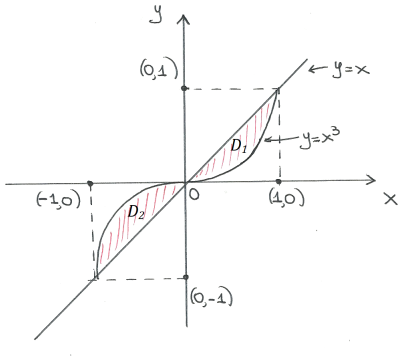
# Επαναληπτικές Ασκήσεις 19-12-2018

### Διπλά Ολοκληρώματα

**1.** Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\iint_D (x-1)dxdy$ όπου το χωρίο $D$ περιέχεται από τις καμπύλες $y = x$ και $y = x^3$.

### Λύση




Οι δύο καμπύλες τέμνονται στα σημεία όπου $x^3 = x$. Δηλαδή έχουμε τα 3 σημεία τομής $(-1,-1)$ , $(0,0)$ και $(1,1)$. Επομένως έχοντας προσδιορίσει το χωρίο $D$ συνεχίζουμε ως εξής: Ξεκινώντας με το $x$ να 'κινείται' από -1 εώς 1, παίρνουμε ξεχωριστά τα χωρία που αντιστοιχούν σε $-1 \leqslant x \leqslant 0$ $(D_2)$ και σε $0 \leqslant x \leqslant 1$ $(D_1)$.

• $(D_1)$ : Παρατηρούμε άμεσα ότι

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \;\Rightarrow\; x^3 \leqslant y \leqslant x \; .$$

• $(D_2)$ : Παρατηρούμε άμεσα ότι

$$-1 \leqslant x \leqslant 0 \;\Rightarrow\; x \leqslant y \leqslant x^3 \; .$$

Επομένως

$$\iint_D (x-1)dxdy = \int_{D_1}(x-1)dxdy + \int_{D_2}(x-1)dxdy = \int_0^1\int_{x^3}^{x}(x-1)dydx + \int_{-1}^{0}\int_{x}^{x^3}(x-1)dydx$$

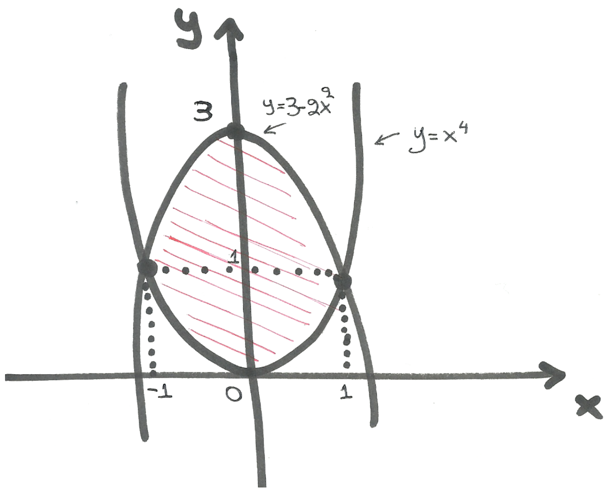
$$\int_0^1 (x-1)\int_{x^3}^{x} dydx + \int_{-1}^{0}(x-1)\int_{x}^{x^3} dydx = \int_0^1 (x-1)[y]_{x^3}^{x}dx + \int_{-1}^{0}(x-1)[y]_{x}^{x^3}dx =$$

$$\int_0^1 (x-1)(x-x^3)dx + \int_{-1}^{0}(x-1)(x^3-x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right]_0^1 + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

**2.** Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου $D$ του επιπέδου $xy$ που ορίζεται από τις καμπύλες $y = 3 - 2x^2$ και $y = x^4$.

**Λύση**




Για να βρορύμε το εμβαδόν $E$ του χωρίου $D$ αρκεί να υπολογίσουμε το ολοκήρωμα $\iint_D dxdy$. Επόμενως το μόνο που μένει είναι να βρούμε τα άκρα ολοκλήρωσης των $x$ και $y$. Ξεκινώντας με το $x$ λοιπόν έχουμε:

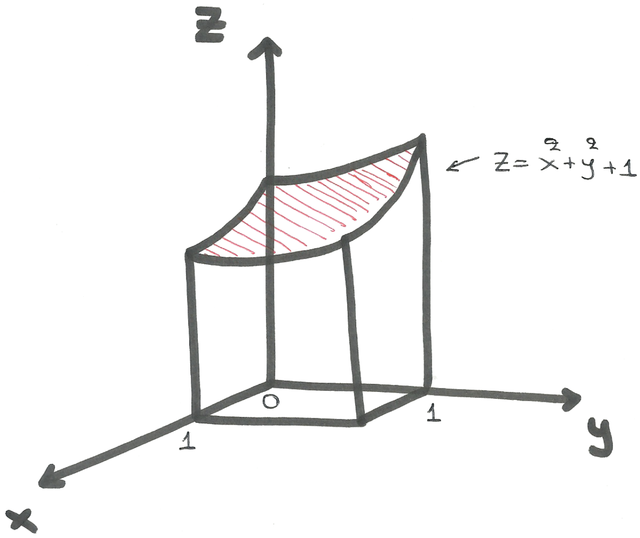
$$-1 \leqslant x \leqslant 1 \;\Rightarrow\; x^4 \leqslant y \leqslant 3 - 2x^2 \; .$$

Επομένως:

$$E = \iint_D dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{x^4}^{3-2x^2} dydx = \int_{-1}^{1} [y]_{x^4}^{3-2x^2} dx = \int_{-1}^{1} (3-2x^2-x^4)dx = \left[3x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1} = \frac{64}{15}$$

**3.** Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που έχει βάση $D = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1]\}$ και φράσσεται από πάνω από την επιφάνεια $z = x^2 + y^2 + 1$.

**Λύση**




Ο ζητούμενος όγκος $V$ θα δίνεται από το ολοκλήρωμα $\iint_D f(x,y)dxdy$. Επομένως μένει να βρούμε τα άκρα ολοκλήρωσης. Καθώς το $D$ είναι ένα ορθογώνιο με πλευρές 1 έχουμε:

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ και } 0 \leqslant y \leqslant 1 \; .$$

Έπεται λοιπόν ότι ο ζητούμενος όγκος $V$ θα είναι:

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^1 (x^2+y^2+1)dxdy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + y^2x + x\right]_0^1 dy = \int_0^1 \left(\frac{4}{3} + y^2\right) dy$$
$$= \left[\frac{4}{3}y + \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{5}{3}.$$

**Σημείωση:** Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τον όγκο $V$ μέσω του τριπλού ολοκληρώματος $\iiint_R dxdydz$, όπου $R$ το στερεό που περιέχεται στο 1ο τεταρτημόριο εντός των επιφανειών $x=1,\ y=1,\ z=x^2+y^2+1$. Όντως τότε πάλι θα έχουμε ότι:

$$0 \leqslant x \leqslant 1\ ,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\ .$$

