ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ
Φροντιστηριακό μάθημα 21-12-2018 (Μέρος Α)

Μήκος καμπύλης και Μέση τιμή συνάρτησης κατά μήκος καμπύλης

Ορισμός 1:
Έστω $\Gamma = \Gamma(\overrightarrow{r})$ μία απλή και λεία παραμετρική καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από την απλή και λεία παραμέτρηση $\overrightarrow{r} : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Ως **μήκος** $l(\Gamma)$ **της καμπύλης** Γ ορίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$l(\Gamma) := \int_a^b ||\overrightarrow{r}'(t)||\, dt$$

Ορισμός 2:
Έστω $\Gamma = \Gamma(\overrightarrow{r})$ μία απλή και λεία παραμετρική καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από την απλή και λεία παραμέτρηση $\overrightarrow{r} : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ και έχει μήκος $l(\Gamma) > 0$. Επίσης, έστω $f : \Gamma \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση. Ως **μέση τιμή** $\mu(f,\Gamma)$ **της συνάρτησης** f **κατά μήκος της καμπύλης** Γ ορίζεται (ο πραγματικός αριθμός):

$$\mu(f,\Gamma) := \frac{1}{l(\Gamma)} \int_\Gamma f\, ds$$

Σχόλιο: Το παραπάνω επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι: $\int_\Gamma f\, ds = \int_a^b f(\overrightarrow{r}(t))||\overrightarrow{r}'(t)||\, dt$,
όπου $\overrightarrow{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ άρα $f(\overrightarrow{r}(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$
και $\overrightarrow{r}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ επομένως $||\overrightarrow{r}'(t)|| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$.

Άσκηση 1:
Να βρεθεί η μέση τιμή της συνάρτησης $f(x,y,z) = xy + z$ κατά μήκος της παραμετρικής καμπύλης $\Gamma = \Gamma(\overrightarrow{r})$ η οποία ορίζεται από την παραμέτρηση $\overrightarrow{r}(t) = (\, t - sint\, ,\, 2\, ,\, cost\,)$, $t \in [0, 2\pi]$.
Λύση:
Το ζητούμενο ολοκλήρωμα δίνεται στον Ορισμό 2. Δηλαδή, θα υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\Gamma f\, ds$, επίσης θα υπολογίσουμε το μήκος της καμπύλης $l(\Gamma)$ και τέλος θα βρούμε τη ζητούμενη μέση τιμή $\mu(f,\Gamma)$ από τον τύπο του Ορισμού 2, δηλαδή διαιρώντας το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα με το μήκος της καμπύλης.

Από $\overrightarrow{r}(t) = (\, t - sin(t)\, ,\, 2\, ,\, cos(t)\,)$ έχουμε ότι $\overrightarrow{r}'(t) = (\, 1 - cos(t)\, ,\, 0\, ,\, -sin(t)\,)$ και άρα

$$||\overrightarrow{r}'(t)|| = \sqrt{(1-cos(t))^2 + 0^2 + (-sin(t))^2} = \sqrt{1 - 2cos(t) + cos^2(t) + sin^2(t)} = \sqrt{2 - 2cos(t)}$$

$$= \sqrt{2(1-cos(t))} = \sqrt{4sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} = 2sin\left(\frac{t}{2}\right)$$

[όπου χρησιμοποιήσαμε τις ταυτότητες $sin^2(t) + cos^2(t) = 1$ και $sin^2\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1-cos(t)}{2}$].

Επίσης, (από το Σχόλιο) έχουμε ότι $f(\overrightarrow{r}(t)) = x(t)y(t) + z(t) = (t - sin(t))2 + cos(t) = 2t - 2sin(t) + cos(t)$.
Επομένως, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\Gamma f\, ds$ δίνεται από:

$$\int_\Gamma f\, ds = \int_0^{2\pi} f(\overrightarrow{r}(t))||\overrightarrow{r}'(t)||dt = \int_0^{2\pi} \left(\{2t - 2sin(t) + cos(t)\}\, 2sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\left\{ 2t - 4sin\left(\frac{t}{2}\right) cos\left(\frac{t}{2}\right) + 2cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1 \right\} 2sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) dt$$

