ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΤΗΣ 2/11/2018

**1.**

**i.** Έστω $\vec{x} = (x_0, y_0) \in \Re^2$.
Αν $\vec{x} \neq \vec{0}$ η συνάρτηση $f$ στο σημείο $\vec{x}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών.
Αν $\vec{x} = \vec{0}$ θα εξετάσουμε αν $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} f(\vec{h}) = f(\vec{0}) = 0$.
Αν $\vec{h} = (h_1, h_2)$ έχουμε:

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} f(\vec{h}) = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{3{h_1}^2 - {h_2}^2}{{h_1}^2 + 3{h_2}^2}.$$

Έστω $g(h_1, h_2) = \frac{3{h_1}^2 - {h_2}^2}{{h_1}^2 + 3{h_2}^2}$. Παρατηρούμε ότι:

$$g(h_1, 0) = \frac{3{h_1}^2}{{h_1}^2} = 3$$

$$g(h_1, h_1) = \frac{2{h_1}^2}{4{h_1}^2} = \frac{1}{2}$$

Επομένως, $\nexists \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} g(h_1, h_2)$. Άρα η $f$ δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$. Τελικά, συνάρτηση $f$ δεν είναι συνεχής.

**ii.** Έστω $\vec{x} = (x_0, y_0) \in \Re^2$.
Αν $\vec{x} \neq \vec{0}$ η συνάρτηση $f$ στο σημείο $\vec{x}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών.
Αν $\vec{x} = \vec{0}$ θα εξετάσουμε αν $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} f(\vec{h}) = f(\vec{0}) = 0$.
Αν $\vec{h} = (h_1, h_2)$ έχουμε:

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} f(\vec{h}) = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1 {h_2}^2}{{h_1}^2 + 2{h_2}^4}.$$

Έστω $g(h_1,h_2) = \frac{h_1 {h_2}^2}{{h_1}^2+2{h_2}^4}$. Παρατηρούμε ότι:

$$g(0,h_2) = 0$$
$$g({h_2}^2,h_2) = \frac{{h_2}^4}{3{h_2}^4} = \frac{1}{3}$$

Επομένως, $\nexists \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} g(h_1,h_2)$. Άρα η $f$ δεν είναι συνεχής στο (0,0). Τελικά, συνάρτηση $f$ δεν είναι συνεχής.

**iii.** Έστω $\vec{x} = (x_0,y_0) \in \Re^2$.
Αν $\vec{x} \neq \vec{0}$ η συνάρτηση $f$ στο σημείο $\vec{x}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών.
Αν $\vec{x} = \vec{0}$ θα εξετάσουμε αν $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} f(\vec{h}) = f(\vec{0}) = 0$.
Αν $\vec{h} = (h_1,h_2)$ έχουμε:

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} f(\vec{h}) = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1 h_2}{\sqrt{{h_1}^2 + {h_2}^2}}.$$

Θα αποδείξουμε ότι:

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} f(\vec{h}) = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \colon \forall\vec{h} = (h_1,h_2)$$

$$\mu\varepsilon\ 0 < \|\vec{h}\| < \delta \Rightarrow \left|\frac{h_1 h_2}{\sqrt{{h_1}^2 + {h_2}^2}}\right| < \varepsilon$$

Έστω $\varepsilon > 0$ και $\delta = \varepsilon$. Έχουμε:

$$\left|\frac{h_1 h_2}{\sqrt{{h_1}^2 + {h_2}^2}}\right| \leq \frac{\sqrt{{h_1}^2 + {h_2}^2}\sqrt{{h_1}^2 + {h_2}^2}}{\sqrt{{h_1}^2 + {h_2}^2}} \leq \sqrt{{h_1}^2 + {h_2}^2}$$

$$= \left\|\vec{h}\,\right\| < \delta = \varepsilon,$$

αφού $h_i \leq \sqrt{{h_1}^2 + {h_2}^2}, i \in \{1,2\}$.

**iv.** Έστω $\vec{x} = (x_0, y_0) \in \Re^2$.

Αν $\vec{x} \neq \vec{0}$ η συνάρτηση $f$ στο σημείο $\vec{x}$ είναι συνεχής ως γινόμενο συνεχών.

Αν $\vec{x} = \vec{0}$ θα εξετάσουμε αν $\lim\limits_{\vec{h}\to\vec{0}} f(\vec{h}) = f(\vec{0}) = 0$.

