Ανοικτή μπάλα στον $\mathbb{R}^n$

Ορισμός: Έστω $\overrightarrow{x_0} \in \mathbb{R}^n$ και $\varepsilon > 0$. **Ανοικτή μπάλα** του $\mathbb{R}^n$ με κέντρο $\overrightarrow{x_0}$ και ακτίνα ε καλείται το σύνολο:

$$B(\overrightarrow{x_0}, \varepsilon) = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \quad : \quad \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}\| < \varepsilon\}$$

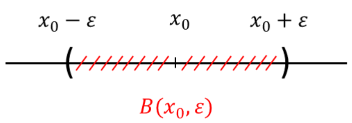
Κλειστή μπάλα στον $\mathbb{R}^n$

Ορισμός: Έστω $\overrightarrow{x_0} \in \mathbb{R}^n$ και $\varepsilon > 0$. **Κλειστή μπάλα** του $\mathbb{R}^n$ με κέντρο $\overrightarrow{x_0}$ και ακτίνα ε καλείται το σύνολο:

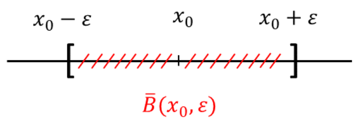
$$\overline{B}(\overrightarrow{x_0}, \varepsilon) = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \quad : \quad \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}\| \leq \varepsilon\}$$

Παραδείγματα:

1. Για $n = 1$, δηλαδή στο $\mathbb{R}$:
$i)$ Ανοικτό διάστημα :
$B(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$
$ii)$ Κλειστό διάστημα :
$\overline{B}(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leq \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon\} = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$



(α′) (i)



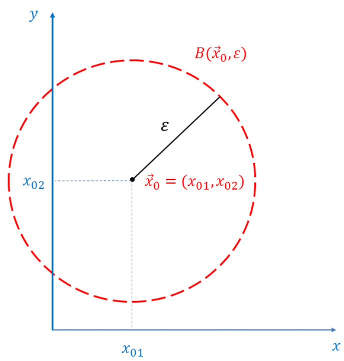
(β′) (ii)

2. Για $n = 2$, δηλαδή στο $\mathbb{R}^2$:

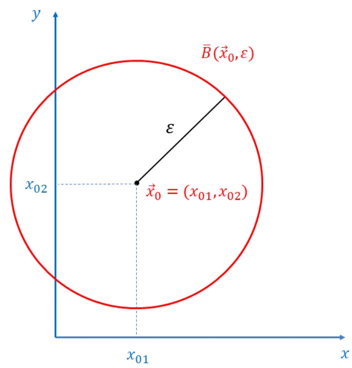
Έστω $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2)$ και $\overrightarrow{x_0} = (x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2$.
$i)$ Ανοικτή μπάλα :
$$B(\overrightarrow{x_0}, \varepsilon) = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}\| < \varepsilon\}$$
$$= \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2} < \varepsilon\}$$

ii) Κλειστή μπάλα :

$$\overline{B}(\overrightarrow{x_0}, \varepsilon) = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}\| \leq \varepsilon\}$$
$$= \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2} \leq \varepsilon\}$$



(α′) (*i*)



(β′) (*ii*)

3. Για $n = 3$, δηλαδή στο $\mathbb{R}^3$:

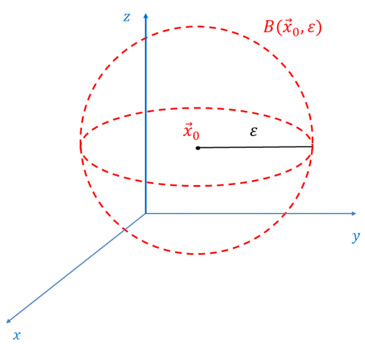
Έστω $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3)$ και $\overrightarrow{x_0} = (x_{01}, x_{02}, x_{03}) \in \mathbb{R}^3$.

i) Ανοικτή μπάλα :

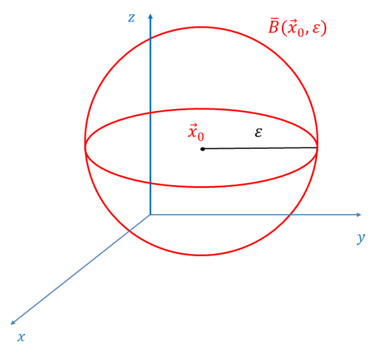
$$B(\overrightarrow{x_0}, \varepsilon) = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}\| < \varepsilon\}$$
$$= \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 + (x_3 - x_{03})^2} < \varepsilon\}$$

ii) Κλειστή μπάλα :

$$\overline{B}(\overrightarrow{x_0}, \varepsilon) = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3 : \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}\| \leq \varepsilon\}$$
$$= \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + (x_2 - x_{02})^2 + (x_3 - x_{03})^2} \leq \varepsilon\}$$



(α′) (*i*)



(β′) (*ii*)

Ανοικτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$

Ορισμός: Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ονομάζεται ανοικτό αν $\forall x \in A$, $\exists\ \varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $B(x, \varepsilon) \subseteq A$.