[όπου χρησιμοποιήσαμε τις ταυτότητες $sin(t) = 2sin\left(\frac{t}{2}\right) cos\left(\frac{t}{2}\right)$ και $cos(t) = 2cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - 1$]

$$= \int_0^{2\pi} \left(4tsin\left(\frac{t}{2}\right) - 8sin^2\left(\frac{t}{2}\right) cos\left(\frac{t}{2}\right) + 4cos^2\left(\frac{t}{2}\right) sin\left(\frac{t}{2}\right) - 2sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(4t \left(\frac{-cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{1}{2}} \right)' - 8 \left(\frac{sin^3\left(\frac{t}{2}\right)}{3\frac{1}{2}} \right)' + 4 \left(\frac{-cos^3\left(\frac{t}{2}\right)}{3\frac{1}{2}} \right)' - 2 \left(\frac{-cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{1}{2}} \right)' \right) dt$$
$$= \left\{ 8\left[-tcos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} - 8\int_0^{2\pi} \left(-cos\left(\frac{t}{2}\right)\right) dt \right\} - \frac{16}{3}\left[sin^3\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} - \frac{8}{3}\left[cos^3\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi} + 4\left[cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi}$$
$$= \left\{ 8(-2\pi cos(\pi) - 0) - 8 \left[\frac{-sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{1}{2}} \right]_0^{2\pi} \right\} - \frac{16}{3}\left(sin^3(\pi) - sin^3(0)\right) - \frac{8}{3}\left(cos(\pi) - cos(0)\right)$$
$$+ 4\left(cos(\pi) - cos(0)\right)$$
$$= \{8\left((-2\pi)(-1) - 0\right) - 16\{sin(\pi) - sin(0)\} - \frac{16}{3}(0-0) - \frac{8}{3}\left((-1)^3 - (1)^3\right) + 4(-1-1)$$
$$= 16\pi - 16(0) - \frac{16}{3}(0) - \frac{8}{3}(-2) + 4(-2) = 16\pi + \frac{16}{3} - 8 = 8(2\pi - \frac{1}{3})$$

[καθώς $cos(0) = 1, cos(\pi) = -1, sin(0) = 0, sin(\pi) = 0$].
{Υπενθύμιση: $\left(g^3(h(t))\right)' = 3g^2(h(t))g'(h(t))h'(t)$, επομένως π.χ. $\left(sin^3\left(\frac{t}{2}\right)\right)' = 3sin^2\left(\frac{t}{2}\right) cos\left(\frac{t}{2}\right)\frac{1}{2}$}.

Επίσης, το μήκος $l(\Gamma)$ της καμπύλης Γ (από τον Ορισμό 1) δίνεται από:

$$l(\Gamma) = \int_0^{2\pi} ||\overrightarrow{r}'(t)||\, dt = \int_0^{2\pi} 2sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = \int_0^{2\pi} 2 \left(\frac{-cos\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{1}{2}} \right)' dt = 4\left[-cos\left(\frac{t}{2}\right)\right]_0^{2\pi}$$
$$= 4(-cos(\pi) + cos(0)) = 4(-(-1) + 1) = 8$$

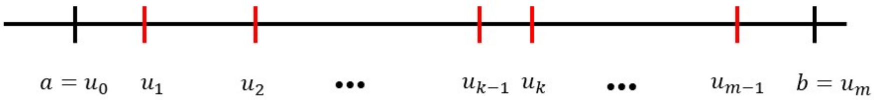
Άρα τελικά η ζητούμενη μέση τιμή είναι ίση με:

$$\mu(f, \Gamma) := \frac{1}{l(\Gamma)} \int_\Gamma f\, ds = \frac{1}{8} 8(2\pi - \frac{1}{3}) = 2\pi - \frac{1}{3}\,.$$

Αριθμητικό Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα μίας κατά τμήματα C^1 συνάρτησης