Επιπλέον εδώ για το $z$ θα ισχύει ότι:

$$0 \leqslant z \leqslant x^2+y^2+1\ .$$

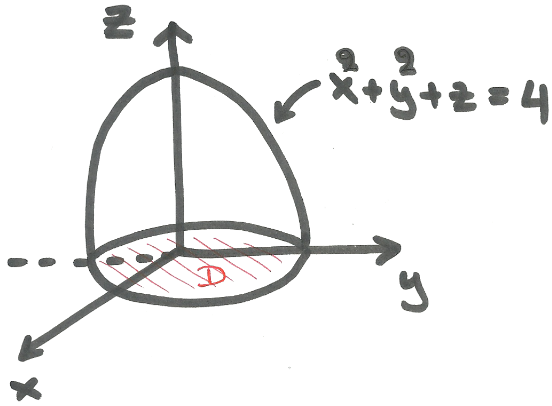
Επομένως ο ζητούμενος όγκος θα είναι:

$$V = \iiint_R dxdydz \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{x^2+y^2+1} dzdxdy = \int_0^1 \int_0^1 [z]_0^{x^2+y^2+1} dxdy = \int_0^1 \int_0^1 (x^2+y^2+1)dxdy$$

και συνεχίζουμε όπως στο διπλό ολοκλήρωμα πιο πάνω.

**4.** Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού $R$ που περικλείεται από την επιφάνεια $x^2+y^2+z=4$ και το επίπεδο $z=0$.

**Λύση:**




Παρατηρούμε ότι η επιφάνεια $x^2+y^2+z=4$ είναι της μορφής $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z}{c}$, δηλαδή ένα ελλειπτικό παραβολοειδές όπως φαίνεται και στο σχήμα. Η προβολή της του παραβολοειδούς στο επίπεδο $xy$ $(z=0)$ θα είναι ο δίσκος $D=\big\{(x,y) : x^2+y^2 \leqslant 4\big\}$. Επομένως, για τον υπολογισμό του ζητούμενου όγκου $V$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε διπλό είτε τριπλό ολοκλήρωμα. Συγκεκριμένα:

• (διπλό ολοκλήρωμα): Θεωρώντας την $f(x,y)=z=4-x^2-y^2$, έχουμε ότι ο όγκος του στερεού που βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια $z=f$ και πάνω από το επίπεδο $z=0$, δίνεται από το $V=\iint_D f(x,y)dxdy$. Για τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος πρέπει λοιπόν να βρούμε τα άκρα ολοκλήρωσης. Καθώς το $D$ είναι δίσκος, έπεται ότι η χρήση πολικών συντεταγμένων θα βοηθήσει αρκετά. Επομένως:

$$x = rcos\theta\ ,\quad y = rsin\theta\ ,\quad r^2 = x^2+y^2\ ,\quad J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r\ .$$

Φαίνεται άμεσα από το σχήμα ότι $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ και $0 \leqslant r \leqslant 2$, το οποίο φαίνεται και απ'την σχέση $x^2+y^2 \leqslant 4 \Leftrightarrow r^2 \leqslant 4 \Rightarrow 0 \leqslant r \leqslant 2$. Επιπλέον $f(r,\theta) = 4-r^2cos^2\theta - r^2sin^2\theta = 4-r^2$. Επομένως έχουμε ότι:

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (4-r^2)|J|d\theta dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (4-r^2)rd\theta dr = \int_0^2 (4-r^2)r \int_0^{2\pi} d\theta dr$$
$$= \int_0^2 (4-r^2)r[\theta]_0^{2\pi} dr = 2\pi \int_0^2 (4-r^2)rdr = 2\pi \left[\frac{4r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 dr = 8\pi \ .$$

• (τριπλό ολοκλήρωμα): Ο όγκος $V$ του στερεού $R$ θα δίνεται απο το τριπλό ολοκλήρωμα $V = \iiint_R dxdydz$. κάνοντας αλλαγή συντεταγμένων σε κυλινδρικές έχουμε:

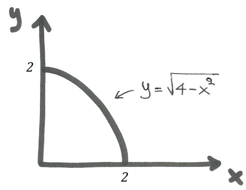
$$x = rcos\theta \ , \quad y = rsin\theta \ , \quad z = 4-x^2-y^2 = 4-(x^2+y^2) = 4-r^2 \ , \quad J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r \ .$$

Όπως είδαμε στο διπλό ολοκλήρωμα, $0 \leqslant r \leqslant 2$ , $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Επιπλέον για το $z$ έχουμε ότι κάτω φράσσεται από το 0 και πάνω από το $4-x^2-y^2 = 4-r^2$, άρα $0 \leqslant z \leqslant 4-r^2$. Επομένως:

$$V = \iiint_R dxdydz = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-r^2} |J|dzd\theta dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-r^2} rdzd\theta dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r \int_0^{4-r^2} dzd\theta dr$$
$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} r[z]_0^{4-r^2} d\theta dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r(4-r^2)d\theta dr \ ,$$

το οποίο είναι ακριβώς το ίδιο με το διπλό ολοκλήρωμα πιο πάνω με αποτέλεσμα $V = 8\pi$.

**Σημείωση:** Λόγω συμμετρίας μπορούμε να υπολογίσουμε το διπλό ολοκλήρωμα ως εξής:




Λόγω συμμετρίας της $f = z$ παίρνουμε το 1ο τεταρτημόριο και υπολογίζουμε σε αυτό το αντίστοιχο ολοκλήρωμα και στο τέλος πολλαπλασιάζουμε ότι βρούμε με 4. Συγκεκριμένα όπως βλέπουμε και στο σχήμα ότι για τα $x$ και $y$ έχουμε:

$$0 \leqslant x \leqslant 2 \ \Rightarrow \ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2} \quad (\text{ή ισοδύναμα } 0 \leqslant y \leqslant 2 \ \Rightarrow \ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{4-y^2}).$$

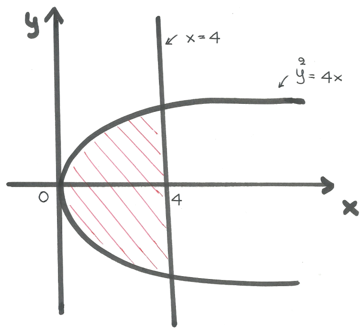
Άρα

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dydx = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4-x^2-y^2)dydx = \int_0^2 \left[(4-x^2)y - \frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{4-x^2}} dx$$
$$= \int_0^2 \left[(4-x^2)\sqrt{4-x^2} - \frac{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right] dx = \int_0^2 \left[(4-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{(4-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right] dx = \frac{2}{3}\int_0^2 (4-x^2)^{\frac{3}{2}} dx = 2\pi \ .$$

Άρα ο ζητούμενος όγκος θα είναι $V = 4(2\pi) = 8\pi$. Όμως η τελευταία ισότητα που δίνει το $2\pi$ δεν είναι άμεση και για το λόγο αυτό προτιμάται η χρήση των πολικών συντεταγμένων.

**5.** Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\iint_D (x^2 - xy)dxdy$ όπου $D$ το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες $y^2 = 4x$ και $x = 4$.

