1. Φυλλάδιο Ασκήσεων

A Εάν X είναι γραμμικός (διανυσματικός) χώρος η απεικόνιση $\bullet : X \times X \to \mathbb{R}$ καλείται <u>εσωτερικό γινόμενο</u>, εάν ισχύουν οι ιδιότητες

i) $x \bullet x \geq 0$, $x \in X$. Αν $x \bullet x = 0$ τότε $x = 0$,

ii) $x \bullet y = y \bullet x$, $x, y \in X$, iii) $(\lambda x) \bullet y = \lambda (x \bullet y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, iv) $(x+y) \bullet z = x \bullet z + y \bullet z$, $x, y, z \in X$

και ο X καλείται <u>χώρος με εσωτερικό γινόμενο.</u>

1) Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αποδείξτε ότι $|x \bullet y| \leq \sqrt{x \bullet x} \cdot \sqrt{y \bullet y}$, $x, y \in X$

2) Έστω X χώρος με εσωτερικό γινόμενο και $\|x\| = \sqrt{x \bullet x}$, $x \in X$. Αποδείξτε ότι i) $\|x\| \geq 0$. Αν $\|x\| = 0$ τότε $x = 0$, ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$, iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (Για το iii) χρησιμοποιείστε την 1))

Τότε ο $\langle X, \|\cdot\| \rangle$ είναι <u>χώρος με νόρμα (μέτρο) που προκύπτει από εσ. γινόμενο.</u>

3) Έστω $\langle X, \|\cdot\| \rangle$ χώρος με νόρμα που προκύπτει από εσ. γινόμενο. Αποδείξτε ότι $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$, $x, y \in X$.

Η ιδιότητα αυτή καλείται Ταυτότητα του Παραλληλογράμμου (γιατί;).

4) Έστω $\langle X, \|\cdot\| \rangle$ χώρος με νόρμα που προκύπτει από εσ. γινόμενο. Τα $\alpha, \beta \in X$ είναι κάθετα αν και μόνον $\alpha \bullet \beta = 0$.

Αποδείξτε ότι: Τα $\alpha, \beta \in X$ είναι κάθετα αν και μόνον αν $\|\alpha + \beta\|^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2$

5) Έστω ο χώρος $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$. Εάν $\vec{x} \bullet \vec{y} =: x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$, $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\vec{y} = (x_1, \ldots, x_n)$ στον $\mathbb{R}^n$ αποδείξτε ότι το $(\bullet)$ είναι εσ. γινόμενο. Γράψτε την A1) αναλυτικά.

Η νόρμα $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \bullet \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ καλείται <u>Ευκλείδεια</u> (ή <u>μέτρο</u> (Ευκλείδειο))

B Στον $\mathbb{R}^3$ με το (Ευκλείδειο) μέτρο, αποδείξτε ότι για το εξωτερικό γινόμενο ισχύουν:

1) i) $\|\vec{\alpha} \times \vec{\beta}\|^2 = \|\vec{\alpha}\|^2 \|\vec{\beta}\|^2 - (\vec{\alpha} \bullet \vec{\beta})^2$, $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^3$

ii) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \bullet (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) \times (\vec{\gamma} + \vec{\alpha}) = 2 \vec{\alpha} \bullet (\vec{\beta} \times \vec{\gamma})$, $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$.

iii) $\vec{\alpha} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha} \bullet \vec{\gamma}) \vec{\beta} - (\vec{\alpha} \bullet \vec{\beta}) \vec{\gamma}$, $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3$

2) i) Το μέτρο $\|\vec{\alpha} \times \vec{\beta}\|$ ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με κορυφές τα σημεία $(0,0,0)$, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\vec{\beta} = (b_1, b_2, b_3)$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ (σε μη τετριμμένες περιπτώσεις)

ii) Η απόλυτη τιμή $|\vec{\gamma} \bullet (\vec{\alpha} \times \vec{\beta})|$ ισούται με τον όγκο παραλληλεπιπέδου με κορυφές τα σημεία $(0,0,0)$, $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$, $\vec{\gamma} + \vec{\alpha}$, $\vec{\gamma} + \vec{\beta}$, $\vec{\gamma} + (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ (σε μη τετριμμένες περιπτώσεις)

