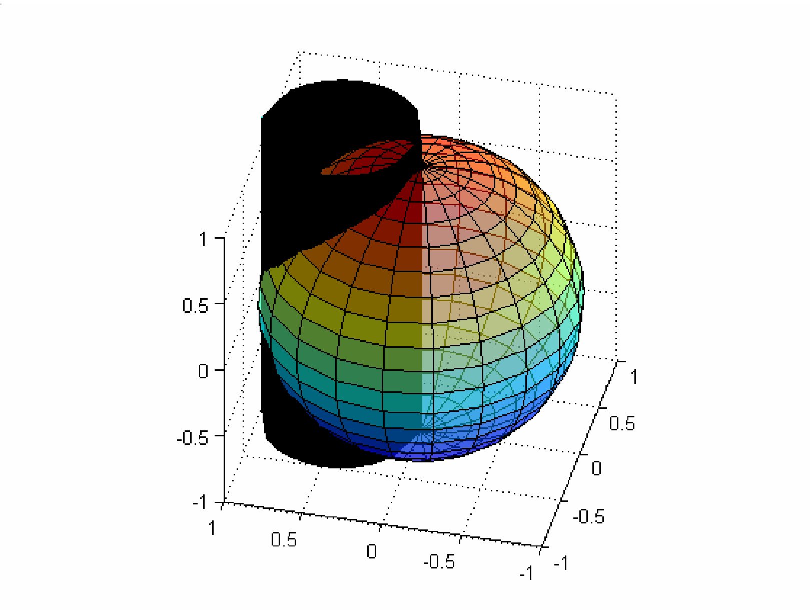
0.7 Τριπλά ολοκληρώματα

Να υπολογιστούν τα τριπλά ολοκληρώματα $\iiint_B f(x,y,z)dxdydz$ και να σχεδιαστούν τα στερεά B.

1. $\iiint_B (x^2+yz)dxdydz$, $B=\{(x,y,z):\ 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1-x,\ \ 0\le z\le 1-x-y\}$.

2. $\iiint_B xdxdydz$, όπου το B περιβάλλεται από τις επιφάνειες $y=x^2, y=x+2$, $4z=x^2+y^2$ και $z=x+3$.

3. $\iiint_B dxdydz$, όπου το B βρίσκεται εντός της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=1$ και εντός του κυλίνδρου $y^2-y+x^2=0$.



Λύση

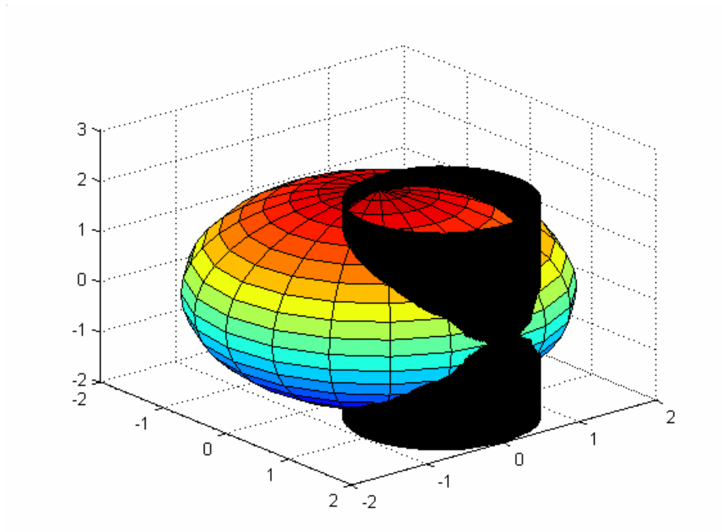
Κάνουμε κυλινδρικό μετασχηματισμό, δηλαδή θέτουμε $x=r\sigma\upsilon\nu\theta$, $y=r\eta\mu\theta$ και $z=z$. Επομένως η σφαίρα γράφεται ως $z^2=1-r^2$ και ο κύλινδρος ως $r=\eta\mu\theta$. Το B μετασχηματίζεται στο σύνολο $\left\{(\theta,r,z):0\le\theta\le\pi,\ 0\le r\le\eta\mu\theta,\ -\sqrt{1-r^2}\le z\le\sqrt{1-r^2}\right\}$

