ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ
Επικαμπύλια και Επιφανειακά Ολοκληρώματα

Επικαμπύλια ολοκληρώματα

Ορισμός: Βαθμωτό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (αλλιώς επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πρώτου είδους)
Έστω $\Gamma = \Gamma(\overrightarrow{r})$ μία C^1 παραμετρική καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από την παραμέτρηση $\overrightarrow{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ και $f : \Gamma \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ μία συνεχής βαθμωτή συνάρτηση. Τότε ως **βαθμωτό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα** της f κατά μήκος της παραμετρικής καμπύλης Γ ορίζεται το ορισμένο ολοκλήρωμα :

$$\int_\Gamma f\, ds \equiv \int_{\Gamma(\overrightarrow{r})} f\, ds := \int_a^b f(\overrightarrow{r}(t))||\overrightarrow{r}'(t)||dt = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))||\overrightarrow{r}'(t)||dt$$

Ορισμός: Διανυσματικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (αλλιώς επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δευτέρου είδους)
Έστω $\Gamma = \Gamma(\overrightarrow{r})$ μία C^1 παραμετρική καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από την παραμέτρηση $\overrightarrow{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ και $\overrightarrow{F} = (P,Q,R) : \Gamma \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ μία συνεχής διανυσματική συνάρτηση. Τότε ως **διανυσματικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα** (ή ως προς την παραμέτρηση $\overrightarrow{r}$) της $\overrightarrow{F}$ κατά μήκος της παραμετρικής καμπύλης Γ ορίζεται το ορισμένο ολοκλήρωμα :

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} \equiv \int_{\Gamma(\overrightarrow{r})} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \int_a^b \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t))\cdot \overrightarrow{r}'(t)\, dt = \int_a^b \overrightarrow{F}(x(t),y(t),z(t))||\overrightarrow{r}'(t)||dt$$

Συμβολισμός:

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \int_\Gamma \overrightarrow{F}\cdot ds = \int_\Gamma Pdx + Qdy + Rdz$$

Θεώρημα
Έστω D ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ και $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ μία C^1 βαθμωτή συνάρτηση. Τότε για κάθε τμηματικά C^1 παραμετρική καμπύλη $\Gamma = \Gamma(\overrightarrow{r})$ του D που ορίζεται απο μία τμηματικά C^1 παραμέτρηση $\overrightarrow{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ ισχύει ο τύπος :

$$\int_\Gamma \nabla f\cdot d\overrightarrow{r} = f(\overrightarrow{r}(b)) - f(\overrightarrow{r}(a))$$

Ορισμός:
Έστω $\overrightarrow{F} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ μία συνεχής διανυσματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο G του $\mathbb{R}^3$. Λέμε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δευτέρου είδους της συνάρτησης $\overrightarrow{F}$ είναι **ανεξάρτητο** της καμπύλης στο σύνολο D, όταν για κάθε δύο σημεία A και B του συνόλου D και για κάθε δύο τμηματικά C^1 προσανατολισμένες παραμετρικές καμπύλες Γ_1 και Γ_2 του D με αρχή το A και τέλος το B ισχύει ότι:

$$\int_{\Gamma_1} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \int_{\Gamma_2} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r}\ .$$