**Λύση:**




Όπως φαίνεται από το σχήμα το χωρίο $D$ θα είναι ανάμεσα στην παραβολή $y^2 = 4x$ και στην κάθετη ευθεία $x = 4$. Επομένως $D = \{(x, y) : \ y^2 \leqslant 4x \ , \ x \leqslant 4\}$. Μένει λοιπόν να υπολογίσουμε τα άκρα ολοκλήρωσης. Αρχικά θα δούμε που κυμαίνεται το $x$ βρίσκοντας τα σημεία τομής των δύο καμπυλών. Αυτά θα δίνονται από την επίλυση του συστήματος:

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ x = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{τα σημεία θα είναι τα } (4,4) \text{ και } (4,-4) \ .$$

• Μπορούμε να ξεκινήσουμε τα άκρα του $x$. Στην περίπτωση αυτή είναι προφανές ότι $0 \leqslant x \leqslant 4$ και για το $y$ βάσει του $D$ έχουμε ότι

$$y^2 \leqslant 4x \ \Rightarrow |y| \leqslant 2\sqrt{x} \ \Rightarrow \ -2\sqrt{x} \leqslant y \leqslant 2\sqrt{x} \ .$$

Άρα $0 \leqslant x \leqslant 4 \ , \ -2\sqrt{x} \leqslant y \leqslant 2\sqrt{x}$. Επομένως το διπλό ολοκλήρωμα θα είναι:

$$\iint_D (x^2 - xy)dxdy \overset{Fubini}{=} \int_0^4 \int_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} (x^2 - xy)dydx = \int_0^4 \left[x^2 y - x\frac{y^2}{2}\right]_{-2\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dx = \int_0^4 4x^2\sqrt{x}dx$$
$$= 4\int_0^4 x^{\frac{5}{2}}dx = 4\left[\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\right]_0^4 = \frac{1024}{7} \ .$$

• (Διαφορετικός τρόπος υπολογισμού) Ομοίως μπορούμε να ξεκινήσουμε με ολοκλήρωση ως προς το $y$. Από τα σημεία τομής και το σχήμα βλέπουμε ότι $-4 \leqslant y \leqslant 4$ και για το $x$ βάσει του $D$ έχουμε ότι:

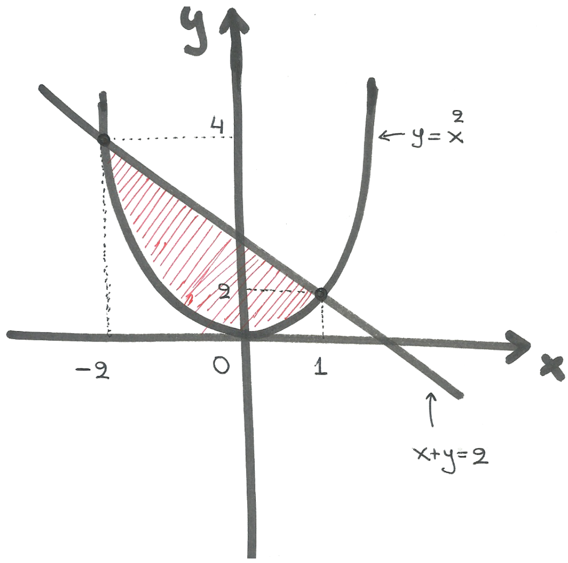
$$y^2 \leqslant 4x \text{ και } x \leqslant 4 \ \Rightarrow \ \frac{y^2}{4} \leqslant x \leqslant 4 \ .$$

Άρα $-4 \leqslant y \leqslant 4 \ , \ \frac{y^2}{4} \leqslant x \leqslant 4$. Επομένως το διπλό ολοκλήρωμα θα είναι:

$$\iint_D (x^2 - xy)dxdy = \int_{-4}^4 \int_{\frac{y^2}{4}}^4 (x^2 - xy)dxdy = \int_{-4}^4 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}y\right]_{\frac{y^2}{4}}^4 dy = \int_{-4}^4 \left[-\frac{y^6}{192} + \frac{y^5}{32} - 8y + \frac{64}{3}\right] dy$$
$$= \left[-\frac{y^7}{192 \cdot 7} + \frac{y^6}{32 \cdot 6} - 4y^2 + \frac{64}{3}y\right]_{-4}^4 = \frac{1024}{7} \ .$$

**6.** Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου $D$ στο $xy$ που περικλείεται από τις καμπύλες $y = x^2$ και $x + y = 2$.

**Λύση:**




Όπως βλέπουμε και από το σχήμα, το χωρίο $D$ περικλείεται από την παραβολή $y = x^2$ και την ευθεία $y = 2 - x$. Το εμβαδόν λοιπόν θα δίνεται από το διπλό ολοκλήρωμα $E = \iint_D dxdy$. Μένει να βρούμε τα άκρα ολοκλήρωσης. Θέλοντας να ξεκινήσουμε τα άκρα ολοκλήρωσης του $x$ (αντίστοιχα θα δουλεύαμε αν θέλαμε να ξεκινήσουμε ως προς $y$) πρέπει αρχικά να βρούμε τα σημεία τομής των δύο καμπυλών. Αυτά τα σημεία θα δίνονται από την επίλυση του συστήματος:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 - x \end{cases} \quad \Rightarrow \text{ τα σημεία θα είναι τα } (-2, 4) \text{ και } (1, 1)\ .$$

Άρα για $-2 \leqslant x \leqslant 1$ έπεται ότι $x^2 \leqslant y \leqslant 2 - x$. Επομένως τα άκρα ολόκλήρωσης θα είναι:

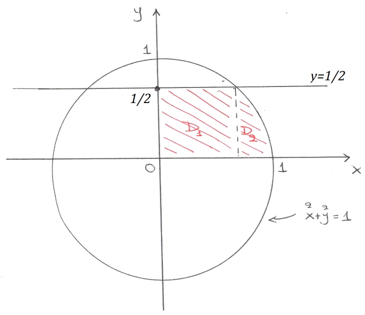
$$-2 \leqslant x \leqslant 1 \ \text{ και } \ x^2 \leqslant y \leqslant 2 - x\ .$$

Το ζητούμενο εμβαδόν θα δίνεται από:

$$\iint_D dxdy \overset{Fubini}{=} \int_{-2}^{1} \int_{x^2}^{2-x} dydx = \int_{-2}^{1} [y]_{x^2}^{2-x} dx = \int_{-2}^{1} \left(2 - x - x^2\right) dx = \left[2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}\ .$$

**7.** Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου $D$ που περικλείεται από τις ευθείες $x = 0$, $y = 0$, $y = 1/2$ και τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$.