Δηλαδή για κάθε $x \in A$ να υπάρχει ανοικτή μπάλα με κέντρο x και ακτίνα ε που να περιέχεται στο A.

Κλειστό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$

Ορισμός: Ένα σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ονομάζεται κλειστό αν A^c είναι ανοικτό σύνολο.

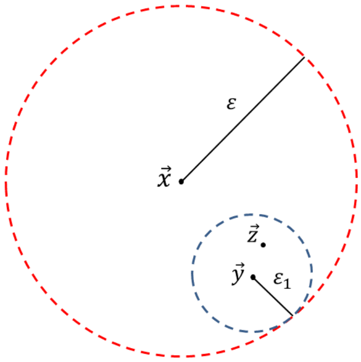
Δηλαδή αν το συμπλήρωμα του $A \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ανοικτό σύνολο.

Πρόταση:

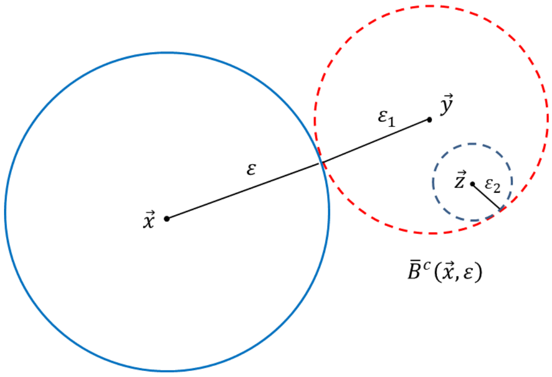
1. Η ανοικτή μπάλα $B(\overrightarrow{x}, \varepsilon)$ είναι ανοικτό σύνολο.
2. Η κλειστή μπάλα $\overline{B}(\overrightarrow{x}, \varepsilon)$ είναι κλειστό σύνολο.

Απόδειξη:
1) $\varepsilon_1 = \varepsilon - ||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}|| > 0$, με $||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}|| < \varepsilon$. Ισχύει ότι: $B(\overrightarrow{y}, \varepsilon_1) \subseteq B(\overrightarrow{x}, \varepsilon)$ καθώς αν $\overrightarrow{z} \in B(\overrightarrow{y}, \varepsilon_1) \Rightarrow ||\overrightarrow{z} - \overrightarrow{x}|| \leq ||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}|| + ||\overrightarrow{y} - \overrightarrow{z}|| \leq ||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}|| + \varepsilon_1 = \varepsilon$ $\Rightarrow \overrightarrow{z} \in B(\overrightarrow{x}, \varepsilon) \Rightarrow B(\overrightarrow{x}, \varepsilon)$ ανοικτό σύνολο.

2) Για να δειχθεί ότι το $\overline{B}(\overrightarrow{x}, \varepsilon)$ είναι κλειστό σύνολο, αρκεί να δειχθεί ότι το $\overline{B}^c(\overrightarrow{x}, \varepsilon)$ είναι ανοικτό. Για $\overrightarrow{y} \in \overline{B}^c(\overrightarrow{x}, \varepsilon)$ έχω $\varepsilon_1 = ||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}|| - \varepsilon > 0 \Rightarrow$ $B(\overrightarrow{y}, \varepsilon_1) \subseteq \overline{B}^c(\overrightarrow{x}, \varepsilon) \Rightarrow$ ανοικτό $\Rightarrow \overline{B}(\overrightarrow{x}, \varepsilon)$ κλειστό.



Σχήμα 4: (1)



Σχήμα 5: (2)

Ορθογώνιο στον $\mathbb{R}^n$

Ορισμός: Το καρτεσιανό γινόμενο $I = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$ των διαστημάτων $I_1, I_2, ..., I_n$ του $\mathbb{R}$ ονομάζεται **ορθογώνιο** του $\mathbb{R}^n$. Όταν τα μήκη των $I_1, I_2, ..., I_n$ είναι ίσα, ονομάζεται **κύβος** του $\mathbb{R}^n$.