Γωνία μεταξύ μη μηδενικών $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \in \mathbb{R}^n$ ορίζεται η $\theta =: \text{τοξσυν}\left(\frac{\vec{\alpha} \bullet \vec{\beta}}{\|\vec{\alpha}\| \|\vec{\beta}\|}\right)$

Γ 1) Έστω $\vec{r}, \vec{r}_1 : I \to \mathbb{R}^n$ (I διάστημα του $\mathbb{R}$) παραγωγίσιμες διαν. συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Αποδείξτε ότι

i) $(\vec{r}+\vec{r}_1)' = \vec{r}\,' + \vec{r}_1\,'$, ii) $(\lambda\vec{r})' = \lambda\vec{r}\,'$, $\lambda \in \mathbb{R}$, iii) $(\vec{r}\cdot\vec{r}_1)' = \vec{r}\,'\cdot\vec{r}_1 + \vec{r}\cdot\vec{r}_1\,'$,

iv) $(\vec{r}\times\vec{r}_1)' = \vec{r}\,'\times\vec{r}_1 + \vec{r}\times\vec{r}_1\,'$, v) $\vec{r}\,' = \vec{0}$ αν και μόνον αν $\vec{r} = \vec{c}$ (για κάποιο $\vec{c}\in\mathbb{R}^n$)

(Γνωστό: $\vec{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ παραγωγίσιμη $\Leftrightarrow$ $r_1, r_2, \dots, r_n : I(\subseteq \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες
Τότε $\vec{r}\,' = (r_1', r_2', \dots, r_n')$)

2) Έστω $\vec{r} : I \to \mathbb{R}^n$ (I διάστημα του $\mathbb{R}$) παραγωγίσιμη διαν. συνάρτηση μιας μεταβλητής και $\vec{v} = \vec{r}\,'$. Αποδείξτε ότι

i) το μέτρο $\|\vec{r}(t)\| = c$ (c σταθερά) $t \in I$ αν και μόνον αν τα $\vec{r}, \vec{v}$ είναι κάθετα.

ii) αν η $\vec{v}(=\vec{r}\,')$ είναι παραγωγίσιμη και $\vec{a} = \vec{v}\,'(=\vec{r}\,'')$ τότε το εσ. γινόμενο $\vec{r}\cdot\vec{v} = c$ (c σταθερά) αν και μόνον αν $\vec{r}\cdot\vec{a} = -\|\vec{v}\|^2$

Δ α) Στα επόμενα αντικαταστείστε την καρτεσιανή εξίσωση με μια ισοδύναμη πολική εξίσωση ($x = r\,\text{συν}\theta$, $y = r\,\text{ημ}\theta$)

i) $x = y$, ii) $x^2+y^2 = 4$, iii) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4} = 1$, iv) $(x-3)^2+(y+1)^2 = 4$, v) $x^2-y^2 = 1$.

α') Στα επόμενα αντικαταστείστε την πολική εξίσωση με μια ισοδύναμη καρτεσιανή εξίσωση. Κατόπιν, περιγράψτε το σχήμα της καμπύλης.

i) $r\,\text{συν}\theta + r\,\text{ημ}\theta = 1$, ii) $r^2 = 4r\,\text{ημ}\theta$, iii) $r^2 = 4r\,\text{συν}\theta$, iv) $\text{ημ}^2\theta = \text{συν}^2\theta$, v) $r = 1-\text{ημ}\theta$.

β) Στα επόμενα αντικαταστείστε την καρτεσιανή εξίσωση με μια ισοδύναμη κυλινδρική εξίσωση ($x = r\,\text{συν}\theta$, $y = r\,\text{ημ}\theta$, $z = z$)

i) $z = xy$, ii) $x^2+y^2 = z^2$, iii) $x^2+y^2 = y$, iv) $x^2+y^2 = 1$ v) $x^2+y^2+z^2 = 2x$.

β') Στα επόμενα αντικαταστείστε την κυλινδρική εξίσωση με μια ισοδύναμη καρτεσιανή εξίσωση. Κατόπιν, περιγράψτε το σχήμα της επιφάνειας.

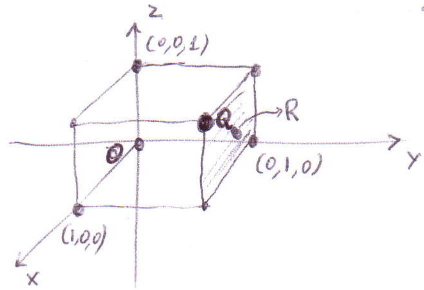
i) $r = 3$, ii) $\theta = \frac{\pi}{3}$, iii) $z = r^2$, iv) $r^2+z^2 = 4$, iv) $r = 1-\text{συν}\theta$.