Αν $\vec{h} = (h_1, h_2)$ έχουμε:

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} f(\vec{h}) = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \left({h_1}^2 + {h_2}^2\right) \sin\left(\frac{1}{{h_1}^2 + {h_2}^2}\right).$$

Θα αποδείξουμε ότι:

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} f(\vec{h}) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall \vec{h} = (h_1, h_2)$$

$$\mu\varepsilon\ 0 < \|\vec{h}\| < \delta \Rightarrow \left|\left({h_1}^2 + {h_2}^2\right) \sin\left(\frac{1}{{h_1}^2 + {h_2}^2}\right)\right| < \varepsilon$$

Έστω $\varepsilon > 0$ και $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Έχουμε:

$$\left|\left({h_1}^2 + {h_2}^2\right) \sin\left(\frac{1}{{h_1}^2 + {h_2}^2}\right)\right| \leq \left|{h_1}^2 + {h_2}^2\right| \cdot 1$$

$$= \left(\sqrt{{h_1}^2 + {h_2}^2}\right)^2 = \left\|\vec{h}\,\right\|^2 < \delta^2 = \varepsilon.$$

Επομένως, η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $(0,0)$, οπότε η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής.

**v.** Έστω $\vec{x} = (x_0, y_0) \in \Re^2$.
Αν $\vec{x} \neq \vec{0}$ η συνάρτηση $f$ στο σημείο $\vec{x}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών.
Αν $\vec{x} = \vec{0}$ θα εξετάσουμε αν $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} f(\vec{h}) = f(\vec{0}) = 0$.
Αν $\vec{h} = (h_1, h_2)$ έχουμε:

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} f(\vec{h}) = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1 h_2 ({h_1}^2 - {h_2}^2)}{{h_1}^2 + {h_2}^2}.$$

Θα αποδείξουμε ότι:

$$\lim_{\vec{h}\to\vec{0}} f(\vec{h}) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \vec{h} = (h_1, h_2)$$

$$\mu\varepsilon\ 0 < \|\vec{h}\| < \delta \Rightarrow \left| \frac{h_1 h_2 ({h_1}^2 - {h_2}^2)}{{h_1}^2 + {h_2}^2} \right| < \varepsilon$$

Έστω $\varepsilon > 0$ και $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}\left| \frac{h_1 h_2 ({h_1}^2 - {h_2}^2)}{{h_1}^2 + {h_2}^2} \right| &= \frac{|h_1 h_2| \left|{h_1}^2 - {h_2}^2\right|}{{h_1}^2 + {h_2}^2} \\ &\leq \frac{|h_1 h_2| \left|{h_1}^2 + {h_2}^2\right|}{{h_1}^2 + {h_2}^2} \\ &\leq \sqrt{{h_1}^2 + {h_2}^2} \sqrt{{h_1}^2 + {h_2}^2} = \|\vec{h}\|^2 < \delta^2 = \varepsilon,\end{aligned}$$

αφού $\left|{h_1}^2 - {h_2}^2\right| \leq {h_1}^2 + {h_2}^2$.
Επομένως, η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $(0,0)$, οπότε η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής.

**vi.** Έστω $\vec{x} = (x_0, y_0) \in \Re^2$.

Αν $\vec{x} \neq \vec{0}$ η συνάρτηση $f$ στο σημείο $\vec{x}$ είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών.

Αν $\vec{x} = \vec{0}$ θα εξετάσουμε αν $\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} f(\vec{h}) = f(\vec{0}) = 0$.

Αν $\vec{h} = (h_1, h_2)$ έχουμε:

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} f(\vec{h}) = \lim_{(h_1,h_2) \to (0,0)} \frac{h_1 h_2 \sqrt[3]{h_2}}{{h_1}^2 + {h_2}^2}.$$

Θα αποδείξουμε ότι:

$$\lim_{\vec{h} \to \vec{0}} f(\vec{h}) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \vec{h} = (h_1, h_2)$$

$$\mu\varepsilon\ 0 < \|\vec{h}\| < \delta \Rightarrow \left| \frac{h_1 h_2 \sqrt[3]{h_2}}{{h_1}^2 + {h_2}^2} \right| < \varepsilon$$

Έστω $\varepsilon > 0$ και $\delta = \varepsilon^3$. Έχουμε:

$$\left| \frac{h_1 h_2 \sqrt[3]{h_2}}{{h_1}^2 + {h_2}^2} \right| \leq \frac{\sqrt{{h_1}^2 + {h_2}^2}\sqrt{{h_1}^2 + {h_2}^2}\sqrt[3]{h_2}}{{h_1}^2 + {h_2}^2} = \sqrt[3]{h_2}$$

$$\leq \sqrt[3]{\sqrt{{h_1}^2 + {h_2}^2}} = \sqrt[3]{\|\vec{h}\|} < \sqrt[3]{\delta} = \varepsilon.$$

Επομένως, η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής στο $(0,0)$, οπότε η συνάρτηση $f$ είναι συνεχής.