Ανοικτό ορθογώνιο στον $\mathbb{R}^n$

Ορισμός: Έστω $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.
Ανοικτό ορθογώνιο του $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται το καρτεσιανό γινόμενο
$R^o(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n \times b_n)$ των ανοικτών διαστημάτων (a_i, b_i), με $a_i < b_i$ $(1 \leq i \leq n)$.

Αντίστοιχα:

Έστω $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.
Ανοικτός κύβος ονομάζεται το καρτεσιανό γινόμενο
$C^o(\overrightarrow{a}, \varepsilon) = (a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon) \times (a_2 - \varepsilon, a_2 + \varepsilon) \times \dots \times (a_n - \varepsilon, a_n + \varepsilon)$
των ισομηκών ανοικτών διαστημάτων $(a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon)$, $1 \leq i \leq n$.

Κλειστό ορθογώνιο στον $\mathbb{R}^n$

Ορισμός: Έστω $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$.
Κλειστό ορθογώνιο του $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται το καρτεσιανό γινόμενο
$R(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n \times b_n]$ των κλειστών διαστημάτων $[a_i, b_i]$, με $a_i < b_i$ $(1 \leq i \leq n)$.

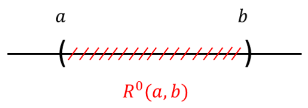
Αντίστοιχα:

Έστω $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$.
Κλειστός κύβος ονομάζεται το καρτεσιανό γινόμενο
$C(\overrightarrow{a}, \varepsilon) = [a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon] \times [a_2 - \varepsilon, a_2 + \varepsilon] \times \dots \times [a_n - \varepsilon, a_n + \varepsilon]$ των ισομηκών κλειστών διαστημάτων $[a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon]$, $1 \leq i \leq n$.

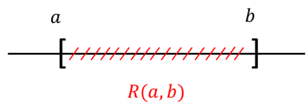
Παραδείγματα:

1. Για $n = 1$, δηλαδή στο $\mathbb{R}$:
$i)$ Ανοικτό ορθογώνιο:
$R^o(a, b) = (a, b)$ (δηλαδή το ανοικτό διάστημα).

ii) Κλειστό ορθογώνιο:
$R(a,b) = [a,b]$ (δηλαδή το κλειστό διάστημα).

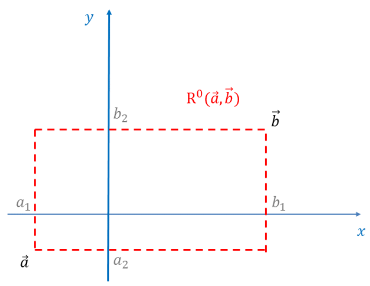


(α′) (*i*)

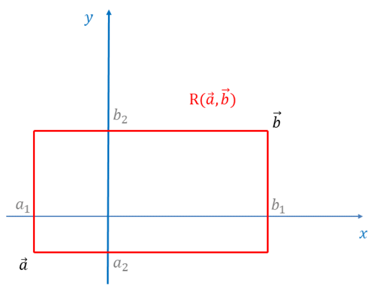


(β′) (*ii*)

2. Για $n = 2$, δηλαδή στο $\mathbb{R}^2$:
Έστω $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2)$
i) Ανοικτό ορθογώνιο:
$R^o(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2)$.
ii) Κλειστό ορθογώνιο:
$R(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$.

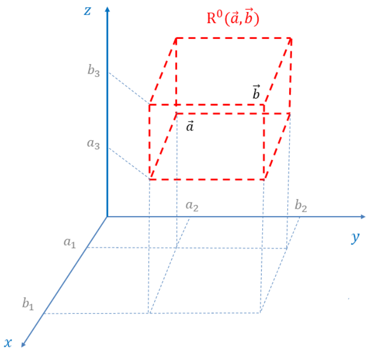


(α′) (*i*)

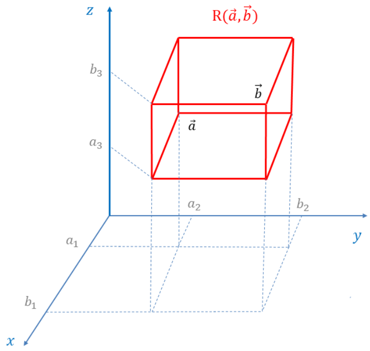


(β′) (*ii*)

3. Για $n = 3$, δηλαδή στο $\mathbb{R}^3$:
Έστω $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$
i) Ανοικτό ορθογώνιο:
$R^o(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times (a_3, b_3)$.
ii) Κλειστό ορθογώνιο:
$R(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$.