**Λύση:**




Από το σχήμα είναι εμφανές ότι βρισκόμαστε στο 1ο τεταρτημόριο. Το ζητούμενο εμβαδόν θα δίνεται από το διπλό ολοκλήρωμα $\iint_D dxdy$. Επομένως εδώ θα ξεκινήσουμε με την μεταβλητή $y$, η οποία κινείται ελέυθερα από 0 εώς $\frac{1}{2}$. Το $x$ όπως είναι εμφανές θα εξαρτάται από τις τιμές του $y$ στο $[0, \frac{1}{2}]$. Συγκεκριμένα όπως φαίνεται από το σχήμα θα κυμαίνεται από το 0 εως την καμπύλη $x = \sqrt{1-y^2}$. Τα άκρα ολοκλήρωσης θα ειναι:

$$0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2} \ \text{ και } \ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{1-y^2}\ .$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από:

$$\iint_D dxdy = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dxdy = \int_0^{\frac{1}{2}} [x]_0^{\sqrt{1-y^2}} dy = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-y^2}dy = \left[\frac{y\sqrt{1-y^2}}{2} + \frac{1}{2}arcsiny\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$= \dots\ .$$

**Σημείωση:** Αν θέλουμε να ξεκινήσουμε με την μεταβλητή $x$ τότε ένας τρόπος είναι να χωρίσουμε το χωρίο $D$ σε δύο κομμάτια $D_1$ και $D_2$ όπως φαίνεται και στο σχήμα. Το $D_1$ είναι ένα ορθογώνιο του οποίου για να προσδιορίσουμε τα άκρα πρέπει να βρούμε το σημείο τομής της $y = \frac{1}{2}$ και του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ στο 1ο τεταρτημόριο. Επομένως λύνουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2} \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \ x = \frac{3}{4} \ \Rightarrow \ \text{Άρα το σημείο τομής θα είναι το } (\frac{3}{4}, \frac{1}{2})\ .$$

Επομένως για το $D_1$ έχουμε τα άκρα ολοκλήρωσης:

$$D_1 = \left\{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant \frac{3}{4}\ ,\ 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}\right\}\ .$$

Για το $D_2$ έχουμε ότι $\dfrac{3}{4} \leqslant x \leqslant 1$ και το $y$ κυμαίνεται από το 0 εώς το $\sqrt{1-x^2}$. Επομένως για το $D_2$ έχουμε τα άκρα ολοκλήρωσης:

$$D_2 = \left\{(x, y) : \frac{3}{4} \leqslant x \leqslant 1\ ,\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1-x^2}\right\}\ .$$

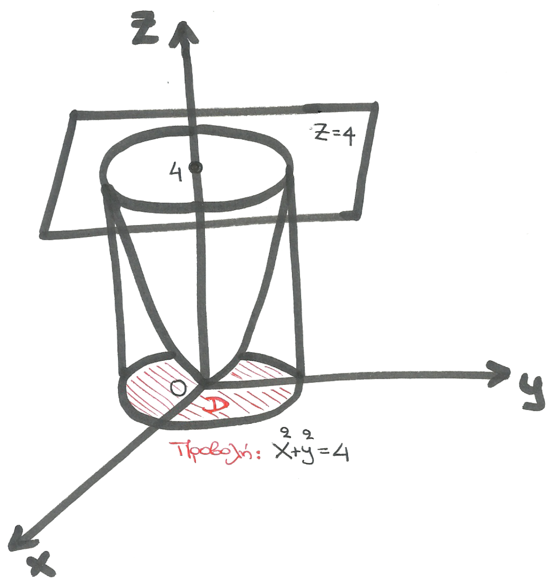
Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν θα δίνεται από:

$$\iint_D dxdy = \iint_{D_1} dxdy + \iint_{D_2} dxdy = \int_0^{\frac{3}{4}} \int_0^{\frac{1}{2}} dydx + \int_{\frac{3}{4}}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dydx = \frac{3}{8} + \int_{\frac{3}{4}}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dydx = \dots$$

και συνεχίζουμε όπως πριν για τον υπολογισμό του δεύτερου ολοκληρώματος.

**8.** Να υπολογισθεί ο όγκος $V$ του στερεού $R$ που περικλείεται από τις επιφάνειες $z = x^2 + y^2$ και $z = 4$.

**Λύση:**




Για τον υπολογισμό του στερεού που φαίνεται και στο σχήμα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε διπλό ολοκλήρωμα είτε τριπλό ολοκλήρωμα.

• (Διπλό ολοκλήρωμα): Έστω $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ η επιφάνεια ενός παραβολοειδούς και $f_2(x, y) = 4$ το επίπεδο. Ο όγκος $V$ του στερεού κάτω απ΄την γραφική παράσταση της $f_2$ και πάνω από την γραφική παράσταση της $f_1$ δίνεται από το διπλό ολοκλήρωμα

$$V = \iint_D (f_2(x, y) - f_1(x, y))\, dxdy = \iint_D \left(4 - x^2 - y^2\right) dxdy \ ,$$

όπου $D$ το χωρίο στο οποίο ορίζονται οι $f_1$ και $f_2$.

**Παρένθεση-Σημείωση:** Το χωρίο $D$ είναι η προβολή του στερεού $R$ στο επίπεδο $xy$ και μπορεί να είναι γνωστό ή μπορεί να μην είναι γνωστό. Στην περίπτωση που δεν είναι γνωστό, απαλοίφοντας το $z$ από τις εξισώσεις των δύο επιφανειών, προκύπτει η καμπύλη $C$ που αποτελεί το σύνορο του χωρίου $D$ που ζητάμε.

Στη συγκεκριμένη άσκηση το χωρίο $D$ είναι προφανώς ο δίσκος ακτίνας 2 όπως φαίνεται και από το σχήμα. Ισοδύναμα αν απαλοίψουμε το $z$ (όπως αναφέρεται στην παρένθεση-σημείωση) θα πάρουμε το σύνορο $C$ του χωρίου $D$. Επομένως επιλύοντας το σύστημα:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 = 0 \\ z = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \ x^2 + y^2 = 4 \ .$$

Άρα το σύνορο του $D$ θα είναι ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ το οποίο σημαίνει ότι το χωρίο θα είναι όντως ο δίσκος ακτίνας 2 όπως προαναφέραμε. Λόγω συμμετρίας του χωρίου, η χρήση πολικών συντεταγμένων μπορεί να διευκολύνει αρκετά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος. Επομένως:

$$x = rcos\theta \ , \quad y = rsin\theta \ , \quad x^2 + y^2 = r^2 \ , \quad J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r \ .$$

Αφού $D = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 4\right\}$, τα άκρα ολοκλήρωσης θα είναι:

$$r^2 \leqslant 4 \ \Leftrightarrow 0 \leqslant r \leqslant 2 \text{ και } 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \ .$$

Ο ζητούμενος όγκος του $R$ θα δίνεται από:

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(4-r^2\right)|J| d\theta dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \left(4-r^2\right) r d\theta dr = \int_0^2 \left(4-r^2\right) r \int_0^{2\pi} d\theta dr = \int_0^2 \left(4-r^2\right) r [\theta]_0^{2\pi} dr$$
$$= 2\pi \int_0^2 \left(4-r^2\right) r dr = 2\pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi \ .$$