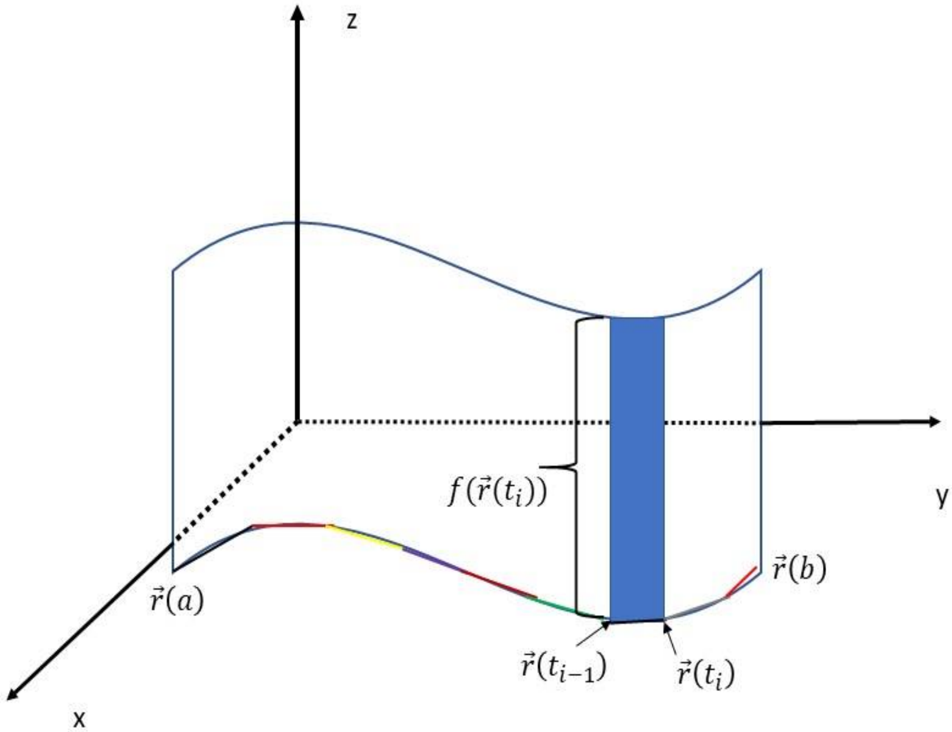
Θεώρημα:
Έστω $F = (P, Q, R) : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ μία συνεχής διανυσματική συνάρτηση τριών μεταβλητών με πεδίο ορισμού ένα ανοικτό και πολυγωνικά συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$. Τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δευτέρου είδους της συνάρτησης $\overrightarrow{F}$ είναι ανεξάρτητο της καμπύλης στο σύνολο D αν και μόνο αν για κάθε κλειστή τμηματικά C^1 παραμετρική καμπύλη $K \subseteq D$ ισχύει

$$\int_K \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0 \; .$$

Απόδειξη: Έστω $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_m$ τα αντίστοιχα τόξα. Τότε παρατηρούμε ότι οι προσανατολισμένες καμπύλες Γ_1 και $C_1 = \Gamma_2 + ... + \Gamma_m$ έχουν την ίδια αρχή και το ίδιο τέλος επομένως από τον παραπάνω ορισμό έπεται ότι $\displaystyle\int_{\Gamma_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ το οποίο μας δίνει

$$\int_K \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{\Gamma_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_{C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{\Gamma_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} - \int_{-C_1} \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 0 \; .$$

Εμβαδόν κυλινδρικής επιφάνειας :



Έστω $\Gamma = \Gamma(\overrightarrow{r})$ μία απλή C^1 παραμετρική καμπύλη του $\mathbb{R}^2$, η οποία ορίζεται από την απλή C^1 παραμέτρηση $\overrightarrow{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ και $f : \Gamma \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση με $f \geqslant 0$, η οποία ορίζεται στην καμπύλη Γ. Προκειμένου να υπολογίσουμε το εμβαδόν μεταξύ της f και της Γ παίρνουμε μία διαμέρηση P του $[a, b]$:

$$P = [a = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = b] \; ,$$

στην οποία τα διαστήματα $[t_{i-1}, t_i]$ θεωρούμε ότι είναι τόσο λεπτά ώστε να μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση $f(\overrightarrow{r})$ είναι σχεδόν σταθερή στο κάθε ένα απο αυτά για $i = 1, 2, ..., n$. Επιπλέον θεωρώντας ότι είναι αρκετά μικρά τα διαστήματα διαμέρησης τότε από θεωρημα μέσης τιμής του Διαφορικού λογισμού μπορούμε να θεωρήσουμε ότι:

$$\left\| \overrightarrow{r}(t_i) - \overrightarrow{r}(t_{i-1}) \right\| = \left\| \overrightarrow{r}'_{t_i} \right\| (t_i - t_{i-1})$$

Παίρνουμε λοιπόν το γινόμενο $f\left(\overrightarrow{r}(t_i)\right) \left\| \overrightarrow{r}_i - \overrightarrow{r}_{i-1} \right\|$ το οποίο είναι το εμβαδόν του λεπτού ορθογωνίου με βάση $[t_{i-1}, t_i]$ και ύψος $f\left(\overrightarrow{r}(t_i)\right)$. Επομένως παίρνοντας το άθροισμα όλων αυτών των ορθογωνίων για $i = 1, 2, ..., n$ προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_a^b \phi(t)dt = \int_a^b f\left(\overrightarrow{r}(t)\right) \left\| \overrightarrow{r}'(t) \right\| dt$