(α′) (i)



(β′) (ii)

Πρόταση:

1. Το ανοικτό ορθογώνιο $R^o(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ είναι ανοικτό σύνολο.
2. Το κλειστό ορθογώνιο $R(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ είναι κλειστό σύνολο.

Σημείο συσσώρευσης

Ορισμός: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Ένα $\overrightarrow{x_0} \in \mathbb{R}^n$ λέγεται **σημείο συσσώρευσης** (σ.σ.) του A αν

$$\forall \varepsilon > 0 \quad (B(\overrightarrow{x_0}, \varepsilon) \setminus \{\overrightarrow{x_0}\}) \cap A \neq \emptyset$$
$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \overrightarrow{a} \in A : \quad 0 < \|\overrightarrow{x_0} - \overrightarrow{a}\| < \varepsilon.$$

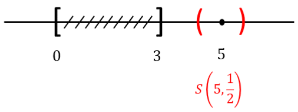
Το σύνολο των σ.σ. του A συμβολίζεται με A'.

Μεμονωμένο σημείο

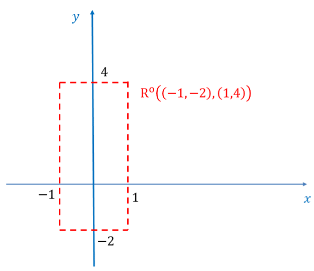
Ορισμός: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Ένα $\overrightarrow{x_0} \in A$ λέγεται **μεμονωμένο σημείο** του A αν δεν είναι σ.σ.
$\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : (B(\overrightarrow{x_0}, \varepsilon) \setminus \{\overrightarrow{x_0}\}) \cap A = \emptyset$
$\Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(\overrightarrow{x_0}, \varepsilon) \cap A = \{\overrightarrow{x_0}\}$.

Παραδείγματα:

1. Έστω $A = [0,3]$. Τότε το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του A είναι το $A' = [0,3]'$.
Ομοίως $(0,3)' = [0,3)' = (0,3]' = [0,3]$.
2. Έστω $A = [0,3] \cup \{5\}$. Τότε το σύνολο των σημείων συσσώρευσης είναι το $A' = [0,3]$ και το $\{5\}$ είναι μεμονωμένο σημείο, καθώς $\exists \varepsilon > 0$ (έστω $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ώστε $B(5, \frac{1}{2}) \cap A = \{5\}$.
3. Έστω το ανοικτό ορθογώνιο του $\mathbb{R}^2$ $R^o\left((-1,-2),(1,4)\right) = (-1,1) \times (-2,4)$. Τότε το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του R^o είναι το $R'\left((-1,-2),(1,4)\right) = [-1,1] \times [-2,4]$.



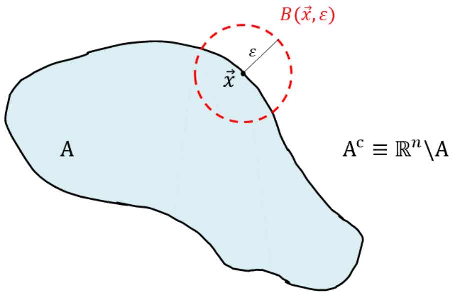
(α′) (1),(2)



(β′) (3)

Σύνορο

Ορισμός: Έστω $A \subseteq \mathbb{R}^n$. **Σύνορο** του A λέγεται το σύνολο $\partial A = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0 \quad B(\overrightarrow{x}, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ και $B(\overrightarrow{x}, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$.



Παραδείγματα:

1. Έστω το σύνολο $A = [0,3]$. Το σύνορο του A είναι το $\partial A = \partial([0,3]) = \{0,3\}$.

2. Έστω το ορθογώνιο $R^o\left((-1,-2),(1,4)\right) = (-1,1)\times(-2,4)$. Τότε το σύνορο του R^o είναι το $\partial R^o = \{(x,-2) : -1 \le x \le 1\} \cup \{(-1,y) : -2 \le y \le 4\} \cup \{(x,4) : -1 \le x \le 1\} \cup \{(1,y) : -2 \le y \le 4\}$.(Δηλαδή η περίμετρος του ορθογωνίου R^o)

3. Έστω μία μπάλα $B(x_0, \varepsilon)$. Τότε το σύνορο της είναι :
$\partial B(x_0, \varepsilon) = \{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n : \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}\| = \varepsilon\}$.

Πρόταση: Έστω $A \in \mathbb{R}^n$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:
$i)$ A κλειστό σύνολο
$ii)$ $A' \subseteq A$
$iii)$ $\partial A \subseteq A$