Όρια Πραγματικών Συναρτήσεων

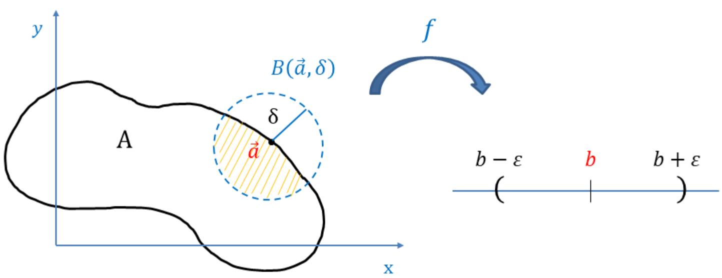
Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Το $\overrightarrow{\alpha}$ καλείται σημείο συσσώρευσης του A και γράφουμε:

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} f(\overrightarrow{x}) = b, \quad b \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta(\varepsilon) = \delta > 0 \ : \ |f(\overrightarrow{x}) - b| < \varepsilon, \quad \text{για κάθε} \quad \overrightarrow{x} \in A$$

$$\text{με} \quad 0 < ||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{\alpha}|| < \delta.$$

Γεωμετρική Ερμηνεία της Έννοιας του Ορίου Πραγματικής Συνάρτησης



Μοναδικότητα του Ορίου

Το όριο όταν υπάρχει, είναι *μοναδικό*.

Αλγεβρικές Ιδιότητες Ορίων

Έστω $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και το $\overrightarrow{\alpha}$ σημείο συσσώρευσης του A. Επίσης, έστω ότι υπάρχουν και τα όρια:

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} f(\overrightarrow{x}) \; \kappa\alpha\iota \lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} g(\overrightarrow{x})$$

. Τότε υπάρχουν και τα παρακάτω όρια:

- $$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} (f(\overrightarrow{x}) + g(\overrightarrow{x})) = \lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} f(\overrightarrow{x}) + \lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} g(\overrightarrow{x})$$
- $$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} \lambda f(\overrightarrow{x}) = \lambda \lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} f(\overrightarrow{x})$$
- $$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} (f(\overrightarrow{x}) g(\overrightarrow{x})) = \left(\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} f(\overrightarrow{x})\right)\left(\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} g(\overrightarrow{x})\right)$$
- $$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} \frac{(f(\overrightarrow{x}))}{(g(\overrightarrow{x}))} = \frac{\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} f(\overrightarrow{x})}{\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} g(\overrightarrow{x})}, \quad \lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} g(\overrightarrow{x}) \neq 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε Πολικές Συντεταγμένες, δηλαδή $x = rcos\theta, y = rsin\theta$.

Με αντικατάσταση πάνω στο όριο προκύπτει το εξής:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \lim_{r \to 0} \frac{r^3 cos^2\theta sin\theta}{r^2(cos^2\theta + sin^2\theta)} = \lim_{r \to 0} rcos^2\theta sin\theta = 0$$

Διότι $r \to 0$ (μηδενική) και $cos^2\theta sin\theta$ φραγμένη, άρα όλη η ποσότητα τείνει στο μηδέν (μηδενική επί φραγμένη είναι μηδενική). Τέλος, αφού το όριο είναι μοναδικό ισχύει το ζητούμενο.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x + ysin\frac{1}{x} \right) = 0, \quad x \neq 0$$

Λύση

Έχουμε ότι

$$\left| x + ysin\frac{1}{x} \right| \leq |x| + |y| \left| sin\frac{1}{x} \right| \leq |x| + |y| \to 0$$

καθώς τα x και y τείνουν στο μηδέν. Δηλαδή

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x + ysin\frac{1}{x} \right) \leq 0$$

Επομένως,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x + ysin\frac{1}{x} \right) = 0$$