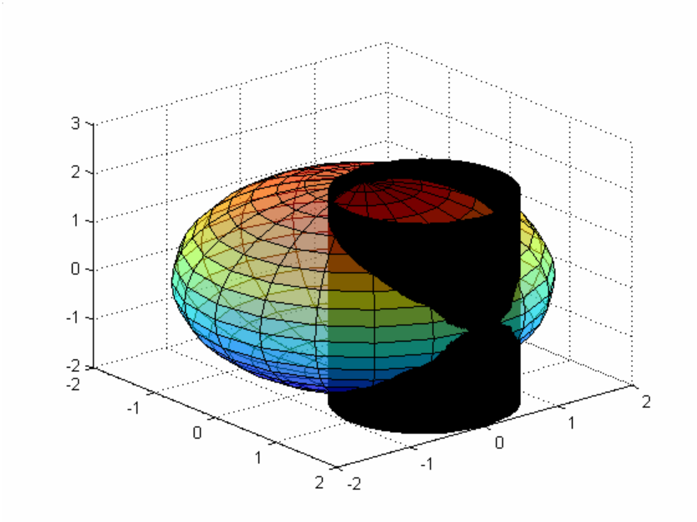
Λόγω της συμμετρίας ο όγκος είναι: $V(B)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\eta\mu\theta}\int_0^{\sqrt{1-r^2}} rdzdrd\theta=$

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\eta\mu\theta} r\sqrt{1-r^2}drd\theta=-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{2}{3}\frac{1}{2}\left(1-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\eta\mu\theta}d\theta=$$

$$-\frac{4}{3}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\eta\mu^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\right]=\frac{2\pi}{3}-\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^3\theta\, d\theta=\ldots=\frac{2\pi}{3}-\frac{8}{9}$$

4. $\iiint\limits_B z^2 dxdydz$, όπου $B = \left\{(x,y,z): \ x^2 + y^2 + z^2 \le 4\alpha^2, \ x^2 + y^2 \le 2\alpha x, \ z \ge 0\right\}$





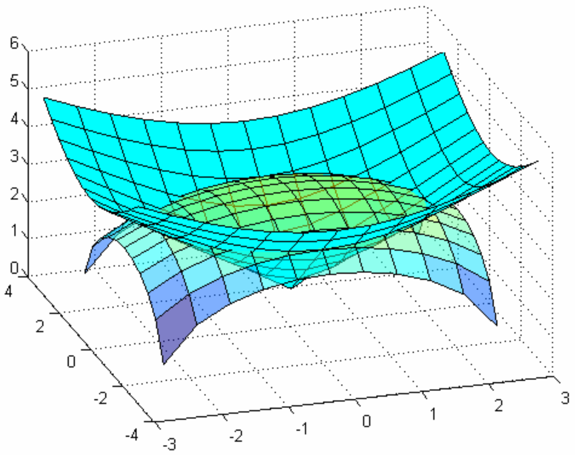
Λύση

Κάνουμε κυλινδρικό μετασχηματισμό, δηλαδή θέτουμε $x = r\sigma\upsilon\nu\theta$, $y = r\eta\mu\theta$ και $z = z$. Επομένως η σφαίρα γράφεται ως $z^2 = 4\alpha^2 - r^2$ και ο κύλινδρος ως $r = 2\alpha\sigma\upsilon\nu\theta$. Το B μετασχηματίζεται στο σύνολο $\left\{(\theta, r, z): -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \ 0 \le r \le 2\alpha\sigma\upsilon\nu\theta, \ 0 \le z \le \sqrt{4\alpha^2 - r^2}\right\}$. Άρα

$$\iiint\limits_B z^2 dxdydz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\alpha\sigma\upsilon\nu\theta} \int_0^{\sqrt{4\alpha^2 - r^2}} z^2 r dz dr d\theta = \ldots = \frac{\pi}{15} 2^5 \alpha^5 - \frac{2^5 \alpha^5}{15} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu^5 \theta d\theta =$$

$$= \ldots = \frac{32}{15} \pi \alpha^5$$

5. $\iiint\limits_B zdxdydz$, όπου $B=\left\{(x,y,z):\ 1+\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{13-x^2-y^2}\right\}$

