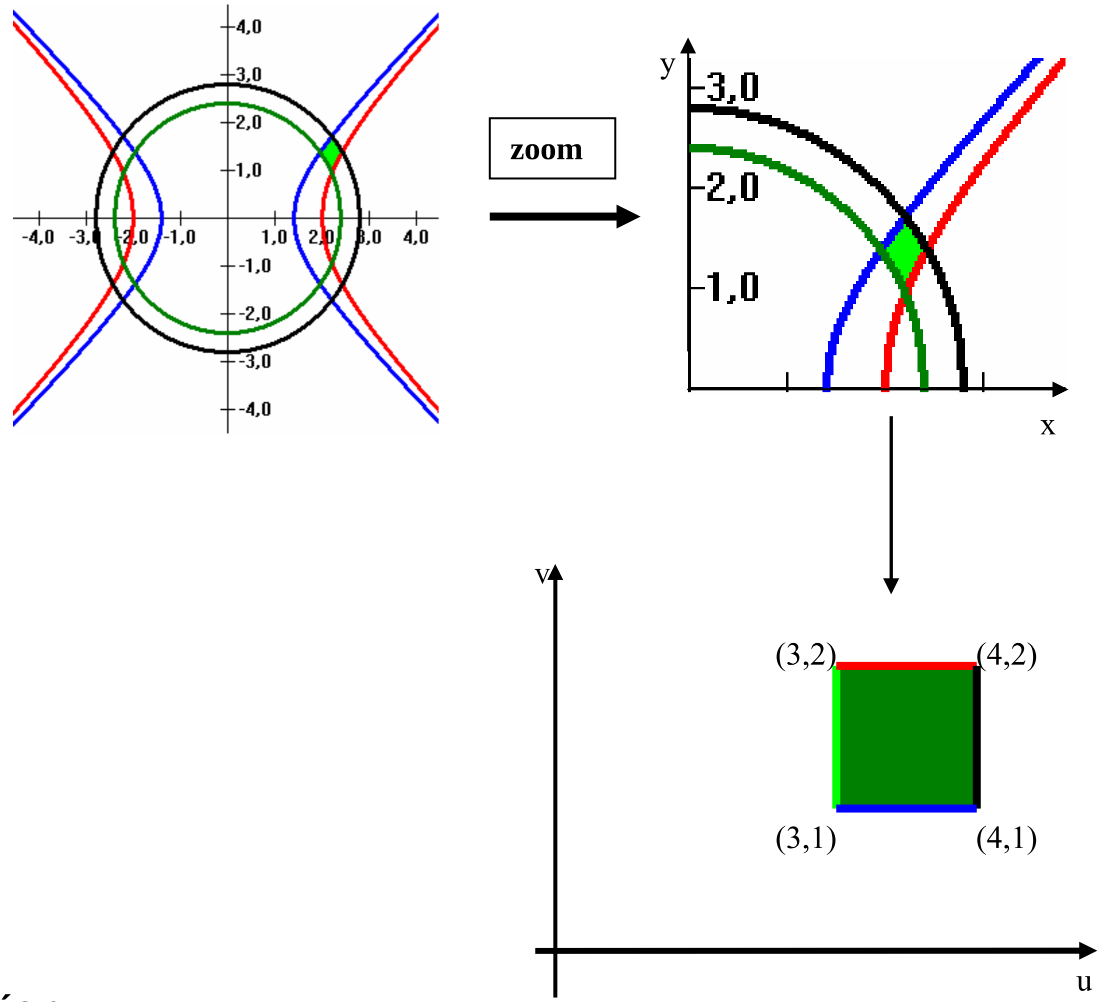
Υπόδειξη

Θέτουμε $u = x+y$ και $v = x-y$



Άσκηση 6.4

$\iint_D xy^3 dxdy$, όπου το D περιβάλλεται από τις υπερβολές $x^2-y^2=2$, $x^2-y^2=4$, τους κύκλους $x^2+y^2=6$, $x^2+y^2=8$, όπου $x, y \geq 0$.



Λύση

Θέτουμε $x=\sqrt{u+v}$ και $y=\sqrt{u-v}$

Η υπερβολή $x^2-y^2=2$ γίνεται $v=1$ και η υπερβολή $x^2-y^2=4$ γίνεται $v=2$.

Ο κύκλος $x^2+y^2=6$ γίνεται $u=3$ και ο κύκλος $x^2+y^2=8$ γίνεται $u=4$.

Η ορίζουσα του μετασχηματισμού είναι $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u^2-v^2}}$.

Το ολοκλήρωμα $\iint_D xy^3 dxdy$ γίνεται $I=\int_1^2\int_3^4 \sqrt{u+v}\left(\sqrt{u+v}\right)^3 \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{u^2-v^2}}dudv=$

$$\frac{1}{2}\int_1^2\int_3^4 (u-v)dudv=\frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{7}{2}-v\right)dv=\frac{7}{4}-\frac{3}{4}=1$$