για $t \in [a,b]$, το οποίο είναι το ζητούμενο εμβαδόν. Προκύπτει λοιπόν ο εξής ορισμός του εμβαδού κυλινδρικής επιφάνειας:

Ορισμός: Εμβαδόν κυλιδνρικής επιφάνειας
Έστω $\Gamma = \Gamma(\overrightarrow{r})$ μία απλή C^1 καμπύλη του $\mathbb{R}^2$, η οποία ορίζεται από την απλή C^1 παραμέτρηση $\overrightarrow{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ και $f : \Gamma \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση με $f \geqslant 0$. Τότε το **εμβαδόν** $A(f,\Gamma)$ της κυλινδρικής επιφάνειας $K(f,\Gamma)$ άνω της καμπύλης και κάτω από το γράφημα της f ορίζεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πρώτου είδους:

$$A(f,\Gamma) = \int_a^b f\left(\overrightarrow{r}(r)\right) \left\|\overrightarrow{r}'(t)\right\| dt \ .$$

Με αντίστοιχο τρόπο ορίζεται και το έργο στην περίπτωση των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων δευτέρου είδους.

Έργο:
Έστω ένα υλικό σημειακό σωματίδιο Q το οποίο κινείται κατά μήκος μιας παραμετρικής καμπύλης $\Gamma(\overrightarrow{r})$ του $\mathbb{R}^3$, η οποία ορίζεται από μία παραμέτρηση $\overrightarrow{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, υπό την επίδραση μιας δύναμης $\overrightarrow{F}(x,y,z)$ όπου η συνάρτηση $\overrightarrow{F} : \Gamma \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ είναι συνεχής. Όπως και μετην περίπτωση του εμβαδού κυλινδρικής επιφάνειας, παίρνουμε μία αρκετά λεπτή διαμέριση του $[a,b]$:

$$P = [a = t_0 < t_1 < ... < t_n - 1, t_n = b] \ .$$

Θεωρούμε λοιπόν ότι το κάθε διάστημα $[t_{i-1}, t_i]$ είναι αρκετά λεπτό ώστε το τόξο της καμπύλης που αντιστοιχεί στο διάστημα να είναι το ευθύγραμμο τμήμα $\overline{\overrightarrow{r}(t_{i-1})\overrightarrow{r}(t_i)}$ και η F να είναι σταθερή στο διάστημα αυτό και ιση με $\overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}(t_i)\right)$. Επομένως το έργο της δύναμης $\overrightarrow{F}$ κατά την μετατόπιση του σωματιδίου κατα μήκος του τόξου $[t_{i-1}, t_i]$ θα δίνεται προσεγγιστικά από τον τύπο:

$$W_k \simeq \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}(t_i)\right) \cdot \left(\overrightarrow{r}(t_i) - \overrightarrow{r}(t_{i-1})\right) = \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}(t_i)\right) \cdot \overrightarrow{r}'(t_i)\Delta t_i \ .$$

Επομένως παίρνοντας το άθροισμα *Riemann* για $i = 1, 2, ..., n$ προσεγγίζουμε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_a^b \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}(t_i)\right) \cdot \overrightarrow{r}'(t)dt$ που είναι το ζητούμενο έργο. Προκύπτει λοιπόν ο ακόλουθος ορισμός:

Ορισμός: Έργο
Ως **έργο** W μίας συνεχούς δύναμης $\overrightarrow{F}(x,y,z)$ κατά την μετατόπιση ενός σημειακού σωματιδίου κατά μήκος μίας παραμετρικής C^1 καμπύλης $\Gamma(\overrightarrow{r})$ του $\mathbb{R}^3$, η οποία ορίζεται απο μία C^1 παραμέτρηση $\overrightarrow{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ από ένα σημείο $A\left(\overrightarrow{r}(a)\right)$ σε ένα σημείο $B\left(\overrightarrow{r}(b)\right)$ ορίζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δευτέρου είδους:

$$W = \int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_a^b \overrightarrow{F}\left(\overrightarrow{r}(t)\right) \cdot \overrightarrow{r}'(t)dt \ .$$

Επιφανειακά ολοκληρώματα

Για μία C^1 διπαραμέτρηση $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ορίζουμε τα διανύσματα :

$$\overrightarrow{r_u} = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial y(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial z(u,v)}{\partial u}\right)$$

$$\overrightarrow{r_v} = \frac{\partial \overrightarrow{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial y(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial z(u,v)}{\partial v}\right)$$

$$\overrightarrow{N} = \overrightarrow{N}(u,v) := (\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v})(u,v) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Ορισμοί

Μία διπαραμέτρηση $\overrightarrow{r} = (x, y, z) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ονομάζεται
$i)$ **απλή** όταν είναι $1-1$ στο εσωτερικό του D.
$ii)$ **λεία** όταν είναι C^1 και ισχύει $\overrightarrow{N}(u,v) = (\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v}) \neq \overrightarrow{0}$ στο εσωτερικό του D.
$iii)$ **κανονική** όταν είναι απλή και λεία.

