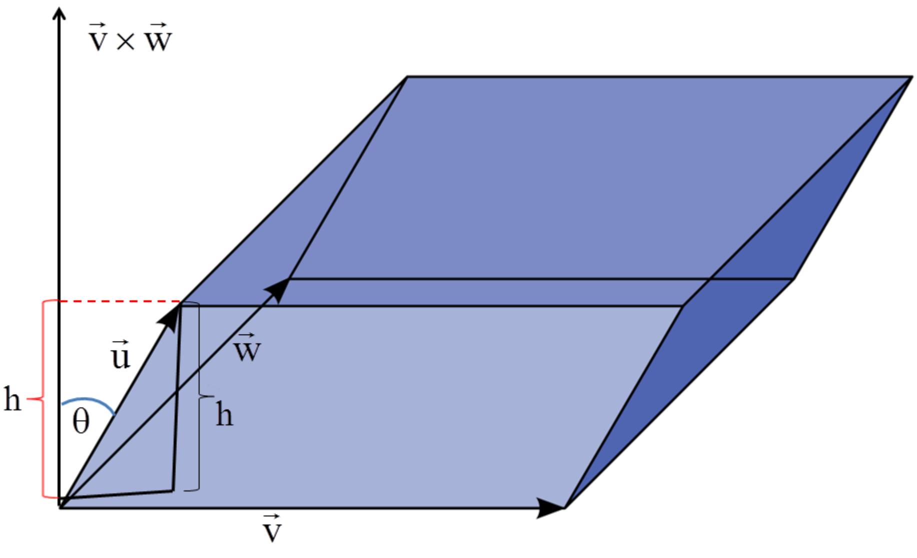
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ (ΜΕΡΟΣ 2ο)

ΜΕΙΚΤΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

1. Έστω $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ τρία μη μηδενικά και μη συνεπίπεδα διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$. Να δείξετε ότι ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που παράγεται από τα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ισούται με την απόλυτη τιμή $|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$ του τριπλού γινομένου $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$. Δηλαδή

$$V = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$$

ΛΥΣΗ



Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου Π που παράγεται από τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$ ισούται με $\|\vec{v} \times \vec{w}\|$. Δηλαδή:

$$\mathrm{E}(\Pi) = \|\vec{v} \times \vec{w}\| \qquad \text{με} \quad \Pi = \{\lambda\vec{v} + \mu\vec{w} \ , \ \lambda, \mu \in [0,1]\}$$

Επομένως ο όγκος του παραλληλεπιπέδου όπως μπορούμε να δούμε και από το σχήμα είναι:

$$\|\vec{v} \times \vec{w}\| \ h \overset{(h=\|\vec{u}\||cos\theta|)}{=\!=} \|\vec{v} \times \vec{w}\|\|\vec{u}\||cos\theta|$$

Έπεται ότι $V = \|\vec{v} \times \vec{w}\|\|\vec{u}\||cos\theta| = |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})|$.

Σημείωση:
Το ύψος η αποτελεί την αριθμητική συνιστώσα του $\overrightarrow{u}$ στο $\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}$.
Άρα:

$$h = comp_{\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}}(\overrightarrow{u}) = \frac{\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w})}{\|\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}\|} = \frac{\|\overrightarrow{u}\|\cancel{\|\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}\|}cos\theta}{\cancel{\|\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}\|}} = \|\overrightarrow{u}\|cos\theta$$

2. Να δείξετε ότι $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ είναι συνεπίπεδα αν και μόνο αν ισχύει $\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}) = 0$

ΛΥΣΗ

$(\Longrightarrow)$

Έστω $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ συνεπίπεδα, τότε $\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}$ κάθετο στο επίπεδο στο οποίο βρίσκονται τα $\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ άρα και στο $\overrightarrow{u}$ αφού συνεπίπεδα.
Επομένως $\overrightarrow{u}\perp(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}) \Rightarrow \overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}) = 0$.

$(\Longleftarrow)$

Έστω ότι ισχύει $\overrightarrow{u}\cdot(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w}) = 0$.
Επομένως $\overrightarrow{u}\perp(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w})$.
Επιπλέον $(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w})\perp\overrightarrow{v}$ και $(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w})\perp\overrightarrow{w}$.
Άρα:

$$\left.\begin{array}{l}(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w})\perp\overrightarrow{u}\\(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w})\perp\overrightarrow{v}\\(\overrightarrow{v}\times\overrightarrow{w})\perp\overrightarrow{w}\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \text{ συνεπίπεδα.}$$

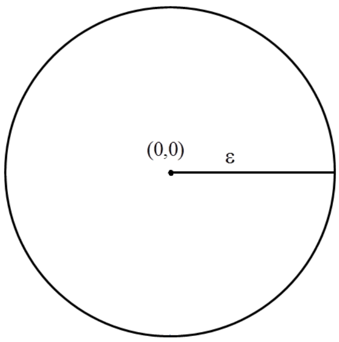
ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ

