# Περιεχόμενα

# Κεφάλαιο 1

# Ολοκληρώματα

## 1.1 Τριπλό Ολοκλήρωμα

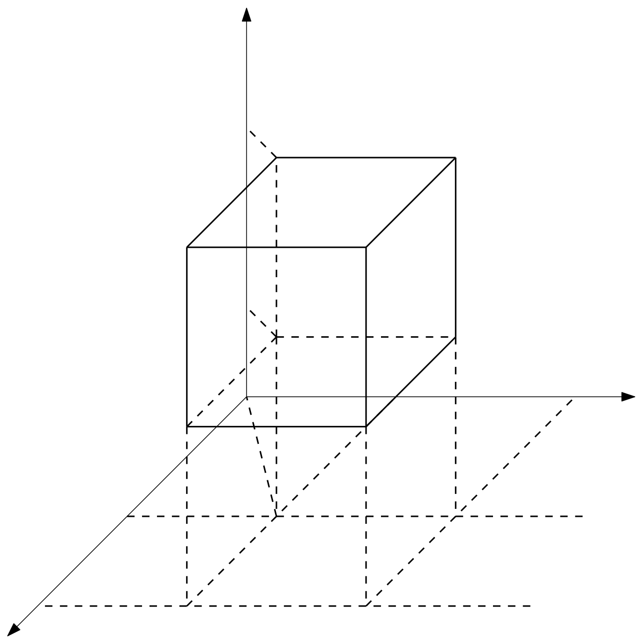
I. Πάνω σε ορθογώνιο του $\mathbb{R}^3$

Έστω

$$R = [\alpha_1, \beta_1] \times [\alpha_2, \beta_2] \times [\alpha_3, \beta_3]$$

ένα κλειστό ορθογώνιο (παραλληλεπίπεδο) του $\mathbb{R}^3$ και μία φραγμένη συνάρτηση :

$$f : \ R \longrightarrow \mathbb{R}$$



Το τριπλό ολοκλήρωμα πάνω στο ορθογώνιο $R \subseteq \mathbb{R}^3$ ορίζεται όπως ορίστηκε το διπλό ολοκλήρωμα πάνω σε ορθογώνιο του $\mathbb{R}^2$. Συγκεκριμένα θεωρούμε μία διαμέριση του $R$, ως εξής:

$$P = P_{\xi\eta\zeta} = \{R_{ijk} : \, i = 1, 2, \dots, n, \; j = 1, 2, \dots, m, \; k = 1, 2, \dots, l\}$$

όπου

$$R_{ijk} = [\xi_{i-1}, \xi_i] \times [\eta_{j-1}, \eta_j] \times [\zeta_{k-1}, \zeta_k]$$

είναι τα ορθογώνια του $\mathbb{R}^3$, που ορίζονται από τις διαμερίσεις:

$$\begin{aligned} P_\xi &= \{\alpha_1 = \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n = \beta_1\}, \quad \text{με } \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n, \\ P_\eta &= \{\alpha_2 = \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_m = \beta_2\}, \quad \text{με } \eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_m, \\ P_\zeta &= \{\alpha_3 = \zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_l = \beta_3\}, \quad \text{με } \zeta_0 < \zeta_1 < \dots < \zeta_l, \end{aligned}$$

των διαστημάτων $[\alpha_1, \beta_1]$, $[\alpha_2, \beta_2]$, $[\alpha_3, \beta_3]$ αντίστοιχα.

Η λεπτότητα λ($P$) της διαμέρισης $P$ ορίζεται:

$$\lambda(P) = \max\{\rho(R_{ijk}) : \, i = 1, 2, \dots, n, \; j = 1, 2, \dots, m, \; k = 1, 2, \dots, l\},$$

όπου

$$\rho(R_{ijk}) = \sqrt{(\xi_i - \xi_{i-1})^2 + (\eta_j - \eta_{j-1})^2 + (\zeta_k - \zeta_{k-1})^2}$$

είναι το μήκος της διαγωνίου του ορθογωνίου $R_{ijk}$.

