0.8 Επικαμπύλια ολοκληρώματα

1. Έστω η καμπύλη $\Gamma = \Gamma(\vec{r} = \vec{r}(t) = (t^2, 2t, \ln t)\ , t > 0)$. Να ευρεθεί το μήκος της μεταξύ των σημείων $A = (1,2,0)$ και $B = (4,4,\ln 2)$.

Λύση

Έχουμε $r'(t) = (2t, 2, \frac{1}{t})$ $(t > 0)$. Άρα το μήκος της καμπύλης Γ μεταξύ των σημείων $A = \vec{r}(1)$ και $B = \vec{r}(2)$ είναι

$$l(\Gamma) = \int_1^2 \|r'(t)\| dt = \int_1^2 \sqrt{4t^2 + 4 + \frac{1}{t^2}} dt = \int_1^2 (2t + \frac{1}{t}) dt = 3 + \ln 2$$

2. Έστω το σύρμα $\Gamma = \Gamma\left(\vec{r} = \vec{r}(t) = (\sigma\upsilon\nu t, \eta\mu t),\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ με θερμοκρασία $f(x,y) = x - y^2$ στο σημείο $(x,y) \in \Gamma$. Να ευρεθεί η μέση θερμοκρασία του σύρματος.

Λύση

Ανάλογα με το παρ. 12.24 σελ. 639

3. Να ευρεθεί η μάζα $m = \int_\Gamma f(x,y,z) ds$ του σύρματος (σχήματος έλικας) $\Gamma = \Gamma\left(\vec{r} = \vec{r}(t) = (\sigma\upsilon\nu t, 2\eta\mu t, 3t),\ t \in \left[0, \frac{5\pi}{2}\right]\right)$ με πυκνότητα $f(x,y,z) = xy$.

Λύση

$$m = \int_0^{\frac{5\pi}{2}} 2\sigma\upsilon\nu t \eta\mu t \sqrt{10 + 3\sigma\upsilon\nu^2 t} dt = \ldots$$

4. Να υπολογιστεί το $I = \int_\Gamma \vec{F} d\vec{r}$, όπου

i. $\vec{F}(x,y) = (x^2, xy)$ και Γ είναι
   a) Το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το $(0,0)$ και πέρας το $(1,1)$.
   b) Το τμήμα της παραβολής $y = x^2$ με αρχή το $(0,0)$ και πέρας το $(1,1)$.

ii. $\vec{F}(x,y,z) = (x, y, x + z - 1)$ όπου Γ το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το $(1,1,1)$ και πέρας $(2,3,5)$.

iii. $\vec{F}(x,y,z) = (yz, \sqrt{1-y^2}, xy)$ όπου $\Gamma = \Gamma(\vec{r}(t) = (\sigma\upsilon\nu t, \eta\mu t, t)\ , t \in [0, 2\pi])$

Λύση

Ανάλογα με τα παραδείγματα 12.28, 12.29 σελ. 649 – 648.

5. Για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x,y)=(y^2+5,2xy-8)$ να ευρεθεί συνάρτηση f (δυναμικό) ώστε $\nabla f=\vec{F}$.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι $f(x,y)=xy^2+5x-8y+c$ (γιατί;)

6. Για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x,y)=(e^{-2y}\eta\mu x, 2e^{-2y}\sigma\upsilon\nu x+e^{2y})$ να ευρεθεί συνάρτηση f (δυναμικό) ώστε $\nabla f=\vec{F}$ και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_\Gamma \vec{F}d\vec{r}$, όπου Γ είναι η καμπύλη $y=\sigma\upsilon\nu^3 x$ από το $x=0$ στο $x=\pi$.

7. Για το διανυσματικό πεδίο $\vec{F}(x,y,z)=(2xye^z, x^2e^z, x^2ye^z+z^2)$ να ευρεθεί συνάρτηση f (δυναμικό) ώστε $\nabla f=\vec{F}$ και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, όπου Γ είναι τυχαία C^1 καμπύλη με αρχή το $A=(0,0,0)$ και πέρας το $B=(1,1,1)$.