3. Να δοθούν ορισμένα παραδείγματα παραμετρικών καμπυλών στο $\mathbb{R}^2$

ΛΥΣΗ

I) Κύκλος με κέντρο $(0,0)$ και ακτίνα $\varepsilon > 0$

Αναλυτική : $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$
Καρτεσιανή : $y = \sqrt{\varepsilon^2 - x^2}$, $\quad x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$
Παραμετρική : $\overrightarrow{r}(t) = (\varepsilon cost, \varepsilon sint)$, $\quad t \in [0, 2\pi]$

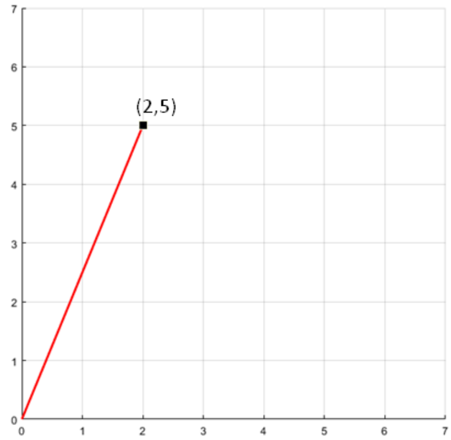


II) Ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το (0,0) με το (2,5)

Αναλυτική : $2y - 5x = 0$

Καρτεσιανή : $y = \dfrac{5}{2}x$

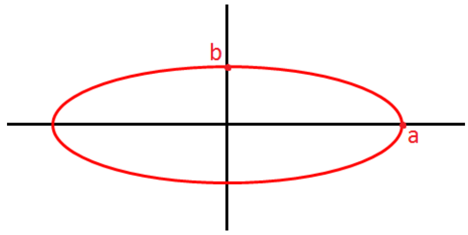
Παραμετρική : $\overrightarrow{r}(t) = (2t, 5t) \;\;, \quad t \in [0, 1]$



III) Έλλειψη με ημιάξονες a και b.

Αναλυτική : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Παραμετρική : $\overrightarrow{r}(t) = (acost, bsint) \;\;, \quad t \in [0, 2\pi]$

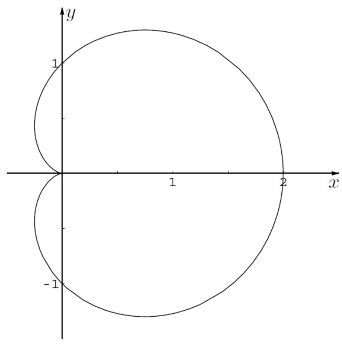


IV) Καρδιοειδές.

(a η ακτίνα των δύο κύκλων που το παράγουν.

Καρτεσιανή : $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)$

Παραμετρική : $\overrightarrow{r}(t) = (a(2cost - cos(2t)), a(2sint - sin(2t))) \;\;, \quad t \in [0, 2\pi]$



4. Να δοθούν ορισμένα παραδείγματα παραμετρικών καμπυλών στο $\mathbb{R}^3$

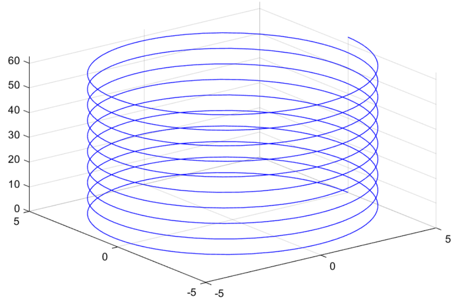
ΛΥΣΗ

I) Έλικα ακτίνας ε

Παραμετρική : $\overrightarrow{r}(t) = (\varepsilon cost, \varepsilon sint, t) \;\;, \quad t \in [0, 2\pi]$

$\overrightarrow{p}(t) = (\varepsilon cos(kt), \varepsilon sin(kt), kt) \;\;,$

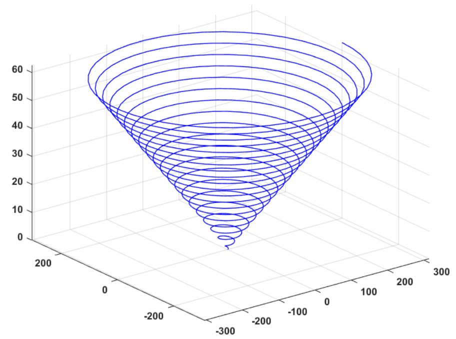
$t \in [0, \dfrac{2\pi}{k}], k \neq 0$



$\varepsilon = 5, \; t \in [0, 20\pi]$

II) Κωνική σπείρα.