**2.**

$$f_1(x, y) = xy^2 \text{ και } f_2(x, y) = ye^{x^2}.$$

Οι συναρτήσεις $f_1, f_2$ είναι παραγωγίσιμες, με:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x, y) = y^2$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = 2xy$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y) = 2xye^{x^2}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y) = e^{x^2}$$

Οπότε:

$$\Im\vec{f}(0,1) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,1) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,1) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**3.**

**i.** Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη, με:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^{xy}\sin^2 x + e^{xy}2\sin x\cos x = e^{xy}(y\sin^2 x + \sin 2x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^{xy}\sin^2 x$$

Οι συναρτήσεις $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ είναι παραγωγίσιμες, με:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = ye^{xy}(y\sin^2 x + \sin 2x) + e^{xy}(y\sin 2x + 2\cos 2x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^2 e^{xy}\sin^2 x$$

**ii.** Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη, με:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\ln(1+y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2\ln(1+y^2) + \frac{2y(x^2+y^3)}{(1+y^2)}$$

Οι συναρτήσεις $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ είναι παραγωγίσιμες, με:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2\ln(1+y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y\ln(1+y^2) + \frac{6y^3}{1+y^2} + \frac{4y^5 - 2x^2y^2 + 8y^3 + 2x^2}{(1+y^2)^2}$$

**4.**

**i.** Η συνάρτηση $f(x,y,z) = \sin(xy)\cos z^2$ είναι παραγωγίσιμη, με:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -2z\sin z^2 \sin(xy)$$

Η συνάρτηση $\frac{\partial f}{\partial z}$ είναι παραγωγίσιμη, με:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = -2yz\sin z^2 \cos(xy)$$

Η συνάρτηση $f(x,y,z) = x^{y+z}$ είναι παραγωγίσιμη, με:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = x^{y+z}\ln x$$

Η συνάρτηση $\frac{\partial f}{\partial z}$ είναι παραγωγίσιμη, με:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = (y+z)x^{y+z-1}\ln x + x^{y+z-1}$$

**ii.** Η συνάρτηση $f(x,y,z) = z^2 \tan^{-1}(xy)$ είναι παραγωγίσιμη, με:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{xz^2}{x^2y^2+1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2\tan^{-1}(xy)\,z$$

Οι συναρτήσεις $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ είναι παραγωγίσιμες, με:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{z^2(x^2y^2+1) - 2y^2x^2z^2}{(x^2y^2+1)^2} = \frac{z^2 - x^2y^2z^2}{(x^2y^2+1)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2\tan^{-1}(xy)$$

Η συνάρτηση $f(x,y,z) = ze^{x+y+z}$ είναι παραγωγίσιμη, με:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = ze^{x+y+z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = (z+1)e^{x+y+z}$$

Οι συναρτήσεις $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ είναι παραγωγίσιμες, με:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = ze^{x+y+z}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = (z+2)e^{x+y+z}$$

**5.**

Έστω $f_1(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Η συνάρτηση $f_1$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο (0,0), με:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_1\big((0,0)+h(1,0)\big)-f_1(0,0)}{h}=0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_1\big((0,0)+h(0,1)\big)-f_1(0,0)}{h}=0$$

Αν $\vec{h}=(h_1,h_2)$ τότε:

$$\nabla f_1(0,0)\cdot\vec{h}=(0,0)\cdot(h_1,h_2)=0$$

Θα εξετάσουμε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{\vec{h}\to 0}\frac{\left|f_1\big(\vec{0}+\vec{h}\big)-f_1(0,0)-\nabla f_1(0,0)\cdot\vec{h}\right|}{\left\|\vec{h}\right\|}$$

$$=\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{|h_1h_2|}{{h_1}^2+{h_2}^2}$$

Έστω $g(h_1,h_2)=\frac{|h_1h_2|}{{h_1}^2+{h_2}^2}$. Παρατηρούμε ότι:

$$g(h_1,0)=0$$

$$g(h_1,h_1)=\frac{{h_1}^2}{2{h_1}^2}=\frac{1}{2}$$

Επομένως, $\nexists \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} g(h_1,h_2)$. Άρα η συνάρτηση $f_1$ δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο (0,0), οπότε ούτε και η $\vec{f}$.