• (Τριπλό ολοκλήρωμα):
Ο όγκος $V$ του χωρίου $R$ θα δίνεται από το τριπλό ολοκλήρωμα $V = \iiint_R dxdydz$. Μένει λοιπόν να προσδιορίσουμε τα άκρα ολοκλήρωσης. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές συντεταγμένες καθώς έχουμε συμμετρία του στερεού ως προς τον άξονα $z$. Επομένως:

$$x = rcos\theta \ , \quad y = rsin\theta \ , \quad z = z \ , J = r \ .$$

Όπως και πριν η προβολή του στερεού είναι ο δίσκος $x^2+y^2 \leqslant 4$. Επομένως τα άκρα πάλι θα είναι $0 \leqslant r \leqslant 2$ , $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ . Όσον αφορά τα άκρα του $z$, αφού το στερεό βρίσκεται ανάμεσα στις δύο επιφάνειες $z = x^2+y^2$ και $z = 4$, έπεται ότι $x^2+y^2 \leqslant z \leqslant 4 \ \Leftrightarrow \ r^2 \leqslant z \leqslant 4$. Έχοντας βρει όλα τα άκρα ολοκλήρωσης, ο όγκος $V$ του στερεού $R$ θα δίνεται από:

$$V = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^4 |J| dz d\theta dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^4 r dz d\theta dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} r[z]_{r^2}^4 d\theta dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} (4-r^2) r d\theta dr$$

και συνεχίζουμε ακριβώς όπως στον υπολογισμό πιο πάνω του διπλού ολοκληρώματος.

**Σημείωση-Παρατήρηση:** Είτε στην περίπτωση του διπλού ολοκληρώματος είτε στου τριπλού ολοκληρώματος μπορούμε να δουλέψουμε ως εξής:
Λόγω συμμετρίας του σχήματος μπορούμε να δουλέψουμε στο 1ο τεταρτημόριο και το αποτέλεσμα που θα βρούμα να πολλαπλασιαστεί με το 4. Επομένως απο τα παραπάνω φαίνεται ότι τα άκρα θα είναι:

$$0 \leqslant x \leqslant 2 \ , \quad 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2} \ , \quad x^2+y^2 \leqslant z \leqslant 4 \ .$$

Επομένως έχουμε για το διπλό ολοκλήρωμα:

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (4-x^2-y^2) dy dx = \ ... \ = 2\pi$$

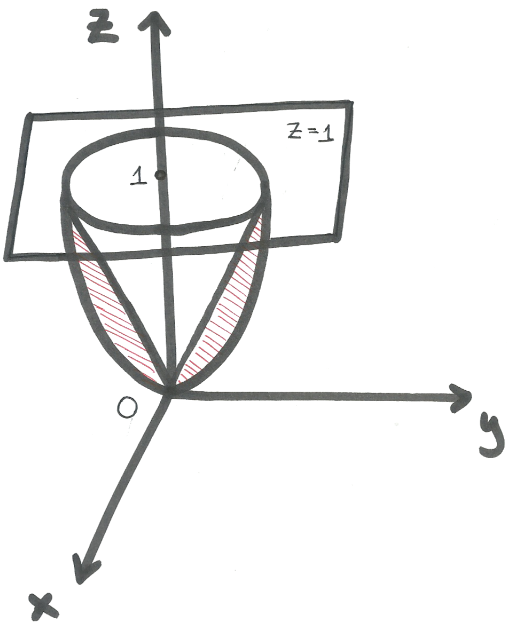
και για το τριπλό ολοκλήρωμα:

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_{x^2+y^2}^4 dz dy dx = \ ... \ = 2\pi$$

Άρα ο ζητούμενος όγκος θα είναι το αποτέλεσμα $\cdot 4$, δηλαδή $V = 8\pi$. Ωστόσο ο υπολογισμός δεν είναι τόσο άμεσος όσο με τις πολικές και τις κυλινδρικές αντίστοιχα και γιαυτό τον λόγο ενδείκνυται η αλλαγή μεταβλητής.

**9.** Να υπολογισθεί ο όγκος $V$ του στερεού $R$ που περικλείεται από τις επιφάνειες $z = x^2 + y^2$ και $z^2 = x^2 + y^2$.

**Λύση:**




Όπως φαίνεται και στο σχήμα το στερεό $R$ περικλείεται από το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$ (κάτω) και τον κώνο $z^2 = x^2 + y^2 \;\Rightarrow\; z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (πάνω). Επομένως όπως και στις προηγούμενες ασκήσεις θα υπολογίσουμε τον όγκο είτε με χρήση διπλού είτε με χρήση τριπλού ολοκληρώματος.

• (Διπλό Ολοκληρωμα): Έστω $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ και $f_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ για $(x, y) \in D$ όπου $D$ η ορθή προβολή του στερεού $R$ στο $xy$ επίπεδο και το οποίο $D$, σε πρίπτωση που δεν είναι γνωστό, μπορεί να υπολογιστεί όπως στην άσκηση 8. Ο όγκος του στερεού $R$ που βρίσκεται ανάμεσα στις γραφικές παραστάσεις των $f_1$ και $f_2$, θα δίνεται από:

$$V = \iint_D (f_2(x, y) - f_1(x, y))\, dxdy = \iint_D \left(\sqrt{x^2 + y^2} - x^2 - y^2\right) dxdy$$

Επομένως μένει να βρούμε το χωρίο $D$ και μαζί με αυτό τα άκρα ολοκλήρωσης για τα $x$ και $y$. Είναι προφανές ότι το $D$ θα είναι δίσκος όπως φαίνεται και στο σχήμα, όμως δεν γνωρίζουμε άμεσα τι ακτίνας. Για το λόγο αυτό απαλοίφουμε το $z$ το οποίο θα μας δώσει το σύνορο του $D$ (το οποίο προφανώς εδώ θα είναι ένας κύκλος σύνορο του δίσκου). Για να απαλοίψουμε το $z$ επιλύουμε το σύστημα:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \quad \Rightarrow\; z = z^2 \;\Rightarrow z = 0\ ,\ z = 1\ .$$

Επομένως έχουμε ότι τέμνονται στο επίπεδο $z = 0$ στο $(0, 0)$ (αφού $x^2 + y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \;\Rightarrow\; x = y = 0$) και στο επίπεδο $z = 1$ με καμπύλη τομής $x^2 + y^2 = 1$. Επομένως η ορθή προβολή του στερεού $R$ είναι ο δίσκος $D = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$. Αφού λοιπόν δουλεύουμε σε δίσκο, είναι προφανές ότι η χρήση πολικών συντεταγμένων θα διευκολύνει αρκετά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος. Άρα:

$$x = rcos\theta\ , \quad y = rsin\theta\ , \quad x^2 + y^2 = r^2\ , \quad J = r\ .$$

Τα άκρα ολοκλήρωσης για το $D$ θα είναι $x^2 + y^2 \leqslant 1 \;\Leftrightarrow\; r^2 \leqslant 1 \;\Leftrightarrow 0 \leqslant r \leqslant 1$ όσον αφορά το $r$, ενώ για το $\theta$ αφού θέλουμε ολόκληρο το δίσκο θα έχουμε $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Επομένως τα άκρα ολοκλήρωσης θα είναι:

$$0 \leqslant r \leqslant 1 \quad \text{και} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\ .$$