Ορισμός 3:
Έστω $\Gamma = \Gamma(\overrightarrow{r})$ μία κατά τμήματα C^1 παραμετρική καμπύλη του $\mathbb{R}^3$, που ορίζεται από την κατά τμήματα C^1 παραμέτρηση $\overrightarrow{r} : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Επίσης, έστω $P = [a = u_0 < u_1 < u_2 < ... < u_m = b]$ μία διαμέριση του $[a,b]$ η οποία προσδιορίζει τα C^1 τόξα $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_m$ της καμπύλης Γ (δηλαδή $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + ... + \Gamma_m$). Επίσης, έστω $f : \Gamma \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ μία συνεχης συνάρτηση. Τότε ορίζουμε ως **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πρώτου είδους (ή βαθμωτό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ή αριθμητικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα)** $\int_\Gamma f\,ds$ της συνάρτησης f κατά μήκος της καμπύλης Γ, το άθροισμα των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων της f κατά μήκος των Γ_k για $k = 1, 2, ..., m$, δηλαδή:

$$\int_\Gamma f\,ds := \sum_{k=1}^{m} \int_{\Gamma_k} f\,ds = \sum_{k=1}^{m} \int_{u_{k-1}}^{u_k} f(\overrightarrow{r}(t)) ||\overrightarrow{r}'(t)||\,dt$$



Σχήμα: Διαμέριση $P = [a = u_0 < u_1 < u_2 < ... < u_m = b]$

Άσκηση 2:
Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\Gamma (x + y^2 + e^z) ds$ κατά μήκος της καμπύλης $\Gamma = \Gamma(\overrightarrow{r})$ η οποία ορίζεται από την παραμέτρηση $\overrightarrow{r}(t) = (\,|t| + t\,,\,|t-1|\,,\,t) : [-1,3] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$.
Λύση:
Η καμπύλη Γ δεν είναι C^1 στα σημεία $t = 0$ και $t = 1$ (δηλαδή στα σημεία που τα απόλυτα αλλάζουν τιμή). Θεωρώντας λοιπόν τη διαμέριση $P = [-1 < 0 < 1 < 3]$ του $[-1,3]$ η καμπύλη Γ είναι κατά τμήματα C^1 (ως προς αυτή τη διαμέριση) και ισχύει ότι:
• Στο $[-1,0]$ διάστημα της διαμέρισης έχουμε: $|t| = -t$ και $|t-1| = 1-t$.
Άρα $\overrightarrow{r}(t) = (\,-t+t\,,\,1-t\,,\,t\,) = (\,0\,,\,1-t\,,\,t\,)$.
Άρα $\overrightarrow{r}'(t) = (\,0\,,\,-1\,,\,1\,) \Rightarrow ||\overrightarrow{r}'(t)|| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
• Στο $[0,1]$ διάστημα της διαμέρισης έχουμε: $|t| = t$ και $|t-1| = 1-t$.
Άρα $\overrightarrow{r}(t) = (\,2t\,,\,1-t\,,\,t)$.
Άρα $\overrightarrow{r}'(t) = (\,2\,,\,-1\,,\,1\,) \Rightarrow ||\overrightarrow{r}'(t)|| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$.
• Στο $[1,3]$ διάστημα της διαμέρισης έχουμε: $|t| = t$ και $|t-1| = t-1$.
Άρα $\overrightarrow{r}(t) = (\,2t\,,\,t-1\,,\,t)$.
Άρα $\overrightarrow{r}'(t) = (\,2\,,\,1\,,\,1\,) \Rightarrow ||\overrightarrow{r}'(t)|| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$.

Επομένως, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\Gamma f\,ds$ της συνάρτησης $f(x,y,z) = x + y^2 + e^z$ κατά μήκος της καμπύλης $\Gamma = \Gamma(\overrightarrow{r})$ δίνεται από τον Ορισμό 3 ως το άθροισμα:

$$\int_\Gamma f\,ds = \int_{-1}^{0} f(\overrightarrow{r}(t))||\overrightarrow{r}'(t)||\,dt + \int_{0}^{1} f(\overrightarrow{r}(t))||\overrightarrow{r}'(t)||\,dt + \int_{1}^{3} f(\overrightarrow{r}(t))||\overrightarrow{r}'(t)||\,dt$$

$$= \int_{-1}^{0} (0 + (1-t)^2 + e^t)\sqrt{2}\,dt + \int_{0}^{1} (2t + (1-t)^2 + e^t)\sqrt{6}\,dt + \int_{1}^{3} (2t + (t-1)^2 + e^t)\sqrt{6}\,dt$$