**6.**

$$f: A \to \Re^3, A = \{(x, y, z) \in \Re^3 : x, y \text{ και } z \neq 0\}$$

Έστω $(x_0, y_0, z_0) \in A$. Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη στη $B\big((x_0, y_0, z_0), \delta\big)$, $\delta > 0$, με:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{1}{y} - \frac{z}{x^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{y_0} - \frac{z_0}{{x_0}^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -\frac{x}{y^2} + \frac{1}{z} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = -\frac{x_0}{{y_0}^2} + \frac{1}{z_0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -\frac{y}{z^2} + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = -\frac{y_0}{{z_0}^2} + \frac{1}{x_0}$$

Παρατηρούμε ότι οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς στο σημείο $(x_0, y_0, z_0)$. Επομένως, η συνάρτηση $f$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο αυτό. Από θεώρημα, η παράγωγος κατά κατεύθυνση $\vec{\alpha} = (1,2,-1)$ είναι η:

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0, z_0) = \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{u},$$

αφού η $f$ είναι διαφορίσιμη στο $(x_0, y_0, z_0)$ και $\vec{u} = \frac{\vec{\alpha}}{\|\vec{\alpha}\|}$. Έτσι η κατευθυνόμενη παράγωγος ισούται:

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{1}{y_0} - \frac{z_0}{{x_0}^2}, -\frac{x_0}{{y_0}^2} + \frac{1}{z_0}, -\frac{y_0}{{z_0}^2} + \frac{1}{x_0}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$
$$= -\frac{\sqrt{6}x_o + \sqrt{6}z_0}{6{x_0}^2} + \frac{\sqrt{6}y_0 - 2\sqrt{6}x_0}{6{y_0}^2} + \frac{2\sqrt{6}z_0 + \sqrt{6}y_0}{6{z_0}^2}$$

**7.**

Η συνάρτηση $f$ είναι παραγωγίσιμη, με:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xz + z^3 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,2,0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = e^z \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,2,0) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = x^2 + ye^z + 3xz^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(1,2,0) = 3$$

Ακόμα, $\nabla f(1,2,0) = (0,1,3\ )$. Επομένως, έχουμε:

- Μέγιστη τιμή $max = \|\nabla f(1,2,0)\| = \sqrt{10}$
- Ελάχιστη τιμή $min = -\|\nabla f(1,2,0)\| = -\sqrt{10}$
- Κατεύθυνση μέγιστης τιμής

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(1,2,0)}{\|\nabla f(1,2,0)\|} = \left(0, \frac{\sqrt{10}}{10}, \frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$$

- Κατεύθυνση ελάχιστης τιμής

$$\vec{u} = -\frac{\nabla f(1,2,0)}{\|\nabla f(1,2,0)\|} = \left(0, -\frac{\sqrt{10}}{10}, -\frac{3\sqrt{10}}{10}\right)$$

**8.**

<u>Α΄ ΤΡΟΠΟΣ(Μέσω Εσσιανού Πίνακα):</u>

**i.** Η $f$ είναι παραγωγίσιμη, με:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 12x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$$

Άρα, $\nabla f(x,y) = (3x^2 - 12x, 2y\ )$. Λύνουμε:

$$\nabla f(x,y) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 12x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή } x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$$

Επομένως, εξετάζουμε τα σημεία (0,0) και (4,0).

Βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x - 12$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial(3x^2 - 12x)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial(2)}{\partial x} = 0$$

Θα βρούμε τον Εσσιανό πίνακα για κάθε ένα από τα παραπάνω σημεία και υπολογίζουμε τις αντίστοιχες ορίζουσες:

Για το (0,0) έχουμε:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -12 < 0$$

$$\Delta_2 = det Hf(0,0) = -24 < 0$$

Οπότε το (0,0) είναι σαγματικό σημείο της συνάρτησης $f$.

