<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>

Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$\oint_{(1,1,0)}^{(x,y,z)} y\,dx + (x + e^z)\,dy + ye^z\,dz$$

<u>ΛΥΣΗ</u>

Έστω $\vec{F}(x,y,z) = (y, x + e^z, ye^z)$. Αναζητούμε $\varphi: \Re^3 \to \Re$, παραγωγίσιμη, τέτοια ώστε:

$$\nabla\varphi(x,y,z) = \vec{F}(x,y,z), \forall (x,y,z) \in \Re^3.$$

Έτσι, προκύπτει το διαφορικό σύστημα:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial x} = y \\ \dfrac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial y} = x + e^z \\ \dfrac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial z} = ye^z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi(x,y,z) = xy + h_1(y,z)\ (\mathbf{1}) \\ \varphi(x,y,z) = xy + ye^z + h_2(x,z)\ (\mathbf{2}) \\ \dfrac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial z} = ye^z\ (\mathbf{3}) \end{cases}$$

Από τις $(\mathbf{1}), (\mathbf{2})$ έχουμε:

$$\begin{aligned} h_1(y,z) = ye^z + h_2(x,z) \Rightarrow \frac{d\big(h_1(y,z)\big)}{dx} \\ = \frac{d\big(ye^z + h_2(x,z)\big)}{dx} \Rightarrow \frac{dh_2(x,z)}{dx} = 0 \Rightarrow h_2(x,z) \\ = h_2(z), \end{aligned}$$

δηλαδή η h_2 είναι ανεξάρτητη του x.

Από την $(\mathbf{3})$ έχουμε:

$$\frac{\partial \varphi(x,y,z)}{\partial z} = ye^z \Rightarrow \frac{\partial\big(xy + ye^z + h_2(z)\big)}{\partial z} \Rightarrow \frac{dh_2(z)}{dz} = 0$$
$$\Rightarrow h_2 \text{ σταθερή}$$

Τελικά για όλες τις συναρτήσεις $\varphi_c : \Re^3 \to \Re$, με:

$$\varphi_c(x,y,z) = xy + ye^z + c$$

ισχύει $\nabla\varphi_c(x,y,z) = \vec{F}(x,y,z), \forall (x,y,z) \in \Re^3$.

Για $c = 0$ και από γνωστό πόρισμα προκύπτει:

$$\oint_{(1,1,0)}^{(x,y,z)} y\,dx + (x + e^z)\,dy + ye^z\,dz = \varphi_0(x,y,z) - \varphi_0(1,1,0)$$
$$= xy + ye^z - 2$$

Τρίτη 4 Δεκεμβρίου 2018,

ΦΡΑΓΚΟΥΛΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ- ΜΑΡΙΟΣ