8. Για το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F}(x,y,z)=(z^2+2xy\sigma\upsilon\nu(x^2+z), \eta\mu(x^2+z), 2xz+y\sigma\upsilon\nu(x^2+z))$$

να ευρεθεί συνάρτηση f (δυναμικό) ώστε $\nabla f=\vec{F}$ και να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, όπου Γ είναι τυχαία C^1 καμπύλη με αρχή το $A=(1,1,1)$ και πέρας το $B=(1,2,3)$.

9. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I=\int_{(0,0,0)}^{(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},2)}(y^2+yz\sigma\upsilon\nu xy)dx+(2xy+xz\sigma\upsilon\nu xy)dy+\eta\mu xydz$$

(πρώτα να εξετάσετε αν έχει έννοια το ολοκλήρωμα).

Λύσεις 5-9

<u>α΄ τρόπος:</u> Ανάλογα με τα παραδείγματα 12.30, 12.31, 12.33 σελ. 652 – 654 και χρησιμοποιώντας το θεώρημα 12.27 σελ. 649.
<u>β΄ τρόπος:</u> Χρησιμοποιείστε το Θεώρ. 14.9 σελ. 708, Πόρισμα 14.10 σελ 709 και Θεώρ. 12.25 σελ. 649

10. Επαληθεύσατε το τύπο του Green για

i. $\vec{F}(x,y)=(2x^3-y^3, x^3+y^3)$ και $G=\{(x,y): x^2+y^2\le 1\}$

ii. $\vec{F}(x,y)=(x^2-y^2, x^3+y^3)$ και $G=[1,2]\times[1,3]$

Λύση

Ανάλογα με το παρ. 14.15 σελ 714 – 715.

11. Υπολογίστε (με τη βοήθεια του τύπου του Green) τα ολοκληρώματα $\int_{\partial G}(xy-x^2)dx+x^2ydy$, $\int_{\partial G}y^2dx+x^2dy$ όπου G το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $(1,0)$ και $(1,1)$.

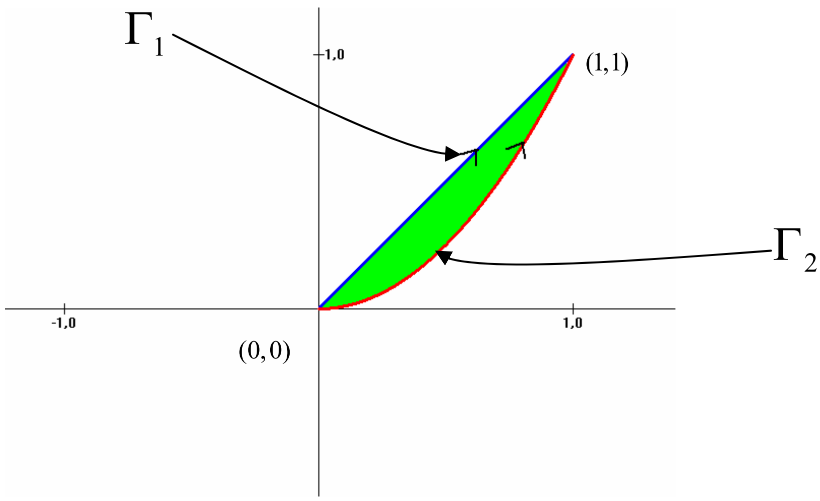
12. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{\Gamma}(5-xy-y^2)dx-(2xy-x^2)dy$ όπου Γ η περίμετρος του τετραγώνου με κορυφές τα σημεία $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ και $(0,1)$.