Για το $(4,0)$ έχουμε:

$$Hf(4,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(4,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(4,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(4,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(4,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(4,0) = 12 > 0$$

$$\Delta_2 = detHf(4,0) = 24 > 0$$

Επομένως το σημείο $(4,0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης $f$.

**ii.** Η $f$ είναι παραγωγίσιμη, με:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + x^2$$

Άρα, $\nabla f(x,y) = (2x + 2xy, 2y + x^2)$. Λύνουμε:

$$\nabla f(x,y) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2xy = 0 \\ 2y + x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή } y = -1 \\ 2y + x^2 = 0 \end{cases}$$

Για $x = 0$ η εξίσωση $2y + x^2 = 0$ γράφεται $y = 0$.

Για $y = -1$ η εξίσωση $2y + x^2 = 0$ γράφεται $x = -\sqrt{2}$ ή

$x = \sqrt{2}$.

Επομένως, εξετάζουμε τα σημεία $(0,0)$, $\left(-\sqrt{2}, -1\right)$ και $\left(\sqrt{2}, -1\right)$.

Βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 + 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial(2x + 2xy)}{\partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial(2y + x^2)}{\partial x} = 2x$$

Θα βρούμε τον Εσσιανό πίνακα για κάθε ένα από τα παραπάνω σημεία και υπολογίζουμε τις αντίστοιχες ορίζουσες:

Για το (0,0) έχουμε:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0$$

$$\Delta_2 = detHf(0,0) = 4 > 0$$

Οπότε το σημείο (0,0) είναι τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης $f$.

Για το $\left(-\sqrt{2},-1\right)$ έχουμε:

$$Hf\left(-\sqrt{2},-1\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\sqrt{2},-1\right) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(-\sqrt{2},-1\right)\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(-\sqrt{2},-1\right) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(-\sqrt{2},-1\right)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & -2\sqrt{2}\\ -2\sqrt{2} & 2\end{pmatrix}$$

$$\Delta_1=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-\sqrt{2},-1\right)=0$$

$$\Delta_2=detHf\left(-\sqrt{2},-1\right)=-8<0$$

Οπότε το $\left(-\sqrt{2},-1\right)$ είναι σαγματικό σημείο της συνάρτησης $f$.

Για το $\left(\sqrt{2},-1\right)$ έχουμε:

$$Hf\left(\sqrt{2},-1\right)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\sqrt{2},-1\right) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\left(\sqrt{2},-1\right)\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\left(\sqrt{2},-1\right) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\sqrt{2},-1\right)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & 2\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & 2\end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\sqrt{2},-1\right) = 0$$

$$\Delta_2 = detHf\left(\sqrt{2},-1\right) = -8 < 0$$

Οπότε το $\left(\sqrt{2},-1\right)$ είναι σαγματικό σημείο της συνάρτησης $f$.

**iii.** Η $f$ είναι παραγωγίσιμη, με:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 4x^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4y^3$$

Άρα, $\nabla f(x,y) = (2x - 4x^3, -4y^3\ )$. Λύνουμε:

$$\nabla f(x,y) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4x^3 = 0 \\ \quad -4y^3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή } x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \text{ ή } x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

Επομένως, εξετάζουμε τα σημεία (0,0), $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ και $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$.

Βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 - 12x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -12y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial(2x - 4x^3)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial(-4y^3)}{\partial x} = 0$$

Θα βρούμε τον Εσσιανό πίνακα για κάθε ένα από τα παραπάνω σημεία και υπολογίζουμε τις αντίστοιχες ορίζουσες:

Για το (0,0) έχουμε:

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0$$

$$\Delta_2 = detHf(0,0) = 0$$

Επομένως, δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το (0,0). Ομοίως αποδεικνύεται ότι δεν είμαστε σε θέση να χαρακτηρίσουμε και τα $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$,$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

**iv.** Η $f$ είναι παραγωγίσιμη, με:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y$$

Άρα, $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$. Λύνουμε:

$$\nabla f(x, y) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Επομένως, εξετάζουμε το σημείο (0,0).

Βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial(2x)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial(-2y)}{\partial x} = 0$$

Θα βρούμε τον Εσσιανό πίνακα για το σημείο (0,0).

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0$$

$$\Delta_2 = detHf(0,0) = -4 < 0$$

Οπότε το (0,0) είναι σαγματικό σημείο της συνάρτησης $f$.

