<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>

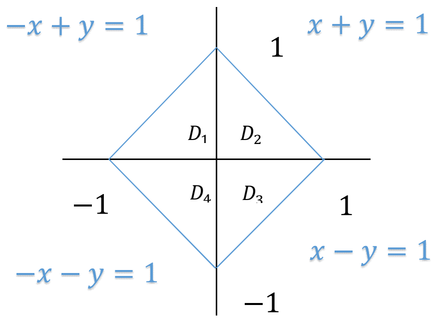
Να βρεθεί το:

$$\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy$$

όπου $D = \{(x,y) \in \Re^2 : |x| + |y| \leq 1\}$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

Χαράζουμε τη γραφική παράσταση της $|x| + |y| \leq 1$, η οποία φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Τον παραπάνω ρόμβο, τον χωρίζουμε σε 4 σύνολα:

$$D_1 = \{(x,y) \in \Re^2 : -1 \leq x \leq 0 \text{ και } 0 \leq y \leq x+1\}$$

$$D_2 = \{(x,y) \in \Re^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ και } 0 \leq y \leq 1-x\}$$

$$D_3 = \{(x,y) \in \Re^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ και } x-1 \leq y \leq 0\}$$

$$D_4 = \{(x,y) \in \Re^2 : -1 \leq x \leq 0 \text{ και } -x-1 \leq y \leq 0\}$$

Έχουμε:

$$\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{4} \iint_{D_i} e^{x+y}\,dx\,dy$$

Υπολογίζουμε τα επιμέρους ολοκληρώματα:

$$\iint_{D_1} e^{x+y}\,dx\,dy = \int_{-1}^{0}\int_{0}^{x+1} e^{x+y}\,dy\,dx = \int_{-1}^{0}\left[e^{x+y}\right]_{0}^{x+1}dx =$$

$$\int_{-1}^{0}\left(e^{2x+1}-e^{x}\right)dx = \left[\frac{e^{2x+1}}{2}-e^{x}\right]_{-1}^{0} = \frac{e}{2}+\frac{1}{2e}-1$$

$$\iint_{D_2} e^{x+y}\,dx\,dy = \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-x} e^{x+y}\,dy\,dx = \int_{0}^{1}\left[e^{x+y}\right]_{0}^{1-x}dx =$$

$$\int_{0}^{1}\left(e-e^{x}\right)dx = \left[ex-e^{x}\right]_{0}^{1} = 1$$

$$\iint_{D_3} e^{x+y}\,dx\,dy = \int_{0}^{1}\int_{x-1}^{0} e^{x+y}\,dy\,dx = \int_{0}^{1}\left[e^{x+y}\right]_{x-1}^{0}dx =$$

$$\int_{0}^{1}\left(e^{x}-e^{2x-1}\right)dx = \left[e^{x}-\frac{e^{2x-1}}{2}\right]_{0}^{1} = \frac{e}{2}+\frac{1}{2e}-1$$

$$\iint_{D_4} e^{x+y}\,dx\,dy = \int_{-1}^{0}\int_{-x-1}^{0} e^{x+y}\,dy\,dx = \int_{-1}^{0}\left[e^{x+y}\right]_{-x-1}^{0}dx$$

$$= \int_{-1}^{0}\left(e^{x}-\frac{1}{e}\right)dx = \left[e^{x}-\frac{x}{e}\right]_{-1}^{0} = 1$$

Τελικά,

$$\iint_D e^{x+y}\,dx\,dy = e + \frac{1}{e}$$

Τρίτη 13 Νοεμβρίου 2018,

ΦΡΑΓΚΟΥΛΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ-ΜΑΡΙΟΣ