Ορισμοί

$i)$ **Παραμετρική επιφάνεια** S του $\mathbb{R}^3$ ονομάζεται ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, όταν υπάρχει μία διπαραμέτρηση $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(u,v) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ η οποία έχει πεδίο τιμών το σύνολο S, δηλαδή $S = \overrightarrow{r}(D) = \{\overrightarrow{r}(u,v) : (u,v) \in D\}$
$ii)$ **Κανονικό κάθετο διάνυσμα** της παραμετρικής επιφάνειας $S = S(\overrightarrow{r})$ στο σημείο (x_0, y_0, z_0) ονομάζεται το διάνυσμα $\overrightarrow{N}(u_0, v_0) = (\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v})(u_0, v_0)$, όπου $(x_0, y_0, z_0) = \overrightarrow{r}(u_0, v_0)$.
$iii)$ **Εφαπτόμενο επίπεδο** της παραμετρικής επιφάνειας $S = S(\overrightarrow{r})$ στο σημείο (x_0, y_0, z_0) ονομάζεται το επίπεδο στο $\mathbb{R}^3$ το οποίο περιέχει το σημείο $\overrightarrow{r}(u_0, v_0)$ της επιφάνειας S και είναι κάθετο προς το διάνυσμα $\overrightarrow{N}(u_0, v_0) = (\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v})(u_0, v_0)$.

Ορισμός : Εμβαδόν παραμετρικής επιφάνειας

Έστω $S = S(\overrightarrow{r})$ μία κανονική παραμετρική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται απο μία κανονική διπαραμέτρηση $\overrightarrow{r}(u,v) : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ (για D u-απλό ή v-απλό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$). Τότε το **εμβαδόν** της παραμετρικής επιφάνειας $S = S(\overrightarrow{r})$ ορίζεται το διπλό ολοκλήρωμα

$$A(S) := \int\int_D ||\overrightarrow{N}(u,v)|| dudv = \int\int_D ||(\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v})(u,v)|| dudv$$

Ορισμός: Βαθμωτό επιφανειακό ολοκλήρωμα (αλλιώς επιφανειακό ολοκλήρωμα πρώτου είδους)

Έστω $S = S(\overrightarrow{r})$ μία κανονική παραμετρική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται απο μία κανονική διπαραμέτρηση $\overrightarrow{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ και $f : S \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ μία συνεχής βαθμωτή συνάρτηση. Τότε ως **βαθμωτό επιφανειακό ολοκλήρωμα** της f πάνω στην επιφάνεια S ορίζεται το διπλό ολοκλήρωμα :

$$\int\int_S f\, dS := \int\int_D f(\overrightarrow{r}(u,v)) ||\overrightarrow{N}(u,v)|| dudv = \int\int_D f(\overrightarrow{r}(u,v)) ||(\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v})(u,v)|| dudv$$

όπου $\overrightarrow{N} := \overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v}$ το κανονικό κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας S.

Ορισμός: Διανυσματικό επιφανειακό ολοκλήρωμα (αλλιώς επιφανειακό ολοκλήρωμα δευτέρου είδους)

Έστω $S = S(\overrightarrow{r})$ μία κανονική παραμετρική επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται απο μία κανονική διπαραμέτρηση $\overrightarrow{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ και $\overrightarrow{F} = (P, Q, R) : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ μία συνεχής διανυσματική συνάρτηση. Τότε ως **διανυσματικό επιφανειακό ολοκλήρωμα** της $\overrightarrow{F}$ πάνω στην επιφάνεια S ορίζεται το διπλό ολοκλήρωμα :

$$\int\int_S \overrightarrow{F} \cdot dS := \int\int_D \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(u,v)) \cdot \overrightarrow{N}(u,v) dudv = \int\int_D \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(u,v)) \cdot (\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v})(u,v) dudv$$

όπου $\overrightarrow{N}$ το κανονικό κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια S.