Θεωρούμε μία φραγμένη συνάρτηση

$$f : \; R \longrightarrow \mathbb{R}$$

και για τη διαμέριση $P = P_{\xi\eta\zeta}$ ορίζουμε τα αθροίσματα:

$$\begin{aligned} U(f, P) &:= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} M_{ijk} V(R_{ijk}) \quad : \text{άνω άθροισμα} \\ L(f, P) &:= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{l} m_{ijk} V(R_{ijk}) \quad : \text{κάτω άθροισμα} \end{aligned}$$

όπου

$$\begin{aligned} M_{ijk} &= \sup\{f(x, y, z) \quad : (x, y, z) \in R_{ijk}\} \\ m_{ijk} &= \inf\{f(x, y, z) \quad : (x, y, z) \in R_{ijk}\} \\ V(R_{ijk}) &= (\xi_i - \xi_{i-1})(\eta_j - \eta_{j-1})(\zeta_k - \zeta_{k-1}) \quad : \text{όγκος του } R_{ijk}. \end{aligned}$$

Επίσης ορίζουμε

$$\int_R^- fd(V) := \inf_P U(f,P) \quad : \text{Άνω ολοκλήρωμα}$$

$$\int_{-R} fd(V) := \sup_P L(f,P) \quad : \text{Κάτω ολοκλήρωμα}$$

**Ορισμός**

*Η συνάρτηση $f$ λέγεται ολοκληρώσιμη στο ορθογώνιο $R \subseteq \mathbb{R}^3$, όταν ισχύει*

$$\int_R^- fd(V) = \int_{-R} fd(V) = \lambda$$

*Ο αριθμός $\lambda$ είναι το τριπλό ολοκλήρωμα της $f$ στο ορθογώνιο $R$ και συμβολίζεται*

$$\int\int_R\int f(x,y,z)d(V) \text{ ή } \int\int_R\int f(x,y,z)dxdydz.$$

Οι ιδιότητες των διπλών ολοκληρωμάτων (αλλά και των απλών) αποδεικνύεται ότι ισχύουν και εδώ.

Ο υπολογισμός ενός τριπλού ολοκληρώματος πάνω στο ορθογώνιο $R$ του $\mathbb{R}^3$, γίνεται, όπως του διπλού ολοκληρώματος με τη βοήθεια των (τριπλών) διαδοχικών ολοκληρωμάτων.
Για τη συνάρτηση $f : R \longrightarrow \mathbb{R}, R \subseteq \mathbb{R}$, υποθέτουμε ότι υπάρχουν τα διπλά διαδοχικά ολοκληρώματα:

$$F_{23}(x) = \int_{\alpha_2}^{\beta_2}\int_{\alpha_3}^{\beta_3} f(x,y,z)dzdy, \quad x \in [\alpha_1, \beta_1]$$

$$F_{32}(x) = \int_{\alpha_3}^{\beta_3}\int_{\alpha_2}^{\beta_2} f(x,y,z)dydx, \quad x \in [\alpha_1, \beta_1]$$

$$F_{13}(y) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_3}^{\beta_3} f(x,y,z)dzdx, \quad y \in [\alpha_2, \beta_2]$$

κ.λ.π. (6 συνολικά συνδυασμοί).

Αν οι συναρτήσεις $F_{23}, F_{32}$, κ.λ.π. είναι ολοκληρώσιμες στα αντίστοιχα διαστήματα, τότε ορίζονται τα τριπλά διαδοχικά ολοκληρώματα. Π.χ.

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\int_{\alpha_3}^{\beta_3} f(x,y,z)dzdydx \quad = \int_{\alpha_1}^{\beta_1}\left[\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\int_{\alpha_3}^{\beta_3} f(x,y,z)dzdy\right]dx,$$

$$\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_3}^{\beta_3} f(x,y,z)dzdxdy \quad = \int_{\alpha_2}^{\beta_2}\left[\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_3}^{\beta_3} f(x,y,z)dzdx\right]dy.$$

Αποδεικνύεται το ακόλουθο θεώρημα:

**Θεώρημα 1.1.1.** *Αν η $f: R \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής, τότε υπάρχει το τριπλό ολοκλήρωμα της $f$ στο $R$ και όλα τα τριπλά διαδοχικά ολοκληρώματα και ισχύει:*

$$\begin{aligned}\int\int_R\int f(x,y,z)dxdydz &= \int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_2}^{\beta_2}\int_{\alpha_3}^{\beta_3} f(x,y,z)dzdydx = \\ &= \int_{\alpha_2}^{\beta_2}\int_{\alpha_1}^{\beta_1}\int_{\alpha_3}^{\beta_3} f(x,y,z)dzdxdy = \\ &= \dots\end{aligned}$$

**Παραδείγματα**
1) Να υπολογίσετε το (τριπλό) διαδοχικό ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1\int_1^2\int_1^3 xze^{y+z}dxdzdy$$