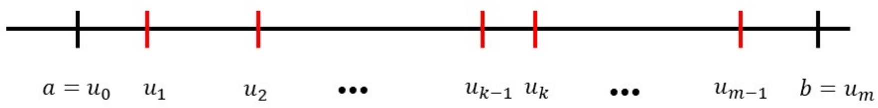
$$= \sqrt{2}\int_{-1}^{0} (1 - 2t + t^2 + e^t)dt + \sqrt{6}\int_{0}^{1} (2t + 1 - 2t + t^2 + e^t)dt + \sqrt{6}\int_{1}^{3} (2t + t^2 - 2t + 1 + e^t)dt$$

$$= \sqrt{2}\int_{-1}^{0}(1-2t+t^2+e^t)dt + \sqrt{6}\int_{0}^{3}(1+t^2+e^t)dt$$
$$= \sqrt{2}\left([t]_{-1}^{0} - [t^2]_{-1}^{0} + \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[e^t\right]_{-1}^{0}\right) + \sqrt{6}\left([t]_0^3 + \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^3 + \left[e^t\right]_0^3\right)$$
$$= \sqrt{2}\left((0-(-1)) - (0-(-1)^2) + \frac{1}{3}\left(0-(-1)^3\right) + \left(1-e^{-1}\right)\right) + \sqrt{6}\left((3-0) + \frac{1}{3}\left(3^3-0\right) + \left(e^3-1\right)\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(\frac{10}{3} - \frac{1}{e}\right) + \sqrt{6}\left(11+e^3\right)$$

Διανυσματικό Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα μίας κατά τμήματα C^1 συνάρτησης

Ορισμός 4:
Έστω $\Gamma = \Gamma(\vec{r})$ μία κατά τμήματα C^1 παραμετρική καμπύλη του $\mathbb{R}^3$, που ορίζεται από την κατά τμήματα C^1 παραμέτρηση $\vec{r} : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Έπίσης, έστω $P = [a = u_0 < u_1 < u_2 < ... < u_m = b]$ μία διαμέριση του $[a,b]$ η οποία προσδιορίζει τα C^1 τόξα $\Gamma_1, \Gamma_2, ..., \Gamma_m$ της καμπύλης Γ (δηλαδή $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + ... + \Gamma_m$). Επίσης, έστω $\vec{F}\Gamma \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ μία συνεχης συνάρτηση. Τότε ορίζουμε ως **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δευτερου είδους (ή διανυσματικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα)** $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ της συνάρτησης $\vec{F}$ κατά μήκος της καμπύλης Γ, το άθροισμα των επικαμπυλίων ολοκληρωμάτων της $\vec{F}$ κατά μήκος των Γ_k για $k = 1, 2, ..., m$, δηλαδή:

$$\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} := \sum_{k=1}^{m}\int_{\Gamma_k}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \sum_{k=1}^{m}\int_{u_{k-1}}^{u_k}\vec{F}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt$$



Σχήμα: Διαμέριση $P = [a = u_0 < u_1 < u_2 < ... < u_m = b]$

Άσκηση 3:
Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\Gamma x^2dx + (x+y^2)dy + e^z dz$ κατά μήκος της παραμετρικής καμπύλης $\Gamma = \Gamma(\vec{r})$ η οποία ορίζεται από την παραμέτρηση $\vec{r}(t) = \left(sin|t|\,,\, sin|t-\frac{\pi}{2}|\,,\, t^2\right)$ για $t \in [-\frac{\pi}{2}, \pi]$.
Λύση:
Η καμπύλη Γ δεν είναι C^1 αφού δεν είναι παραγωγίσιμη στα σημεία $t = 0$ και $t = \frac{\pi}{2}$.
Θεωρώντας λοιπόν τη διαμέριση $P = \left[-\frac{\pi}{2} < 0 < \frac{\pi}{2} < \pi\right]$ του $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$ η καμπύλη Γ είναι κατά τμήματα C^1 (ως προς αυτή τη διαμέριση) και ισχύει ότι:
• Στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ έχουμε ότι: $t \leq 0$ άρα $|t| = -t$ και $t - \frac{\pi}{2} \leq 0$ άρα $|t - \frac{\pi}{2}| = \frac{\pi}{2} - t$.
Άρα $\vec{r}(t) = \left(sin(-t)\,,\, sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\,,\, t^2\right) = (\,-sin(t)\,,\, cos(t)\,,\, t^2\,)$
[όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $sin(-t) = -sin(t)$ και $sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right) = cos(t)$]
Άρα $\vec{r}\,'(t) = (\,-cos(t)\,, -sin(t)\,,\, 2t)$.
• Στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ έχουμε ότι: $t \geq 0$ άρα $|t| = t$ και $t - \frac{\pi}{2} \leq 0$ άρα $|t - \frac{\pi}{2}| = \frac{\pi}{2} - t$.
Άρα $\vec{r}(t) = \left(sin(t)\,,\, sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\,,\, t^2\right) = (\,sin(t)\,,\, cos(t)\,,\, t^2\,)$
Άρα $\vec{r}\,'(t) = (\,cos(t)\,, -sin(t)\,,\, 2t)$.