Αρχή της Μεταφοράς ή Ακολουθιακό Κριτήριο

Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και το $\overrightarrow{\alpha}$ σημείο συσσώρευσης του A. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- Υπάρχει το $\lim\limits_{\overrightarrow{x}\to\overrightarrow{\alpha}} f(\overrightarrow{x}) = b$
- Για κάθε ακολουθία $(\overrightarrow{x_\nu})$ του A με $\overrightarrow{x_\nu} \neq \overrightarrow{\alpha}$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$ και $\overrightarrow{x_\nu} \to \overrightarrow{\alpha}$ έχουμε $f(\overrightarrow{x_\nu}) \to b$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} xsin\frac{1}{y}$$

Λύση

Θα χρησιμοποιήσουμε την Αρχή της Μεταφοράς. Θέτω

$$f(x,y) = x sin\frac{1}{y}, \quad y \neq 0$$

Θεωρούμε τις ακολουθίες $(\overrightarrow{v_\nu})$ και $(\overrightarrow{w_\nu})$ ως εξής:

$$(\overrightarrow{v_\nu}) = \left(1, \frac{1}{2\nu\pi}\right) \to (1,0)$$
$$(\overrightarrow{w_\nu}) = \left(1, \frac{1}{2\nu\pi + \frac{\pi}{2}}\right) \to (1,0)$$

Θεωρούμε τις αντίστοιχες ακολουθίες των τιμών της συνάρτησης

$$f(\overrightarrow{v_\nu}) = f\left(1, \frac{1}{2\nu\pi}\right) = sin(2\nu\pi) = 0 \to 0$$
$$f(\overrightarrow{w_\nu}) = f\left(1, \frac{1}{2\nu\pi + \frac{\pi}{2}}\right) = sin\left(2\nu\pi + \frac{\pi}{2}\right) = sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \to 1$$

Επομένως από την Αρχή της Μεταφοράς, δεν υπάρχει το όριο.

Κριτήριο μή - Ύπαρξης του Ορίου

Έστω $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\overrightarrow{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ σ.σ του A. Τότε αν δύο διαφορετικές καμπύλες (δρόμοι) οδηγούν σε διαφορετικά όρια, λόγω της μοναδικότητας του ορίου συνεπάγεται ότι δεν υπάρχει το όριο.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2 + (x-y)^8}$$

Λύση

Θα ακολουθήσουμε δύο διαφορετικούς δρόμους (καμπύλες)

- $y -$ άξονας (δηλαδή $x = 0$).

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{0 + (0-y)^8} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^8} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

(Σχόλιο: Η πράξη μέσα στο όριο προηγείται. Μετά βάζουμε το όριο).

- $x = y$.

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2 + 0} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

Επομένως το όριο της $f(x,y)$ για $(x,y) \to (0,0)$ δεν υπάρχει.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Λύση

Θα ακολουθήσουμε δύο διαφορετικούς δρόμους (καμπύλες)

- $y -$ άξονας ($x = 0$)

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = \lim_{y\to 0} -1 = -1$$

- $x -$ άξονας ($y = 0$)

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

Επομένως το όριο της $f(x,y)$ για $(x,y) \to (0,0)$ δεν υπάρχει.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

Λύση

Θα ακολουθήσουμε δύο διαφορετικούς δρόμους (καμπύλες)

- $y-$ άξονας $(x=0)$

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

- $x=y$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Επομένως το όριο της $f(x,y)$ για $(x,y)\to(0,0)$ δεν υπάρχει.

ΑΣΚΗΣΗ 7

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3+y^3}$$

Λύση

Θα ακολουθήσουμε δύο διαφορετικούς δρόμους (καμπύλες)

- $y-$ άξονας $(x=0)$

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^3} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

- $x=y^2$

$$\lim_{y\to 0} f(y^2,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^3}{y^6+y^3} = \lim_{y\to 0} \frac{y^3}{y^3(y^3+1)} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y^3+1} = 1$$

Επομένως το όριο της $f(x,y)$ για $(x,y)\to(0,0)$ δεν υπάρχει.