13. Ένα κινητό ξεκινά από το σημείο $(-2,0)$, κινείται κατά μήκος του άξονα των x και φθάνει στο $(2,0)$ και μετά κατά μήκος του ημικυκλίου $y=\sqrt{4-x^2}$ επιστρέφει στο αρχικό σημείο. Να υπολογιστεί το έργο $W=\int_{\Gamma}\vec{F}d\vec{r}$, αν η δύναμη είναι $\vec{F}(x,y)=(x,x^3+3xy^2)$ και Γ η διαδρομή που ακολούθησε.

Λύσεις 11-13

Ανάλογα με το Παρ. 14.16 σελ 715

14. Πόσο διαφέρουν τα ολοκληρώματα $\mathrm{I}_1=\int_{\Gamma_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}$, $\mathrm{I}_2=\int_{\Gamma_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ όπου $\vec{F}(x,y)=((x+y)^2,-(x-y)^2)$, Γ_1 είναι το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα $(0,0)$, $(1,1)$ και Γ_2 το τμήμα της $y=x^2$ μεταξύ $x=0$, $x=1$.



Λύση

Από τον τύπο του Green έχουμε

$I_2 - I_1 = \int\limits_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int\limits_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} (-4x) dy dx = -\frac{1}{3}$. Άρα Η διαφορά είναι $I_1 - I_2 = \frac{1}{3}$.

15. Έστω $G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\right\}$. Πού είναι το λάθος στον υπολογισμό;

$$2\pi = \int\limits_{\partial G} -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy = \iint\limits_G \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-y}{x^2+y^2} \right) \right] dxdy =$$
$$= \iint\limits_G 0 dxdy = 0$$

Λύση

Ελέγξτε προσεκτικά αν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Green (Θεώρ. 14.13 σελ 714)

16.

i. Έστω $\vec{F} = (P,Q) : \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x_0, y_0)\right\} \to \mathbb{R}^2$ αστρόβιλο C^1 διανυσματικό πεδίο και Γ τυχαία απλή κλειστή C^1 καμπύλη που δεν διέρχεται από το σημείο (x_0, y_0). Αποδείξτε ότι

a) $\int\limits_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, αν το (x_0, y_0) δεν βρίσκεται στο εσωτερικό της Γ.

b) $\int\limits_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = c$ (c σταθερά), εάν το (x_0, y_0) βρίσκεται στο εσωτερικό της Γ.

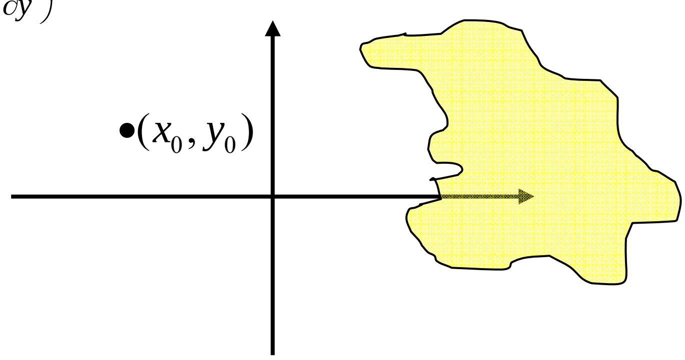
ii. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int\limits_{\Gamma} -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$ όπου Γ η έλλειψη με εξίσωση $\frac{(x-x_0)^2}{\alpha^2} + \frac{(y-y_0)^2}{\beta^2} = 1$ με $\left(\frac{x_0}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{\beta}\right)^2 \ne 1, (\alpha, \beta > 0)$.

