

## Θέματα προσομοίωσης

### Άσκηση 1.

Εξετάστε ως προς την συνέχεια τις συναρτήσεις:

$$\text{i } f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2 - y^2}{x^2 + 3y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} .$$

$$\text{ii } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + 2y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} .$$

$$\text{iii } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} .$$

$$\text{iv } f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} .$$

$$\text{v } f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} .$$

$$\text{vi } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} \sqrt[3]{y}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} .$$

### Άσκηση 2.

Υπολογίστε την παράγωγο (πίνακα *Jacobi*) της συνάρτησης  $f(x, y) = (xy^2, ye^{x^2})$  στο  $(0, 1)$ .

### Άσκηση 3.

Υπολογίστε τις  $f_{xx}$  και  $f_{yy}$  των συναρτήσεων:

$$\text{i } f(x, y) = e^{xy} \sin^2 x .$$

$$\text{ii } f(x, y) = (x^2 + y^3) \ln(1 + y^2) .$$

### Άσκηση 4.

$$\text{i } \text{Υπολογίστε την } f_{xz} \text{ για τις } f(x, y, z) = \sin(xy) \cos z^2, f(x, y, z) = x^{y+z} .$$

$$\text{ii } \text{Υπολογίστε τις } f_{xy}, f_{zz} \text{ της } f(x, y) = z^2 \text{Arctan}(x, y), f(x, y) = ze^{x+y+z} .$$

### Άσκηση 5.

Εξετάστε αν είναι διαφορίσιμη στο  $(0, 0)$  η συνάρτηση

$$\begin{cases} \left( \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} .$$

**Άσκηση 6.**

Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος στο  $\vec{a} = (1, 2, -1)$  της συνάρτησης  $f(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ .

**Άσκηση 7.**

Βρείτε μέγιστη και ελάχιστη τιμή της κατευθυνόμενης παραγώγου  $f_{\vec{u}}(1, 2, 0)$  της συνάρτησης  $f(x, y, z) = x^2z + ye^z + xz^3$  και την κατεύθυνση κατά την οποία λαμβάνονται.

**Άσκηση 8.**

Να βρεθούν και να χαρακτηρισούν τα τοπικά ακρότατα των συναρτήσεων

i  $f(x, y) = x^3 - 6x^2 + y^2$  .

ii  $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$  .

iii  $f(x, y) = x^2x - x^4 - y^4$  .

iv  $f(x, y) = x^2 - y^2$  .

v  $f(x, y) = x^3 - 9x^2 + y^2$  .

**Άσκηση 9.**

i Υπολογίστε τη λαπλασιανή του διανυσματικού πεδίου:

$$\vec{F}(x, y, z) = (x, y^2z, xz^3)$$

ii Εξετάστε αν είναι συντηρητικό το πεδίο

$$\vec{F}(x, y, z) = (2xy, x^2 + ze^y, e^y) .$$