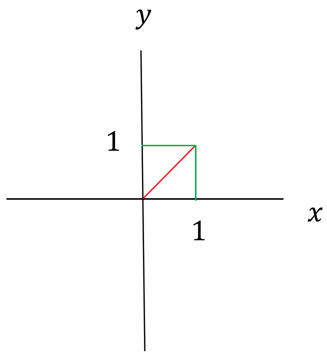
ΑΣΚΗΣΗ

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_1^3 \int_0^1 \int_y^1 z\sin(x^2)\,dx\,dy\,dz$$

ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι ο υπολογισμός του παραπάνω ολοκληρώματος είναι δύσκολος, αφού δεν μπορεί να βρεθεί παράγουσα της συνάρτησης $z\sin(x^2)$ ως προς x. Ακόμα, ισχύει ότι $y \le x \le 1$ και $0 \le y \le 1$. Οι σχέσεις αυτές περιγράφονται στο παρακάτω σχήμα:



Με τη βοήθεια του σχήματος, μπορούμε να γράψουμε το σύνολο $D = \{x, y\colon\ 0 \le y \le 1$ και $y \le x \le 1\}$ σαν x −απλό, δηλαδή $D = \{x, y\colon\ 0 \le x \le 1$ και $0 \le y \le x\}$. Οπότε, έχουμε:

$$\int_1^3 \int_0^1 \int_y^1 z\sin(x^2)\,dx\,dy\,dz = \int_1^3 \int_0^1 \int_0^x z\sin(x^2)\,dy\,dx\,dz =$$

$$\int_1^3 \int_0^1 [z\sin(x^2)\,y]_0^x\,dx\,dz = \int_1^3 \int_0^1 zx\sin(x^2)\,dx\,dz =$$

$$\int_1^3 -z\left[\frac{\cos(x^2)}{2}\right]_0^1 dz = \int_1^3 \left(\frac{1-\cos 1}{2}\right) z dz =$$

$$\left[\left(\frac{1-\cos 1}{4}\right) z^2\right]_1^3 = 2 - 2\cos 1.$$

Πέμπτη 22 Νοεμβρίου 2018,

ΦΡΑΓΚΟΥΛΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ-ΜΑΡΙΟΣ