**Λύση**

$$\begin{aligned}I &= \int_0^1\int_1^2 \left[\frac{1}{2}x^2ze^{y+z}\right]_1^3 dzdy = \\ &= \int_0^1\int_1^2 4ze^{y+z}dzdy = \\ &= 4\int_0^1 \left[ze^{y+z} - e^{y+z}\right]_1^2 dy = \\ &= 4\int_0^1 e^{y+2}dy = \\ &= 4\left[e^{y+2}\right]_0^1 = \\ &= 4(e^3 - e^2).\end{aligned}$$

II. Πάνω σε φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$

Έστω $B \subseteq \mathbb{R}^3$, $B$ : φραγμένο και $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$ φραγμένη.

$$B : \text{φραγμένο} \Rightarrow \exists \text{ κλειστό ορθογώνιο } R : B \subseteq R.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\tilde{f}(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z), & (x,y,z) \in B \\ 0, & (x,y,z) \in R - B \end{cases}$$

**Ορισμός**
*Η συνάρτηση $f$ είναι ολοκληρώσιμη στο $B \Leftrightarrow$ η $\tilde{f}$ είναι ολοκληρώσιμη στο $R$.*

Αποδεικνύεται ότι

$$\int\int\int_R \tilde{f}(x,y,z)dxdydz = \int\int_{R_1}\int \tilde{f}(x,y,z)dxdydz$$

$\forall$ κλειστό ορθογώνιο $R_1 : B \subseteq R_1$, δηλαδή το ολοκλήρωμα της $\tilde{f}$ είναι ανεξάρτητο του $R$ (αρκεί να περιέχει το $B$).

Ορίζουμε:
Τριπλό ολοκλήρωμα της $f$ στο $B$:

$$\int\int_B\int f(x,y,z)dxdydz = \int\int_R\int \tilde{f}(x,y,z)dxdydz$$

Όγκος $V$ του $B$:

$$V(B) = \int\int_B\int dxdydz$$

**Απλά σύνολα**

Έστω $B \subseteq \mathbb{R}^3$:

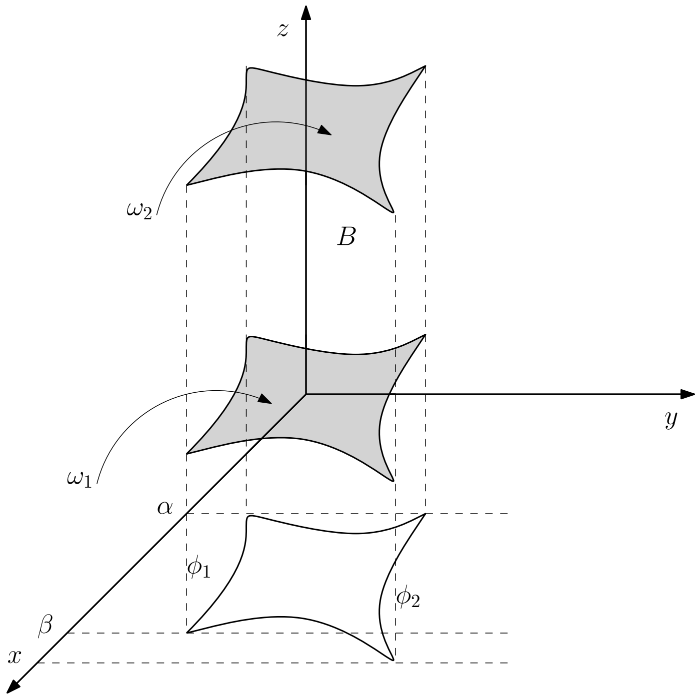
$$\begin{aligned}&B : xy - \text{απλό} \Leftrightarrow\\ &B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ \omega_1(x,y) \leq z \leq \omega_2(x,y)\},\end{aligned}$$

όπου $D : x-$ απλό $\subseteq \mathbb{R}^2,\ \omega_1, \omega_2 : D \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς.
Δηλαδή

$$\begin{aligned}&B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\\ &\alpha \leq x \leq \beta,\ \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x),\ \omega_1(x,y) \leq z \leq \omega_2(x,y)\},\\ &\phi_1, \phi_2 : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ συνεχείς.}\end{aligned}$$

Ανάλογα ορίζονται τα σύνολα: $yx-$ απλό, $xz-$ απλό, ... .

Το $B \subseteq \mathbb{R}^3$ λέγεται απλό σύνολο αν είναι συγχρόνως: $xy-$ απλό, $xz-$ απλό, ... , π.χ. η σφαίρα.