Όρια Διανυσματικών Συναρτήσεων

Έστω $\overrightarrow{f} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και το $\overrightarrow{\alpha}$ σημείο συσσώρευσης του A και $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$ τότε:

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b}$$

$\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta(\varepsilon) = \delta > 0 \ : \ ||\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) - \overrightarrow{b}|| < \varepsilon,$ για κάθε $\overrightarrow{x} \in A$ με $\quad 0 < ||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{\alpha}|| < \delta.$

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $\overrightarrow{f} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, με $\overrightarrow{f} = (f_1, ..., f_j, ... f_m)$, το $\overrightarrow{\alpha}$ σημείο συσσώρευσης του A και $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

- $$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{b} = (b_1, ..., b_j, ..., b_m), \quad 1 \leq j \leq m$$
- $$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{\alpha}} f_j(\overrightarrow{x}) = b_j, \quad \forall j = 1, 2, ..., m$$

ΑΣΚΗΣΗ 8

Να αποδείξετε ότι:

$$\overrightarrow{f}(x, y) = \left(\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, x + ysin\frac{1}{x} \right) \to (0, 0)$$

Λύση

Έστω $\overrightarrow{f} = (f_1, f_2)$ με $f_1(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ και $f_2(x, y) = x + ysin\frac{1}{x}$.

Για να υπάρχει το όριο της διανυσματικής συνάρτησης $\overrightarrow{f}$ πρέπει να υπάρχει το όριο της κάθε συνιστώσας της, δηλαδή να υπάρχουν τα όρια των πραγματικών συναρτήσεων f_1 και f_2.

Επιπλέον, $\displaystyle\lim_{(x,y) \to (0,0)} \overrightarrow{f}(x, y) = \left(\lim_{(x,y) \to (0,0)} f_1(x, y), \lim_{(x,y) \to (0,0)} f_2(x, y) \right).$

Από Άσκηση 1 και Άσκηση 2 έχουμε ότι:

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_1(x,y) = 0$ και $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_2(x,y) = 0.$

Επομένως, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \overrightarrow{f}(x,y) = (0,0).$

ΑΣΚΗΣΗ 9

Εξετάστε αν υπάρχει το όριο:

$$\overrightarrow{G}(x,y) = \left(\frac{xy}{x^2+y^2}, \frac{x^2y}{x^2+y^2}\right)$$

Λύση

Έστω $\overrightarrow{G} = (G_1, G_2)$. Το όριο της διανυσματικής συνάρτησης $\overrightarrow{G}$ δεν υπάρχει διότι απο Άσκηση 6 δεν υπάρχει το όριο της συνάρτησης G_1.

Συνεχείς Διανυσματικές Συναρτήσεις

Έστω $\overrightarrow{f} : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Η $\overrightarrow{f}$ ονομάζεται συνεχής στο $\overrightarrow{\alpha} \in A$ αν υπάρχει το $\lim\limits_{\overrightarrow{x}\to\overrightarrow{\alpha}} \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$ και είναι ίσο με $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{\alpha})$

Παρατήρηση:
1) Η $\overrightarrow{f}$ ειναι συνεχής στο A όταν ειναι συνεχής σε κάθε σημείο του A.
2) Αν η $\overrightarrow{f}$ δεν είναι συνεχής στο $\overrightarrow{\alpha}$ τότε το $\overrightarrow{\alpha}$ ονομάζεται σημείο ασυνέχειας.