γ) Στα επόμενα αντικαταστείστε την καρτεσιανή εξίσωση με μια ισοδύναμη σφαιρική εξίσωση ($x = \rho\,\text{συν}\theta\,\text{ημ}\varphi$, $y = \rho\,\text{ημ}\theta\,\text{ημ}\varphi$, $z = \rho\,\text{συν}\varphi$)

i) $x^2+y^2+z^2 = a^2$ ($a>0$), ii) $z^2 = x^2+y^2$, iii) $x^2+y^2 = x$, iv) $x^2+y^2 = 4+4z$.

γ') Στα επόμενα αντικαταστείστε την σφαιρική εξίσωση με μια ισοδύναμη καρτεσιανή εξίσωση. Κατόπιν, περιγράψτε το σχήμα της επιφάνειας

i) $\rho = 3$, ii) $\varphi = \frac{\pi}{3}$, iii) $\rho\,\text{ημ}\theta\,\text{ημ}\varphi = 2$, iv) $\rho\,\text{συν}\varphi = -2$, v) $\rho = \text{ημ}\theta\,\text{ημ}\varphi$



$\boxed{E}$ 1) Έστω ο κύβος $K=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ του $\mathbb{R}^3$.

i) Να ευρεθούν τα διανύσματα $\vec{OQ}$, $\vec{OR}$, όπου R το κέντρο της έδρας (βλ. σχήμα)

ii) Να υπολογιστεί το συνθ, όπου θ η γωνία των $\vec{OQ}$, $\vec{OR}$.

2) Έστω $P_0(2,1,0)$, $P_1(1,0,1)$ και $P_2(2,-1,1)$. Να ευρεθούν

i) το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα P_0, P_1, P_2.

ii) η εξίσωση του επιπέδου E που περνά από τα P_0, P_1, P_2.

iii) το σημείο που η ευθεία η οποία περνά από το $(-1,0,0)$ και είναι παράλληλη με το $\vec{v}=(1,1,1)$, τέμνει το επίπεδο E (του ii))

iv) το σημείο (αν υπάρχει) στο οποίο το ευθύγραμμο τμήμα $[(0,-1,0),(2,0,0)]$ τέμνει το επίπεδο E (του ii))

3) Έστω ότι κινητό που έχει διαν. θέσης $\vec{r}(t)$ την χρ. στιγμή t, $(\vec{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)))$. Κινείται στο επίπεδο $E: 4x-3y-2z=6$.

i) Γράψτε την παραπάνω ιδιότητα του συναρτήσει του $\vec{r}$ και (του) διανύσματος $\vec{N}$ που είναι κάθετο στο E (υπολογίστε το $\vec{N}$)

ii) Αποδείξτε ότι το διάνυσμα της ταχύτητος του κινητού είναι κάθετο στο $\vec{N}$ (του i))

4) Έστω ότι κινητό έχει διαν. θέσης $\vec{r}(t)=(e^t \sigma\upsilon\nu t, e^t \eta\mu t)$. Να βρείτε

i) $\vec{v}$, $\|\vec{v}\|$ $(\vec{v}=\vec{r}\,')$, ii) τη γωνία μεταξύ των $\vec{r}, \vec{v}$. Τί παρατηρείτε;

(Αν σχεδιάσετε την διαδρομή $(t\in\mathbb{R})$ θα την αναγνωρίσετε!)

5) Έστω ότι κινητό έχει διαν. θέσης $\vec{r}(t)=(e^t \sigma\upsilon\nu t, e^t \eta\mu t, e^t)$, $t\in\mathbb{R}$.

i) Αποδείξτε ότι το κινητό κινείται στην επιφάνεια του κώνου $z=\sqrt{x^2+y^2}$

ii) Να βρείτε την γωνία μεταξύ των $\vec{r}, \vec{v}$ $(\vec{v}=\vec{r}\,')$. Τι παρατηρείτε;

ΘΕΜΑΤΑ (2008-2009) : Α 1), Β 1), Γ 2), Ε 2)-5)