**Θεώρημα 1.1.2.** *(Fubini) Έστω $f : B \longrightarrow \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}^3$, συνεχής και φραγμένη. Αν $B$ είναι $xy-$ απλό, τότε υπάρχει το τριπλό ολοκλήρωμα $\int\int_B\int f(x,y,z)dxdydz$ και ισχύει:*

$$\int\int_B\int f(x,y,z)dxdydz = \int_\alpha^\beta \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \int_{\omega_1(x,y)}^{\omega_2(x,y)} f(x,y,z)dzdydx$$

*Ομοίως, αν το $B$ είναι $xz-$ απλό, τότε ... .*

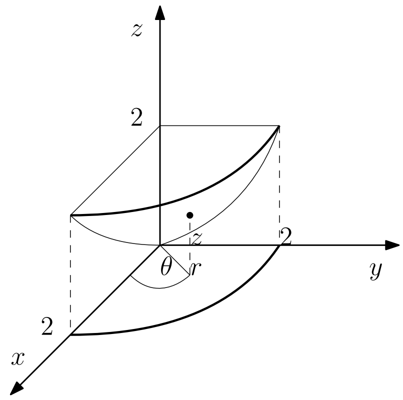
**Ασκήσεις**

1) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα: $I = \int\int_B\int(x^2+y^2)dxdydz$, όπου B είναι το στερεό που περιβάλλεται από την επιφάνεια $x^2+y^2 = 2z$ (παραβολοειδές) και το επίπεδο $z = 2$.

**Λύση**

Τομή των επιφανειών:

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 2z \\ z = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow x^2+y^2 = 4.$$




Χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = 2 \end{cases}$$

Εξίσωση παραβολοειδούς: $r^2 = 2z$

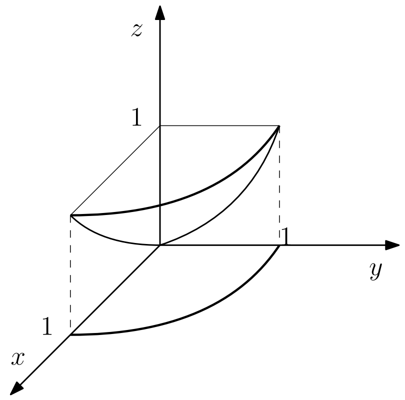
$$\begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 2 \\ \frac{r^2}{2} \le z \le 2 \end{cases}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{\frac{r^2}{2}}^2 r^2 r dz dr d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(2r^3 - \frac{r^5}{2}\right) dr d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{2r^4}{4} - \frac{r^6}{12}\right]_0^2 d\theta = \\ &= \frac{16\pi}{3}. \end{aligned}$$

2) Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού B, που περιβάλλεται από το επίπεδο $z = 0$, το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$ και τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$.

**Λύση**




Αν $B_1$ είναι το μέρος του στερεού B που βρίσκεται στην πρώτη στερεά γωνία, τότε: $V(B) = 4V(B_1)$, όπου $V(B_1) = \int\int_{B_1}\int dxdydz$.

Εφαρμόζουμε τον κυλινδρικό μετασχηματισμό και έχουμε:

$$\begin{aligned} V(B_1) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\int_0^{r^2} rdzdrd\theta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^3 drd\theta = \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \\ &= \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

Άρα $V(B) = 4 * \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$.

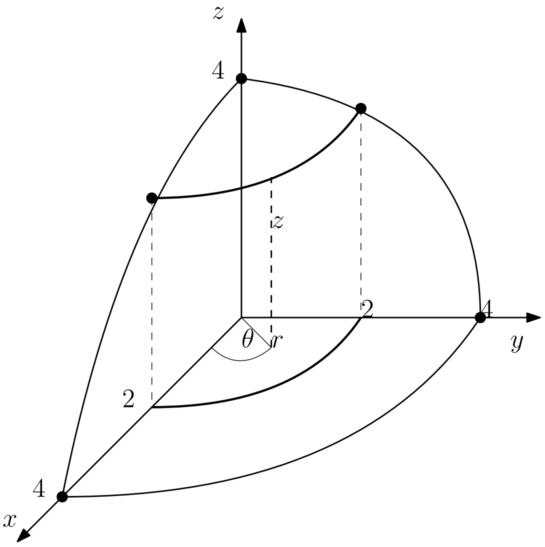
3) Να βρεθεί ο όγκος του στερεού B που βρίσκεται μέσα στη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ και μέσα στον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 4$.

**Λύση**

Αν $B_1$ είναι το μέρος του στερεού B που περιέχεται στην πρώτη στερεά γωνία, τότε: $V(B) = 8V(B_1)$.