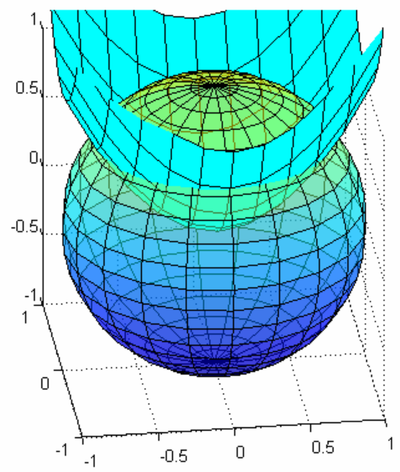


Λύση

Ο κώνος $z=1+\sqrt{x^2+y^2}$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι $z=1+r$. Η σφαίρα $z=\sqrt{13-x^2-y^2}$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι $z=\sqrt{13-r^2}$. Το B μετασχηματίζεται στο σύνολο $\left\{(\theta,r,z):0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le r\le 2,\ 1+r\le z\le\sqrt{13-r^2}\right\}$. Η τομή τους είναι $r=2$, $z=3$. Άρα:

$$\iiint\limits_{\mathrm{B}} zdxdydz=\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{1+r}^{\sqrt{13-r^2}} zdzdrd\theta=\frac{2\pi}{2}\int_0^2\left[\left(13-r^2\right)-\left(1+r\right)^2\right]dr=\frac{44}{3}\pi$$

6. $V(B)=\iiint\limits_B dxdydz$, όπου το B ευρίσκεται εντός της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=1$ και κάτω του παραβολοειδούς $z=x^2+y^2$.



Λύση

$$V(B)=\frac{4}{3}\pi-\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\int_{r^2}^{\sqrt{1-r^2}} rdzdrd\theta=\ldots$$

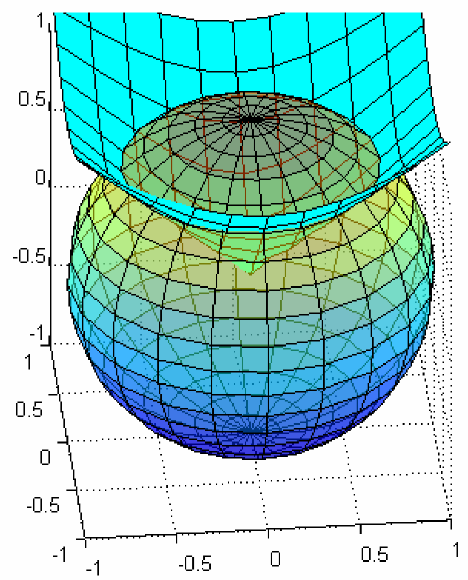
7. $\iiint\limits_B \frac{dxdydz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}$, όπου $B=\left\{(x,y,z): 0\le x\le \alpha,\ 0\le y\le \sqrt{\alpha^2-x^2},\ 0\le z\le \right.$ $\left.\le \sqrt{\alpha^2-x^2-y^2}\right\}$

Λύση

Μετασχηματίζουμε σε σφαιρικές συντεταγμένες, δηλαδή θέτουμε $x=\rho\sigma\upsilon\nu\theta\eta\mu\phi$, $y=\rho\eta\mu\theta\eta\mu\phi$ και $z=\rho\sigma\upsilon\nu\phi$. Οπότε έχουμε :

$$\iiint\limits_B \frac{dxdydz}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a}\frac{\rho^2\eta\mu\phi}{\sqrt{1+\rho^2}}d\rho d\phi d\theta=\ldots$$

8. $V(B)=\iiint\limits_B \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, όπου το B ευρίσκεται στην πρώτη στερεά γωνία εντός της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=2$ και άνω του κώνου $z^2=x^2+y^2$



Λύση

Παράδειγμα 11.12 σελ. 593-594

9. Έστω $I=\int_{-1}^{+1}\int_{x^2}^{1}\int_0^{1-y} f(x,y,z)dzdydx$. Να γραφεί το ολοκλήρωμα με σειρά ολοκλήρωσης $dydzdx$

Λύση

$$I=\int_{-1}^{+1}\int_0^{1-x^2}\int_{x^2}^{1-z} f(x,y,z)dydzdx$$

10. Έστω $I=\int_0^3\int_x^{6-x}\int_0^{2x} dzdydx$. Να γράψετε κατάλληλα τα άκρα της ολοκλήρωσης ώστε $I=\int_{(\cdot)}^{(\cdot)}\int_{(\cdot)}^{(\cdot)}\int_{(\cdot)}^{(\cdot)} dxdydz+\int_{(\cdot)}^{(\cdot)}\int_{(\cdot)}^{(\cdot)}\int_{(\cdot)}^{(\cdot)} dxdydz$