**v.** Η $f$ είναι παραγωγίσιμη, με:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 18x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$$

Άρα, $\nabla f(x,y) = (3x^2 - 18x,\ \ 2y\ )$. Λύνουμε:

$$\nabla f(x,y)=\vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-18x=0 \\ 2y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \text{ ή } x=6 \\ y=0 \end{cases}$$

Επομένως, εξετάζουμε τα σημεία (0,0) και (6,0).

Βρίσκουμε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=6x-18$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)=\frac{\partial(3x^2-18x)}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)=\frac{\partial(2y)}{\partial x}=-2x$$

Θα βρούμε τον Εσσιανό πίνακα για κάθε ένα από τα παραπάνω σημεία και υπολογίζουμε τις αντίστοιχες ορίζουσες:

Για το (0,0) έχουμε:

$$Hf(0,0)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)=-18<0$$

$$\Delta_2=detHf(0,0)=-36<0$$

Οπότε το (0,0) είναι σαγματικό σημείο της συνάρτησης $f$.

Για το (6,0) έχουμε:

$$Hf(6,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(6,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(6,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(6,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(6,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(6,0) = 18 > 0$$

$$\Delta_2 = detHf(6,0) = 36 > 0$$

Άρα, το σημείο (6,0) είναι τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης $f$.

<u>Β' ΤΡΟΠΟΣ(Μέσω Θεωρήματος Sylvester)</u>

**1)** $\mathbf{f(x,y) = x^3 - 6x^2 + y^2}$

$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 12x,\ 2y)$

$\nabla f(x,y) = 0 \to \begin{cases} 3x^2 - 12x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 3x(x-4) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to$
$\begin{cases} x = 0 \ or \ x = 4 \\ y = 0 \end{cases}$

$f_{xx}(x,y) = 6x - 12 \quad f_{yy}(x,y) = 2 \quad f_{xy}(x,y) = 0$

✓ $f_{xx}(0,0) * f_{yy}(0,0) - {f_{xy}}^2(0,0) = -24 < 0$

Άρα το (0,0) σαγματικό σημείο

✓ $f_{xx}(4{,}0) * f_{yy}(4{,}0) - {f_{xy}}^2(4{,}0) = \ 24 > 0$

$f_{xx}(4{,}0) = 12 > 0$

Άρα το (4,0) σημείο τοπικού ελαχίστου

**2)** $\mathbf{f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4}$

$\nabla f(x,y) = (2x + 2xy,\ 2y + x^2)$

$\nabla f(x,y) = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x + 2xy = 0 \\ 2y + x^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x(1+y) = 0 \\ 2y + x^2 = 0 \end{cases} \rightarrow$

$\begin{cases} x = 0 \ or \ y = \ -1 \\ 2y + x^2 = 0 \end{cases} \rightarrow (x = 0 : y = \ 0) \ and \ (y = \ -1 : x = -\sqrt{2} \ or \ x = \ \sqrt{2}\ )$

$f_{xx}(x,y) = 2 + 2y \quad f_{yy}(x,y) = 2 \quad f_{xy}(x,y) = 2x$

✓ $f_{xx}(0{,}0) * f_{yy}(0{,}0) - {f_{xy}}^2(0{,}0) = \ 4 > 0$

$f_{xx}(0{,}0) = 2 > 0$

Άρα το (0,0) σημείο τοπικού ελαχίστου

✓ $f_{xx}\left(-\sqrt{2}, -1\right) * f_{yy}\left(-\sqrt{2}, -1\right) - {f_{xy}}^2\left(-\sqrt{2}, -1\right) = \ -8 < 0$

Άρα το $(-\sqrt{2},-1)$ σαγματικό σημείο

✓ $f_{xx}(\sqrt{2},-1) * f_{yy}(\sqrt{2},-1) - {f_{xy}}^2(\sqrt{2},-1) = -8 < 0$

Άρα το $(\sqrt{2},-1)$ σαγματικό σημείο

**3)** $\mathbf{f(x,y) = x^2 - \boldsymbol{x^4} - \boldsymbol{y^4}}$

$\nabla f(x,y) = (2x - 4x^3, -4y^3)$

$\nabla f(x,y) = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x(1-2x^4) = 0 \\ -4y^3 = 0 \end{cases} \rightarrow$

$\begin{cases} x = 0 \; or \; x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \; or \; x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = 0 \end{cases}$