ΑΣΚΗΣΗ 10

Να εξετάσετε αν είναι συνεχής στο (0,0) η συνάρτηση:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Για να είναι συνεχής η συνάρτηση f στο σημείο (0,0) πρέπει να υπάρχει το όριό της στο σημείο αυτό και να είναι ίσο με $f(0,0)$. Αρχικά λοιπόν θα μελετήσουμε αν υπάρχει το όριο της για $x \to 0,\ y \to 0$ (δηλαδή το όριο του πρώτου κλάδου της όπου $(x,y) \neq (0,0)$). Θα υπολογίσουμε το όριο αυτό:

Α′ Τρόπος (με χρήση πολικών συντεταγμένων):

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^3 cos^2\theta sin\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} rcos^2\theta sin\theta = 0$$

όμοια με την Άσκηση 1.
Β′ Τρόπος:

$$\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{x^2|y|}{x^2} = |y| \to 0$$

Επομένως το όριο της f για $(x,y)\to(0,0)$ υπάρχει και είναι ίσο με μηδέν. Επιπλέον, για να είναι συνεχής στο (0,0), πρέπει να δείξουμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = f(0,0)$$

το οποίο προφανώς ισχύει εφόσον απο τον τύπο της f στο σημείο (0,0) (δηλαδή τον δεύτερο κλάδο της) έχουμε $f(0,0)=0$. Επομένως η συνάρτηση f είναι συνεχής στο (0,0).

ΑΣΚΗΣΗ 11

Να εξετάσετε αν είναι συνεχής στο (0,0) η συνάρτηση:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Λύση:

Για να είναι η συνάρτηση $f(x,y)$ συνεχής στο σημείο (0,0) πρέπει να υπάρχει το όριο της για $(x,y)\to(0,0)$ και να είναι ίσο με $f(0,0)$. Από Ασκηση 6, το όριο της συνάρτησης $\frac{xy}{x^2+y^2}$ για $(x,y)\to(0,0)$ δεν υπάρχει, επομένως η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο (0,0).

ΑΣΚΗΣΗ 12

Να εξεταστεί ως προς τη συνέχεια στα σημεία $(\alpha,0)$ η παρακάτω συνάρτηση.

$$f(x,y) = \begin{cases} xsin\frac{1}{y}, & y\neq 0 \\ 0, & y=0 \end{cases}$$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι $f(\alpha,0)=0 \quad (\forall\alpha)$.

Παίρνουμε τις εξής περιπτώσεις:
Για $\alpha \neq 0$, θεωρούμε τις ακολουθίες:

$$\left(\alpha, \frac{1}{2n\pi}\right) \to (\alpha, 0)$$
$$\left(\alpha, \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right) \to (\alpha, 0)$$

Στη συνέχεια παίρνουμε τις f τους και έχουμε:

$$f\left(\alpha, \frac{1}{2n\pi}\right) = \alpha sin(2n\pi) = 0 \to 0$$
$$f\left(\alpha, \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}\right) = \alpha sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = \alpha sin\frac{\pi}{2} = \alpha \to \alpha \neq 0$$

και άρα από την Αρχή της Μεταφοράς δεν υπάρχει το όριο.
(Επομένως η f δεν είναι συνεχής στα σημεία $(\alpha, 0)$ για $\alpha \neq 0$ εφόσον δεν υπάρχει καν το όριό της σε αυτά τα σημεία).

Για $\alpha = 0$ έχουμε:

$$\left|\alpha sin\frac{1}{y}\right| \leq |\alpha|\left|sin\frac{1}{y}\right| \leq |\alpha| = 0 \to 0$$

Δηλαδή στο σημείο (0,0) υπάρχει το όριο της f και επιπλέον είναι ίσο με $f(0,0)$ (από τον δεύτερο κλάδο του τύπου της).
Επομένως η f είναι συνεχής στο (0,0).

Σύνθεση συνεχών συναρτήσεων

Έστω $\overrightarrow{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ και $\overrightarrow{g} : B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ με $\overrightarrow{f}(A) \subseteq B$,
$\overrightarrow{f}$ συνεχής σε ένα σημείο $\overrightarrow{a} \in A$ και $\overrightarrow{g}$ συνεχής στο σημείο $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{a})$ του B.
Τότε η σύνθεση $\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f} : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ είναι συνεχής στο σημείο $\overrightarrow{a}$.