Επομένως ο ζητούμενος όγκος θα είναι:

$$V = \iint_D \left(\sqrt{x^2+y^2} - x^2 - y^2\right) dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r - r^2)|J| d\theta dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r - r^2) r d\theta dr$$
$$= \int_0^1 (r^2 - r^3) \int_0^{2\pi} d\theta dr = \int_0^1 (r^2 - r^3)[\theta]_0^{2\pi} dr = 2\pi \int_0^1 (r^2 - r^3) dr = 2\pi \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6} \ .$$

• (Τριπλό Ολοκλήρωμα):
Ο όγκος $V$ του στερεού $R$ θα δίνεται απο το τριπλό ολοκλήρωμα $\iiint_R dxdydz$. Μένει να βρούμε τα άκρα ολοκλήρωσης. Τα $x$ και $y$ θα ανήκουν στο χωρίο $D$ το οποίο είναι η ορθή προβολή του στερεού στο $xy$ επίπεδο. Επομένως το $D$ και επομένως τα άκρα για τα $x$ και τα $y$ βρίσκονται με απαλοιφή του $z$, ακριβώς όπως πάνω στην επίλυση με διπλό ολοκλήρωμα. Όσον αφορά τα άκρα του $z$, φαίνεται και από το σχήμα ότι θα κυμαίνεται από το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$ ως τον κώνο $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Άρα $x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$. Εδώ καθώς βρισκόμαστε στις 3 διαστάσεις και έχουμε συμμετρία του στερεού ως προς τον άξονα $z$, η χρήση κυλινδρικών συντεταγμένων θα διευκολύνει τον υπολογισμό του ολοκληρώματος όπως και οι πολικές στο διπλό ολοκλήρωμα.

$$x = rcos\theta \ , \quad y = rsin\theta \ , \quad z = z \ , \quad x^2 + y^2 = r^2 \ , \quad J = r \ .$$

Τα άκρα για το $r$ και το $\theta$ θα είναι ακριβώς τα ίδια με το διπλό ολοκλήρωμα, δηλαδή
$0 \leqslant r \leqslant 1$ , $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Όσον αφορά το $z$, έχουμε ότι
$x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2+y^2} \ \Leftrightarrow \ r^2 \leqslant z \leqslant r$ . Επομένως τα άκρα ολοκλήρωσης θα είναι:

$$0 \leqslant r \leqslant 1 \ , \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \ , \quad r^2 \leqslant z \leqslant r \ .$$

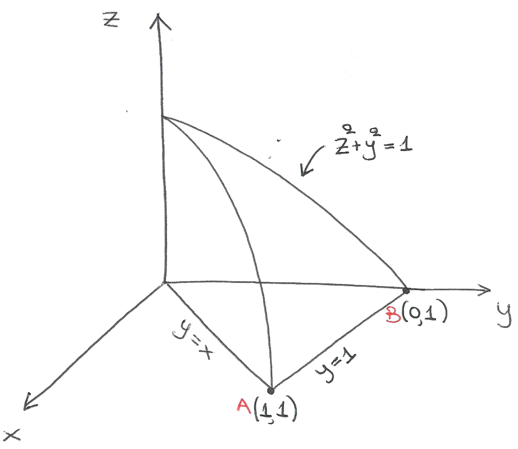
Άρα ο ζητούμενος όγκος θα δίνεται από:

$$V = \iiint_R dxdydz = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^{r} |J| dz d\theta dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^{r} r dz d\theta dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r \int_{r^2}^{r} dz d\theta dr r$$
$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r[z]_{r^2}^{r} d\theta d = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r(r - r^2) d\theta dr$$

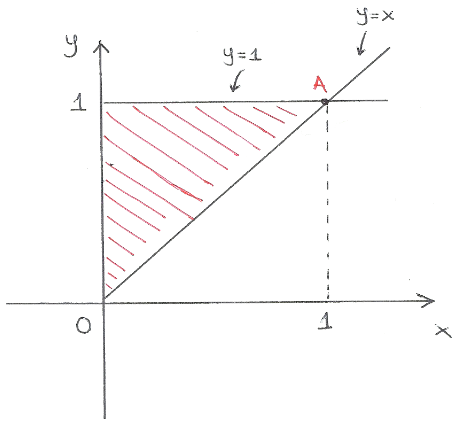
και συνεχίζουμε τον υπολογισμό ακριβώς όπως στο διπλό ολοκλήρωμα πιο πάνω.

**10.** Να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που βρίσκεται στο 1ο όγδοο των αξόνων και περικλείεται από τις επιφάνειες $z^2 + y^2 = 1$, $x = 0$ και $y = x$.

**Λύση:**




• (Διπλό Ολοκλήρωμα):
Όπως φαίνεται και στο σχήμα το στερεό φράσσεται από πάνω από την επιφάνεια $z^2 + y^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; z = \sqrt{1-y^2}$ (1ο όγδοο των αξόνων). Έστω $z = f(x,y) = \sqrt{1-y^2}$ για $(x,y) \in D$, όπου $D$ η ορθή προβολή του στερεού στο $xy$ επίπεδο. Ο όγκος $V$ του στερεού $R$ θα δίνεται από το διπλό ολοκλήρωμα $V = \iint_D f(x,y)dxdy$. Μένει να προσδιορίσουμε την ορθή προβολή του $R$ στο $xy$ επίπεδο και επομένως και τα άκρα ολοκλήρωσης.




Για $z = 0$ στην $z^2 + y^2 = 1$ παίρνουμε την προβολή $y^2 = 1 \;\Rightarrow y = 1$ (1ο όγδοο). Οι ευθείες $y = x$ και $y = 1$ θα σχηματίζουν ένα τρίγωνο στο $xy$ επίπεδο όπως φαίνεται και στο σχήμα με σημείο τομής που δίνεται απο την επίλυση του συστήματος τους, δηλαδή $y = 1 = x$. Άρα το σημείο τομής θα είναι το A(1,1). Θα ξεκινήσουμε από το $y$ το οποίο θα κυμαίνεται από 0 εώς 1 όπως φαίνεται και στο σχήμα (αντίστοιχα δουλεύουμε αν θέλουμε να ξεκινήσουμε από το $x$). Το $x$ θα εξαρτάται από το $y$ και θα κυμαίνεται από 0 εώς το $x = y$. Άρα τα άκρα για τα $x$ και $y$ στο τρίγωνο (προβολή του στερεού) θα είναι:

$$0 \leqslant y \leqslant 1 \text{ και } 0 \leqslant x \leqslant y\ .$$

(ή ισοδύναμα αν θέλαμε να ξεκινήσουμε από το $x$ θα ήταν $0 \leqslant x \leqslant 1$ και $x \leqslant y \leqslant 1$). Ο ζητούμενος όγκος θα δίνεται από:

$$V = \iint_D f(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_0^y \sqrt{1-y^2}dxdy \int_0^1 \sqrt{1-y^2} \int_0^y dxdy = \int_0^1 \sqrt{1-y^2}[x]_0^y dy$$

$$\int_0^1 y\sqrt{1-y^2}dy = \int_0^1 y(1-y^2)^{\frac{1}{2}}dy = -\frac{1}{2}\left[\frac{2(1-y^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\ .$$