$f_{xx}(x,y) = 2 - 12x^2 \quad f_{yy}(x,y) = -12y^2 \quad f_{xy}(x,y) = 0$

✓ $f_{xx}(0{,}0) * f_{yy}(0{,}0) - {f_{xy}}^2(0{,}0) = 0$

Άρα δεν μπορούμε να ξέρουμε

✓ $f_{xx}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right) * f_{yy}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right) - {f_{xy}}^2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right) = 0$

Άρα δεν μπορούμε να ξέρουμε

✓ $f_{xx}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right) * f_{yy}\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right) - {f_{xy}}^2\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right) = 0$

Άρα δεν μπορούμε να ξέρουμε

**4)** $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^2 - \boldsymbol{y}^2$

$\nabla f(x,y) = (2x,-2y)$

$\nabla f(x,y) = 0 \to (x,y) = (0,0)$

$f_{xx}(x,y) = 2 \quad f_{yy}(x,y) = -2 \quad f_{xy}(x,y) = 0$

✓ $f_{xx}(0,0) * f_{yy}(0,0) - {f_{xy}}^2(0,0) = -4 < 0$

Άρα το (0,0) σαγματικό σημείο

**5)** $\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^3 - \mathbf{9x}^2 + \mathbf{y}^2$

$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 18x,\ 2y)$

$\nabla f(x,y) = 0 \to \begin{cases} 3x^2 - 18x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 3x(x-6) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \to$
$\begin{cases} x = 0 \ or \ x = 6 \\ y = 0 \end{cases}$

$f_{xx}(x,y) = 6x - 18 \quad f_{yy}(x,y) = 2 \quad f_{xy}(x,y) = 0$

✓ $f_{xx}(0,0) * f_{yy}(0,0) - {f_{xy}}^2(0,0) = -36 < 0$

Άρα το (0,0) σαγματικό σημείο

✓ $f_{xx}(6,0) * f_{yy}(6,0) - {f_{xy}}^2(6,0) = 36 > 0$

$f_{xx}(6,0) = 18 > 0$

Άρα το (6,0) σημείο τοπικού ελαχίστου

**9.**

**i.** $f_1(x,y,z) = x,\ \ f_2(x,y,z) = y^2 z$ και $f_3(x,y,z) = xz^3$

Ισχύει ότι $\Delta\vec{F} = (\Delta f_1, \Delta f_2, \Delta f_3)$. Έχουμε:

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{\partial\left(\frac{\partial(x)}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial(1)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2}(x,y,z) = \frac{\partial\left(\frac{\partial(x)}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial(0)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2}(x,y,z) = \frac{\partial\left(\frac{\partial(x)}{\partial z}\right)}{\partial z} = \frac{\partial(0)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{\partial\left(\frac{\partial(y^2 z)}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial(0)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial y^2}(x,y,z) = \frac{\partial\left(\frac{\partial(y^2 z)}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial(2yz)}{\partial y} = 2z$$

$$\frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2}(x,y,z) = \frac{\partial\left(\frac{\partial(y^2 z)}{\partial z}\right)}{\partial z} = \frac{\partial(y^2)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{\partial\left(\frac{\partial(xz^3)}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial(z^3)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial y^2}(x,y,z) = \frac{\partial\left(\frac{\partial(xz^3)}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial(0)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f_3}{\partial z^2}(x,y,z) = \frac{\partial\left(\frac{\partial(xz^3)}{\partial z}\right)}{\partial z} = \frac{\partial(3xz^2)}{\partial z} = 6xz$$

Επίσης, $\Delta f_i = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f_i}{\partial z^2}, i \in \{1,2,3\}$.

Άρα:

$$\Delta\vec{F} = (0, 2z, 6xz)$$

**ii.** Το πεδίο ορισμού του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}$ είναι το $\Re^3$. Όμως το $\Re^3$ είναι ανοικτό και απλά συνεκτικό χωρίο. Από θεώρημα, αν $P = 2xy, Q = x^2 + ze^y$ και $R = e^y$, το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό αν:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \text{ και } \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

Έχουμε:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = e^y = \frac{\partial R}{\partial y}$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = 0 = \frac{\partial P}{\partial z}$$

Συνεπώς, το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό πεδίο(πεδίο κλίσεων).

Τρίτη 6 Νοεμβρίου 2018,

**ΦΡΑΓΚΟΥΛΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ-ΜΑΡΙΟΣ**

**ΧΑΤΖΟΠΟΥΛΟΣ ΟΔΥΣΣΕΑΣ**