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες οι εξισώσεις των επιφανειών είναι:

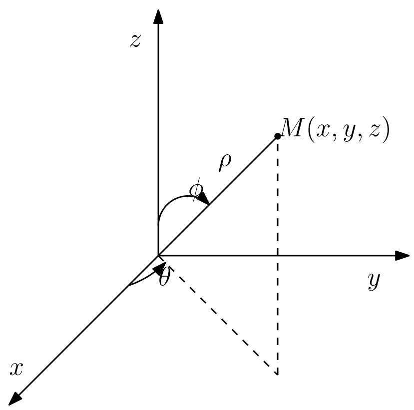
$$\begin{cases} z = \sqrt{16 - r^2}: & \text{σφαίρας} \\ r = 2: & \text{κυλίνδρου} \end{cases}$$




Είναι

$$
\begin{aligned}
V(B_1) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{16-r^2}} r dz dr d\theta = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r\sqrt{16-r^2} dr d\theta = \\
&= -\frac{1}{2}\frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \left(16-r^2\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^2 d\theta = \\
&= \frac{\pi}{6} \left(16^{\frac{3}{2}} - 12^{\frac{3}{2}}\right).
\end{aligned}
$$

**Σφαιρικός μετασχηματισμός**



$$\vec{T}: \begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\phi, & 0 \leq \theta < 2\pi \\ y = \rho\sin\theta\sin\phi, & 0 \leq \phi < \pi \\ z = \rho\cos\phi, & 0 \leq \rho < \infty \end{cases}$$

$f : B \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ ολοκλ.
$\vec{T} : G \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \vec{T}(G) = B$ σφαιρικός μετασχηματισμός
$\det(J\vec{T}(\rho,\theta,\phi)) = -\rho^2\sin\phi$

$$\int\int_B\int f(x,y,z)dxdydz =$$
$$\int\int_G\int f(\rho\cos\theta\sin\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\phi)\rho^2\sin\phi d\rho d\theta d\phi$$
$$V(B) = \int\int_G\int \rho^2\sin\phi\ d\rho d\theta d\phi$$

Όγκος ελλειψοειδούς: $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1,\ \alpha,\beta,\gamma > 0.$

$$\begin{cases} x = \alpha\rho\cos\theta\sin\phi \\ y = \alpha\rho\sin\theta\sin\phi \\ z = \alpha\rho\cos\phi \end{cases} \Rightarrow$$

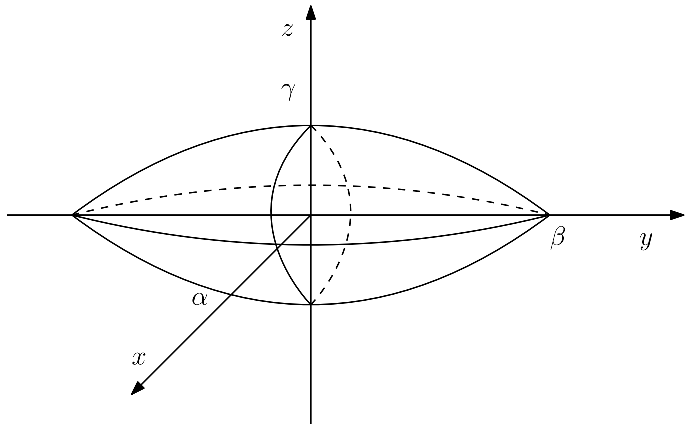
$$\begin{cases} J\vec{T}(\rho,\theta,\phi) = -\alpha\beta\gamma\rho^2\sin\phi \\ V(B) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 \rho^2\sin\phi\ \alpha\beta\gamma\ d\rho d\phi d\theta = \frac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma \end{cases}$$

4) Να υπολογιστεί ο όγκος του ελλειψοειδούς $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1.$

**Λύση**

Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό:

$$\begin{cases} x = \alpha\rho\cos\theta\sin\phi, & 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ y = \beta\rho\sin\theta\sin\phi, & 0 \leq \phi \leq \pi \\ z = \gamma\rho\cos\phi, & 0 \leq \rho \leq 1 \end{cases}$$




Η εξίσωση του ελλειψοειδούς γίνεται $\rho = 1$ και η ορίζουσα του μετασχηματισμού:

$$\left| \det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} \right| = \alpha\beta\gamma\rho^2 \sin\phi$$

$$V(B) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 \alpha\beta\gamma\rho^2 \sin\phi d\rho d\phi d\theta = ... = \frac{4}{3}\pi\alpha\beta\gamma.$$