ΑΣΚΗΣΗ 1 : Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\Gamma (xy + z^2)\, dS$ με Γ μία παραμετρική καμπύλη που ορίζεται από την παραμέτρηση $\overrightarrow{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

ΛΥΣΗ: Υπολογίζουμε αρχικά

$$||\overrightarrow{r}'(t)|| = \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1} = \sqrt{2} \tag{1}$$

Τότε το ζητούμενο ολοκλήρωμα δίνεται από :

$$\int_{\Gamma} f\,ds = \int_0^{2\pi} f(x(t),y(t),z(t))||\overrightarrow{r}'(t)||dt$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma}(xy+z^2)\,ds = \int_0^{2\pi}(x(t)y(t)+z^2(t))||\overrightarrow{r}'(t)||dt$$

$$= \int_0^{2\pi}(\cos t\sin t+t^2)\sqrt{2}dt = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\left(\frac{\sin^2(t)}{2}\right)'+\left(\frac{t^3}{3}\right)'\right)dt = \sqrt{2}\left[\frac{\sin^2(t)}{2}+\frac{t^3}{3}\right]_0^{2\pi} = \sqrt{2}\frac{8\pi^3}{3}$$

ΑΣΚΗΣΗ 2 : Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\Gamma (x-3y^2+z)\,dS$ με Γ την ευθεία που περνάει από τα σημεία $(0,0,0)$ και $(1,1,1)$.

ΛΥΣΗ: Η παραμετρική καμπύλη Γ ορίζεται από την παραμέτρηση $\overrightarrow{r}(t)=(t,t,t)$, $t\in[0,1]$. Υπολογίζουμε αρχικά $\overrightarrow{r}(t)=(1,1,1)$ και άρα $||\overrightarrow{r}'(t)||=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$ Τότε το ζητούμενο ολοκλήρωμα δίνεται από :

$$\int_{\Gamma}(x-3y^2+z)\,ds = \int_0^1(t-3t^2+t)\sqrt{3}dt = \sqrt{3}\int_0^1(2t-3t^2)dt = \sqrt{3}\big[t^2-t^3\big]_0^1 = 0$$

ΑΣΚΗΣΗ 3 : Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\Gamma(-y,x)\,ds$ με $\Gamma=\Gamma(\overrightarrow{r}(t))$ με $\overrightarrow{r}(t)=(x(t),y(t))=(a\cos t,a\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$.

ΛΥΣΗ: Έχουμε τη διανυσματική συνάρτηση $\overrightarrow{F}=(-y,x)$ άρα $\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t))=(-y(t),x(t))=(-a\sin t,a\cos t)$ και $\overrightarrow{r}'(t)=(x'(t),y'(t))=(-a\sin t,a\cos t)$. Επομένως, το ζητούμενο ολοκλήρωμα δίνεται από

$$\int_{\Gamma}\overrightarrow{F}\cdot ds = \int_0^{2\pi}\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t))\cdot\overrightarrow{r}'(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \int_{\Gamma}(-y,x)\,ds = \int_0^{2\pi}(-y(t),x(t))\cdot(x'(t),y'(t))\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi}(-a\sin t,a\cos t)\cdot(-a\sin t,a\cos t)\,dt = \int_0^{2\pi}a^2(\sin^2 t+\cos^2 t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi}a^2dt = a^2\int_0^{2\pi}dt = a^2[t]_0^{2\pi} = 2\pi a^2$$

ΑΣΚΗΣΗ 4 : Να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\int_S z dS$ με S το άνω μισό μέρος μιας σφαίρας ακτίνας $R=2$.

ΛΥΣΗ: Η παραμέτρηση της σφαίρας δίνεται από $\overrightarrow{r}(\theta,\phi)=(x(\theta,\phi),y(\theta,\phi),z(\theta,\phi))$ $=(2\sin\phi\cos\theta,2\sin\phi\sin\theta,2\cos\phi)$, όπου για το άνω μισό μέρος της έχουμε $0\le\theta\le2\pi$ και $0\le\phi\le\frac{\pi}{2}$.

$$\overrightarrow{r_\theta}\times\overrightarrow{r_\phi} = \begin{vmatrix}\overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ -2\sin\phi\sin\theta & 2\sin\phi\cos\theta & 0\\ 2\cos\phi\cos\theta & 2\cos\phi\sin\theta & 2\sin\phi\end{vmatrix} = (-4\sin^2\phi\cos\theta,-4\sin^2\phi\sin\theta,-4\sin\phi\cos\phi)$$

$$||\overrightarrow{r_\theta}\times\overrightarrow{r_\phi}|| = \sqrt{(-4\sin^2\phi\cos\theta)^2+(4\sin^2\phi\sin\theta)^2+(-4\sin\phi\cos\phi)^2}$$

$$= \sqrt{16\sin^2\phi(\sin^2\phi+\cos^2\phi)} = 4\sqrt{\sin^2\phi} = 4|\sin\phi| = 4\sin\phi$$

(αφού για $0\le\phi\le\frac{\pi}{2}$ έχουμε ότι $\sin\phi>0$).