• (Τριπλό ολοκλήρωμα):
Ο ζητούμενος όγκος θα δίνεται από το τριπλό ολοκλήρωμα $V = \iiint_R dxdydz$. Μένει λοιπόν να προσδιορίσουμε τα άκρα ολοκλήρωσης. Τα $x$ και $y$ θα ανήκουν στην ορθή προβολή $D$ του στερεού στο $xy$ επίπεδο, η οποία υπολογίζεται ακριβώς όπως πάνω στο διπλό ολοκλήρωμα. Επομένως $D = \{(x, y) : 0 \leqslant y \leqslant 1\ ,\ 0 \leqslant x \leqslant y\}$. Όσον αφορά τα άκρα ολοκλήρωσης του $z$, είναι προφανές ότι θα κυμαίνεται από το $z = 0$ εώς την επιφάνεια $z^2+y^2 = 1 \Rightarrow z = \sqrt{1 - y^2}$. Άρα τα άκρα ολοκλήρωσης θα είναι:

$$0 \leqslant y \leqslant 1\ , \quad 0 \leqslant x \leqslant y\ , \quad 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1 - y^2}\ .$$

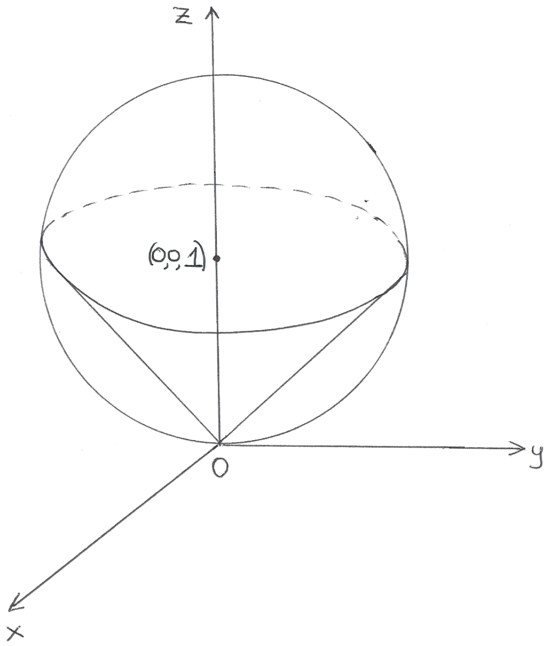
Ο ζητούμενος όγκος θα είναι:

$$V = \iiint_R dxdydz \overset{Fubini}{=} \int_0^1 \int_0^y \int_0^{\sqrt{1-y^2}} dzdxdy = \int_0^1 \int_0^y [z]_0^{\sqrt{1-y^2}} dxdy = \int_0^1 \int_0^y \sqrt{1 - y^2}dxdy$$

και συνεχίζουμε ακριβώς όπως πιο πάνω στο διπλό ολοκλήρωμα.

**11.** Να υπολογισθεί ο όγκος $V$ του στερεού $R$ που περικλείεται από τις επιφάνειες $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ και $z^2 = x^2 + y^2$.

**Λύση:**




Το στερεό $R$ θα περικλείεται από την επιφάνεια

$$x^2+y^2+z^2 = 2z \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2z = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2z+1-1 = 0 \Leftrightarrow x^2+y^2+(z-1)^2 = 1\ ,$$

η οποία θα είναι σφαίρα με κέντρο το $(0, 0, 1)$ και ακτίνα 1. Επιπλέον θα περικλείεται από τον κώνο $z^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Το στερεό $R$ θα είναι επομένως εντος της σφαίρας και του κώνου όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο ζητούμενος όγκος θα δίνεται από το τριπλό ολοκλήρωμα $V = \iiint_R dxdydz$. Μένει να προσδιορίσουμε τα άκρα ολοκλήρωσης. Αφού δουλεύουμε σε σφαίρα η χρήση σφαιρικών συντεταγμένων θα διευκολύνει αρκετά τον υπολογισμό του ολοκληρώματος. Επομένως:

$$x = rcos\theta sin\phi\ , \quad y = rsin\theta sin\phi\ , \quad z = rcos\phi\ , \quad x^2+y^2+z^2 = r^2\ , \quad tan\phi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\ , J = -r^2sin\phi\ .$$

Αφού θέλουμε να είμαστε εντός της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=2z$ έχουμε ότι

$$x^2+y^2+z^2 \leqslant 2z \ \Rightarrow r^2 \leqslant 2rcos\phi \ \Rightarrow \ 0 \leqslant r \leqslant 2cos\phi \ .$$

Για την γωνία $\phi$ έχουμε ότι θα κυμαίνεται απο 0 εώς την γωνία που σχηματίζει το άξονας $z$ με τον κώνο. για να βρούμε την γωνία που σχηματίζει ο κώνος χρησιμοποιούμε ότι:

$$tan\phi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \overset{z=\sqrt{x^2+y^2}}{=} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1 \ \Rightarrow \ \phi = \frac{\pi}{4} \ . \text{ Επομένως } \ 0 \leqslant \phi \leqslant \frac{\pi}{4} \ .$$

Η γωνία $\theta$ δεν περιορίζεται απο κάτι, επομένως $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Ο ζητούμενος όγκος θα δίνεται από:

$$V = \iiint_R dxdydz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2cos\phi} |J|drd\phi d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{2cos\phi} r^2 sin\phi drd\phi d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin\phi \int_0^{2cos\phi} r^2 drd\phi d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin\phi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2cos\phi} d\phi d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos^3\phi sin\phi d\phi d\theta$$
$$= \frac{8}{3}\int_0^{2\pi}\left[-\frac{cos^4\phi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = \pi \ .$$

**12.** Να υπολογισθεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S \sqrt{x^2+y^2}dS$, όπου $S$ η επιφάνεια που ορίζεται από την διπαραμέτρηση $\overrightarrow{r}(u,v) = (ucosv, usinv, v)$ για $(u,v) \in [0,1]\times[0,2\pi]$.

**Λύση:**

Αφού έχουμε την παραμέτρηση της επιφάνειας $S$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$\iint_S f(x,y)dS = \iint_D f\left(\overrightarrow{r}(u,v)\right) \|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v\| \, dudv \ ,$$

όπου $D$ το πεδίο ορισμού της παραμέτρησης $\overrightarrow{r}$.