• Στο $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ έχουμε ότι: $t \geq 0$ άρα $|t| = t$ και $t - \frac{\pi}{2} \geq 0$ άρα $|t - \frac{\pi}{2}| = t - \frac{\pi}{2}$.
Άρα $\overrightarrow{r}(t) = (\, sin(t)\,,\, sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\,,\, t^2\,) = (\, sin(t)\,,\, -cos(t)\,,\, t^2\,)$
[όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = sin\left(-\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\right) = -sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = -cos(t)$]
Άρα $\overrightarrow{r}'(t) = (\, cos(t)\,,\, sin(t)\,,\, 2t)$.

Επομένως, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$ της $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (\, x^2\,,\, x + y^2\,,\, e^z\,)$ κατά μήκος της καμπύλης $\Gamma = \Gamma(\overrightarrow{r})$ δίνεται από τον Ορισμό 4 ως το άθροισμα:

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_{-\pi/2}^{0} \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)\, dt + \int_{0}^{\pi/2} \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)\, dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) \cdot \overrightarrow{r}'(t)\, dt$$

$$= \int_{-\pi/2}^{0} \left(\, (-sin(t))^2\,,\, -sin(t) + cos^2(t)\,,\, e^{t^2}\,\right) \cdot (\, -cos(t)\,,\, -sin(t)\,,\, 2t\,)\, dt$$

$$+ \int_{0}^{\pi/2} \left(\, sin^2(t)\,,\, sin(t) + cos^2(t)\,,\, e^{t^2}\right) \cdot (\, cos(t)\,,\, -sin(t)\,,\, 2t\,)\, dt$$

$$+ \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\, sin^2(t)\,,\, sin(t) + (-cos(t))^2\,,\, e^{t^2}\,\right) \cdot (\, cos(t)\,,\, sin(t)\,,\, 2t\,)\, dt$$

όπου θα βρούμε το πρώτο από τα 3 ολοκληρώματα παρακάτω και αντίστοιχα δουλεύουμε για τα υπόλοιπα 2.

$$\int_{-\pi/2}^{0} \left(\, (-sin(t))^2\,,\, -sin(t) + cos^2(t)\,,\, e^{t^2}\,\right) \cdot (\, -cos(t)\,,\, -sin(t)\,,\, 2t\,)\, dt$$

$$= \int_{-\pi/2}^{0} \left(-sin^2(t)cos(t) + sin^2(t) - cos^2(t)sin(t) + 2te^{t^2}\right) dt$$

$$= \int_{-\pi/2}^{0} \left(-sin^2(t)cos(t) + \frac{1 - cos(2t)}{2} - cos^2(t)sin(t) + 2te^{t^2}\right) dt$$

[όπου χρησιμοποιήσαμε ότι $sin^2(t) = \frac{1 - cos(2t)}{2}$]

$$= -\left[\frac{sin^3(t)}{3}\right]_{-\pi/2}^{0} + \left\{\frac{1}{2}[t]_{-\pi/2}^{0} - \frac{1}{2}\left[\frac{sin(2t)}{2}\right]_{-\pi/2}^{0}\right\} + \left[\frac{cos^3(t)}{3}\right]_{-\pi/2}^{0} + \left[e^{t^2}\right]_{-\pi/2}^{0}$$