(συχνότητα a, ακτίνα ε.)
Παραμετρική : $\overrightarrow{r}(t) = (t\varepsilon cos(at), t\varepsilon sin(at), t)$, $t \in [0, 2\pi]$

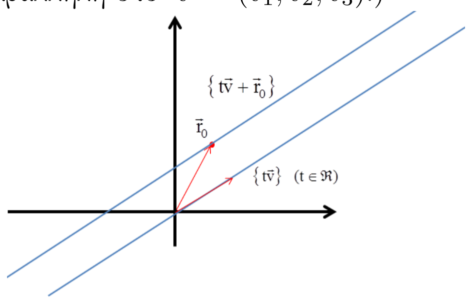


$a = 2$, $\varepsilon = 5$

III) Ευθεία

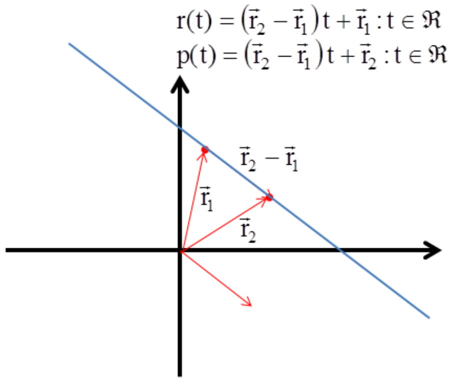
(1. που διέρχεται απ'το σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και είναι παράλληλη στο $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$.)

$\overrightarrow{r_0} = \overrightarrow{OP_0} = (x_0, y_0, z_0)$ διάνυσμα θέσης του P_0.
Παραμετρική : $\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{r_0} + t\overrightarrow{v}$, $t \in \mathbb{R}$



(2. που διέρχεται από δύο σημεία $A(x_1, y_1, z_1)$ και $B(x_2, y_2, z_2)$.)
Θεωρούμε τα διανύσματα θέσης $\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{OP_1}$ και $\overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{OP_2}$. Το διάνυσμα $\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$ αντιστοιχεί στο $\overrightarrow{v}$ από πριν. Επομένως:

Παραμετρική : $\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{r_1} + (\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1})t$, $t \in \mathbb{R}$
$\overrightarrow{p}(t) = \overrightarrow{r_2} + (\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_2})t$, $t \in \mathbb{R}$.



IV) Ευθύγραμμο τμήμα

Βάσει της παραμέτρησης της ευθείας και παίρνωντας το $t \in [0, 1]$ έχουμε ότι:
Έστω A και B δύο σημεία με διανύσματα θέσης $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB}$.
Το ευθύγραμμο τμήμα $\overline{AB}$ δίνεται από:

$$\overline{AB} = \{\overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a})t : \ t \in [0, 1]\}$$

Σημείωση:

Μία καμπύλη μπορεί να έχει περισσότερες από μία παραμετρικές αναπαραστάσεις.

5. Να δείξετε ότι η ευθεία L_1 που διέρχεται από τα σημεία $A(2,-1,-5)$ και $B(8,8,7)$ είναι παράλληλη της L_2 που διέρχεται από τα σημεία $C(4,2,-6)$ και $D(8,8,2)$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τα διανύσματα θέσης:
$\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{OA} = (2,-1,-5)$
$\overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{OB} = (8,8,7)$
$\overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{OC} = (4,2,-6)$
$\overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{OD} = (8,8,2)$
Οι παραμετρήσεις των δύο ευθειών είναι:
$\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{r_1} + (\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1})t = (2,-1,-5) + (6,9,12)t$
$\overrightarrow{p}(t) = \overrightarrow{p_1} + (\overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1})t = (4,2,-6) + (4,6,8)t$
Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $(6,9,12) \parallel (4,6,8)$:

$$\left.\begin{array}{l} (6,9,12)\cdot(4,6,8) = 24+54+96 = 174 \\ \|(6,9,12)\| = \sqrt{36+81+144} = \sqrt{261} \\ \|(4,6,8)\| = \sqrt{16+36+64} = \sqrt{116} \\ \|(6,9,12)\|\|(4,6,8)\| = 174 = (6,9,12)\cdot(4,6,8) \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = 0 \Rightarrow (6,9,12) \parallel (4,6,8).$$

6. Να δείξετε ότι η ευθεία L_1 που διέρχεται από τα σημεία $A(0,1,1)$ και $B(1,-1,6)$ είναι κάθετη της L_2 που διέρχεται από τα σημεία $C(-4,2,1)$ και $D(-1,6,2)$.

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε τα διανύσματα θέσης:
$\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{OA} = (0,1,1)$
$\overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{OB} = (1,-1,6)$
$\overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{OC} = (-4,2,1)$
$\overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{OD} = (-1,6,2)$
Οι παραμετρήσεις των δύο ευθειών είναι:
$\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{r_1} + (\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1})t = (0,1,1) + (1,-2,5)t$
$\overrightarrow{p}(t) = \overrightarrow{p_1} + (\overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1})t = (-4,2,1) + (3,4,1)t$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $(1,-2,5)\perp(3,4,1)$:

$$(1,-2,5)\cdot(3,4,1) = 3-8+5 = 0 \Longrightarrow (1,-2,5)\perp(3,4,1).$$