Λύση

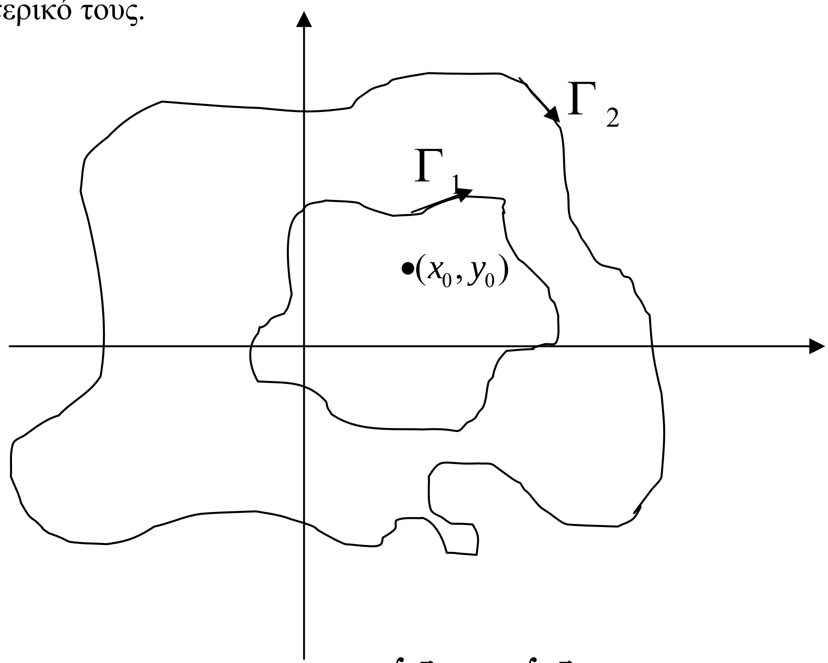
i.a) Το εσωτερικό της Γ, έστω G έχει σαν σύνορο την Γ. Άρα από τον τύπο του Green έχω

$$\int\limits_{\Gamma} \vec{F} d\vec{r} = \iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = 0$$

Γ



i.b) Έστω Γ_1, Γ_2 απλές κλειστές C^1 καμπύλες που περιέχουν το (x_0, y_0) στο εσωτερικό τους.



Τότε από τον τύπο του Green έχουμε $\int\limits_{\Gamma_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int\limits_{-\Gamma_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

Άρα $\int\limits_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ το οποίο σημαίνει πως το ολοκλήρωμα $\int\limits_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ δεν εξαρτάται από την καμπύλη Γ.

ii. Χρησιμοποιείστε το i.b) και το παρ. 14.20 σελ. 719 – 720.

17. Υπολογίστε την Λαπλασιανή $\nabla^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ για

i. $f(x,y,z) = xy^2z^3 + ze^{xy}$

ii. $f(x,y,z) = e^x \eta\mu y + xy^2 - z^2$

και εξετάστε αν οι συναρτήσεις είναι αρμονικές.

18. Υπολογίστε την απόκλιση $div\vec{F}$ και τον στροβιλισμό $curl\vec{F}$ του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}(x,y,z) = (2xy, e^z x^2, x^2 ye^z + z^2)$.

19. Έστω $\vec{F} = (P,Q,R) : V\left(\subseteq \mathbb{R}^3\right) \to \mathbb{R}^3$ συντηρητικό διανυσματικό πεδίο C^1. Αποδείξτε ότι το $\vec{F}$ είναι αστρόβιλο. Ισχύει το αντίστροφο;

<u>Λύση</u>

Θεώρημα 14.7 σελ. 706
Παράδειγμα 14.9 σελ. 702

20. Έστω $G \subseteq \mathbb{R}^2$ απλό σύνολο Green και $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ C^2 συναρτήσεις. Αποδείξτε ότι $\iint_G f \nabla^2 g dxdy + \iint_G \nabla f \nabla g \, dxdy = \int_{(\partial G)^+} \left(-f \dfrac{\partial g}{\partial y} dx + f \dfrac{\partial g}{\partial x} dy \right)$.

Λύση

Εφαρμόζουμε τον τύπο του Green για $\vec{F}(x, y) = \left(-f \dfrac{\partial g}{\partial y}, f \dfrac{\partial g}{\partial x} \right)$.