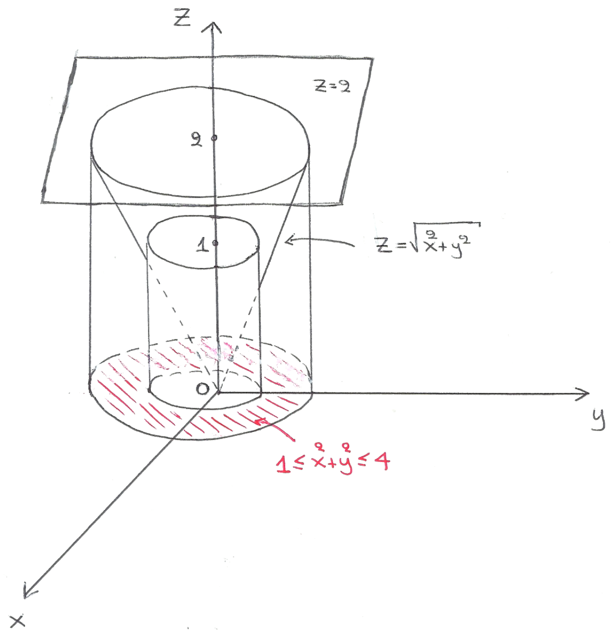
- $f\left(\overrightarrow{r}(u,v)\right) = \sqrt{u^2cos^2v + u^2sin^2v} = \sqrt{u^2} = u$ .
- $\overrightarrow{r}_u = (cosv, sinv, 0)$
- $\overrightarrow{r}_v = (-usinv, ucosv, 1)$
- $\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \overrightarrow{i} sinv - \overrightarrow{j} cosv + \overrightarrow{k} u = (sinv, -cosv, u)$ .
- $\|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v\| = \sqrt{sin^2v + cos^2v + u^2} = \sqrt{1+u^2}$ .

Επομένως έχουμε:

$$\iint_s \sqrt{x^2+y^2}dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 u\sqrt{1+u^2}dudv \overset{Fubini}{=} \int_0^1 u\sqrt{1+u^2}\int_0^{2\pi} dvdu = 2\pi\int_0^1 u\sqrt{1+u^2}du$$
$$= 2\pi\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1+u^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = ...$$

**13.** Να υπολογισθεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S z^2 dS$ , όπου $S$ είναι το τμήμα του κώνου $z=\sqrt{x^2+y^2}$ για $(x,y)\in D=\left\{(x,y): 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\right\}$

**Λύση:**




Αφού έχουμε την επιφάνεια με εξίσωση $z=z(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ όπου $(x,y)\in D$, θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$\iint_S f(x,y,z)dS=\iint_D f\left(x,y,z(x,y)\right)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy \ ,$$

όπου $D=\left\{(x,y): 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\right\}$ η προβολή της επιφάνειας $S$ στο επίπεδο $xy$.

- $f(x,y,z(x,y))=z^2(x,y)=x^2+y^2$
- $z_x=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \ \Rightarrow \ z_x^2=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$
- $z_y=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \ \Rightarrow \ z_y^2=\dfrac{y^2}{x^2+y^2}$
- $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}=\sqrt{2}$

Άρα:

$$\iint_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\iint_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4}(x^2+y^2)\sqrt{2}dxdy=\sqrt{2}\iint_{1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4}(x^2+y^2)dxdy \ .$$

Μένει να υπολογίσουμε τα άκρα ολοκλήρωσης. Επειδή δουλέυουμε στον δακτύλιο που περιέχεται ανάμεσα στους κύλους ακτίνας 1 και 4 είναι βολική η χρήση πολικών συντεταγμένων.

$$x=rcos\theta \ , \quad y=rsin\theta \ , \quad x^2+y^2=r^2 \ , \quad J=r \ .$$

Για την γωνία $\theta$ δεν υπάρχει περιορισμός επομένως θα κυμαίνεται απο 0 εώς $2\pi$. Όσον αφορά το $r$ έχουμε ότι

$$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4 \ \Leftrightarrow 1\leqslant r^2\leqslant 4 \ \Leftrightarrow \ 1\leqslant r\leqslant 2 \ .$$

Επομένως τα άκρα ολοκλήρωσης θα είναι:

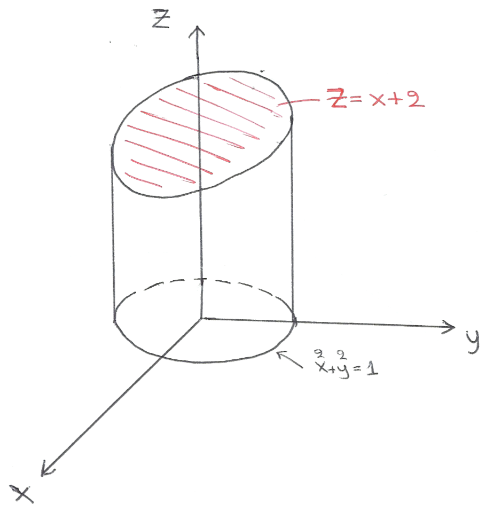
$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \ \text{ και } \ 1\leqslant r\leqslant 2 \ .$$

Οπότε:

$$\sqrt{2}\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^2 r^2|J|drd\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_1^2 r^3drd\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2 d\theta = \frac{15\pi\sqrt{2}}{2}\ .$$

**14.** Να υπολογισθεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\iint_S (xz+yz)dS$, όπου $S$ είναι το τμήμα της επιφάνειας $z = x+2$ που περιέχεται μέσα στον κύλινδρο $x^2+y^2=1$.

**Λύση:**




Για την επιφάνεια $S$ έχουμε $z = z(x,y) = x+2$ για $(x,y) \in D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leqslant 1\}$. Επομένως όπως και στην προηγούμενη άσκηση θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f\left(x,y,z(x,y)\right)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy\ ,$$

Άρα:

$$f(x,y,z(x,y)) = xz(x,y)+yz(x,y) = x(x+2)+y(x+2) = (x+2)(x+y)$$
$$z_x = 1$$
$$z_y = 0$$
$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Επομένως:

$$\iint_D (x+y)(x+2)\sqrt{2}dxdy = \sqrt{2}\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}(x+y)(x+2)dxdy\ .$$

Για τον υπολογισμό του διπλού ολοκληρώματος αφού βρισκόμαστε στον μοναδιαίο δίσκο είναι βολική η χρήση πολικών συντεταγμένων.

$$x = rcos\theta\ ,\quad y = rsin\theta\ ,\quad x^2+y^2 = r^2\ ,\quad J = r\ .$$

Έχουμε ότι $x^2+y^2 \leqslant 1 \ \Rightarrow\ r^2 \leqslant 1 \ \Rightarrow\ 0 \leqslant r \leqslant 1$. Τα άκρα ολοκλήρωσης φαίνεται άμεσα ότι θα είναι:

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \ \text{ και } \ 0 \leqslant r \leqslant 1\ . \tag{1}$$

Επομένως:

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{2}\iint_{x^2+y^2\leqslant 1}(x+y)(x+2)dxdy=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1(rcos\theta+rsin\theta)(rcos\theta+2)|J|drd\theta\\
&\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2(cos\theta+sin\theta)(rcos\theta+2)drd\theta\\
&=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(r^3cos^2\theta+2r^2cos\theta+r^3sin\theta cos\theta+2r^2sin\theta\right)drd\theta\\
&=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}cos^2\theta+\frac{2}{3}cos\theta+\frac{1}{4}sin\theta cos\theta+\frac{2}{3}sin\theta\right)d\theta=...=\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\ .
\end{aligned}
$$