Επίσης για τη συνάρτηση $f=z$ της άσκησης έχουμε $f(\overrightarrow{r}(\theta,\phi))=z(\theta,\phi)=2\cos\phi$.

Επομένως, το ζητούμενο επιφανειακό ολοκλήρωμα δίνεται από :

$$\int_S f dS = \int\int_D f(\vec{r}(\theta,\phi))||(\vec{r_\theta} \times \vec{r_\phi})(\theta,\phi)||\, d\theta d\phi$$

$$\Rightarrow \int_S z dS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} 2\cos\phi(4\sin\phi)\, d\theta d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\cos\phi\sin\phi\, d\phi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\sin(2\phi)\, d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} [-2\cos(2\phi)]_0^{\pi/2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} 4\, d\theta = 8\pi$$

(όπου χρησιμοποιήθηκε η ταυτότητα $\sin(2\phi) = 2\sin\phi\cos\phi$ και το θεώρημα *Fubini* αλλαγής σειράς ολοκλήρωσης).

ΑΣΚΗΣΗ 5 : Να υπολογιστεί το διανυσματικό επιφανειακό ολοκλήρωμα $\int_S (x, y-x, yz)\cdot dS$ με S τον κώνο που δίνεται από τη διπαραμέτρηση $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = (u\cos v, u\sin v, u)$, $(u,v) \in [0,1] \times [0,2\pi]$.

ΛΥΣΗ: Το διάνυσμα $\vec{N} = \vec{r_u} \times \vec{r_v}$ είναι $\vec{N} = (-u\cos v, -u\sin v, u)$, επομένως το ζητούμενο ολοκλήρωμα δίνεται από :

$$\int\int_S \vec{F} \cdot dS = \int\int_D \vec{F}(\vec{r}(u,v)) \cdot \vec{N}(u,v) dudv$$

$$\Rightarrow \int\int_S (x, y-x, yz) \cdot dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (x(u,v), y(u,v) - x(u,v), y(u,v)z(u,v)) \cdot \vec{N}(u,v) dudv$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (u\cos v, u(\sin v - \cos v), u^2\sin v) \cdot (-u\cos v, -u\sin v, u)\, dudv$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (-u^2 + u^2\sin v\cos v + u^3\sin v)\, dudv = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-u^2 + u^2\sin v\cos v + u^3\sin v)\, dvdu$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 (-1 + \sin v\cos v) + \left[\frac{u^4}{4}\right]_0^1 \sin v) \right) dv = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sin v\cos v + \frac{1}{4}\sin v$$

$$= -\frac{1}{3}[v]_0^{2\pi} + \frac{1}{3}\left[\frac{sin^2 v}{2}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{4}[\cos v]_0^{2\pi} = -\frac{2\pi}{3}$$

(όπου χρησιμοποιήθηκε το Θεώρημα *Fubini* αλλαγής σειράς ολοκλήρωσης).

ΑΣΚΗΣΗ 6 : Να υπολογιστεί το εμβαδόν του κώνου $S = \{(x,y,z) : z = \sqrt{x^2+y^2}\, , z \in [0,1])\}$.

ΛΥΣΗ: Θεωρούμε την παραμέτρηση $\vec{r}(\theta,z) = (z\cos\theta, z\sin\theta, z)$, $(\theta,z) \in [0,2\pi] \times [0,1] = D$. Έχουμε $||\vec{r_\theta} \times \vec{r_z}|| = \sqrt{2}z$ και επομένως το εμβαδόν του κώνου δίνεται από

$$A(S) = \int\int_D \sqrt{2}z\, d\theta dz = \sqrt{2}\int_0^1 \int_0^{2\pi} z d\theta dz = \int_0^{2\pi} \int_0^1 z\, dz d\theta$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}[\theta]_0^{2\pi} = \pi\sqrt{2}$$