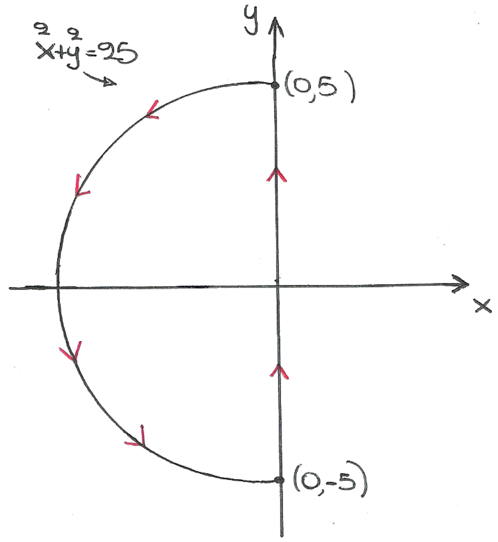
Επαναληπτικές Ασκήσεις 21-12-2018

Εφαρμογές Θεωρημάτων *Green*, *Gauss* **και** *Stokes*

1. Να υπολογισθεί με χρήση του θεωρήματος του $Green$ το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C yx^2dx - x^2dy$, όπου C η καμπύλη που φαίνεται στο σχήμα

Λύση



Όπως φαίνεται από το σχήμα, το χωρίο D είναι απλό και συνεκτικό και το σύνορο του C είναι κατα τμήματα C^1 καμπύλη και θετικά προσανατολισμένη καθώς έχει το D στα αριστερά της. Επιπλέον αν ορίσουμε το διανυσματικό πεδίο

$$\overrightarrow{F}(x,y) = (yx^2, -x^2) \;\Rightarrow\; P = yx^2 \;, \quad Q = -x^2 \;,$$

παρατηρούμε ότι είναι C^1 στο χωρίο D. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του $Green$ προκύπτει ότι

$$\int_{C=\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \;\Rightarrow\; \int_C yx^2dx - x^2dy = \iint_D -2x - x^2dxdy \;,$$

όπου D το χωρίο που περιβάλλεται από την καμπύλη C.
Καθώς το χωρίο D είναι το ημικύκλιο, η χρήση πολικών συντεταγμένων θα διευκολύνει τον υπολογισμό

$$x = rcos\theta \;, \quad y = rsin\theta \;, \quad x^2 + y^2 = r^2 \;, \quad J = r \;.$$

Μένει λοιπόν να βρούμε τα άκρα ολοκλήρωσης.
Από το σχήμα παρατηρούμε ότι το χωρίο D είναι το ημικύκλιο $x^2 + y^2 = 25$ του 2ου και 3ου τεταρτημορίου. Αυτό σημαίνει ότι

$$\frac{1}{2}\pi \leqslant t \leqslant \frac{3}{2}\pi \;, \quad 0 \leqslant r \leqslant 5 \;.$$

Επομένως:

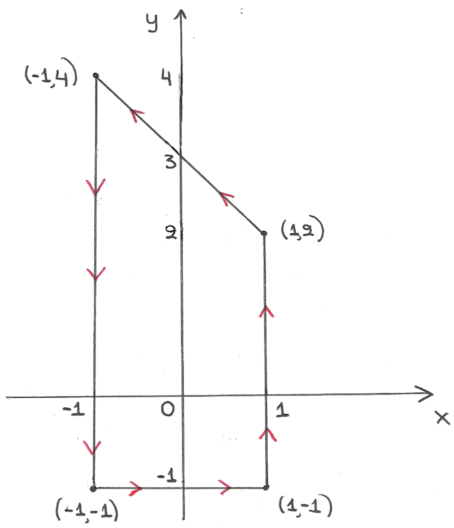
$$\int_C yx^2dx - x^2dy = \iint_D -2x - x^2dxdy = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\int_0^5 r\left(-2rcos\theta - r^2cos^2\theta\right)drd\theta$$

$$\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\int_0^5 \left(-2r^2cos\theta - \frac{1}{2}r^3(1+cos(2\theta))\right)drd\theta = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\left[-\frac{2}{3}r^3cos\theta - \frac{1}{8}r^4(1+cos(2\theta))\right]_0^5 d\theta$$

$$= \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\left(-\frac{250}{3}cos\theta - \frac{625}{8}(1+cos(2\theta))\right)d\theta = \left[-\frac{250}{3}sin\theta - \frac{625}{8}(\theta + \frac{1}{2}sin(2\theta))\right]_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} = ...$$

2. Να υπολογισθεί με χρήση του θεωρήματος του *Green* το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C (6y-9x)dy - (yx - x^3)dx$, όπου C η καμπύλη που φαίνεται στο σχήμα.

Λύση



Παρατηρούμε άμεσα από το σχήμα ότι η καμπύλη C είναι μία κλειστή κατα τμήματα C^1 η οποία αποτελεί σύνορο του απλά συνεκτικού D και είναι θετικά προσανατολισμένη καθώς έχει το χωρίο D στα αριστερά της. Επιπλέον αν ορίσουμε το διανυσματικό πεδίο

$$\vec{F}(x,y) = \big(-(yx-x^3), 6y-9x\big) \ \Rightarrow P = -(yx-x^3)\ , \quad Q = 6y - 9x\ ,$$

παρατηρούμε ότι είναι C^1 στο D.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -9 \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -x\ .$$

Επομένως εφαρμόζουμε το θεώρημα του *Green*:

$$\int_{C=\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \ \Rightarrow \int_C (6y-9x)dy - (yx-x^3)dx = \iint_D (x-9)dxdy\ .$$

Μένει λοιπόν να βρούμε τα άκρα ολοκλήρωσης. Από το σχήμα φαίνεται άμεσα ότι αυτά θα είναι:

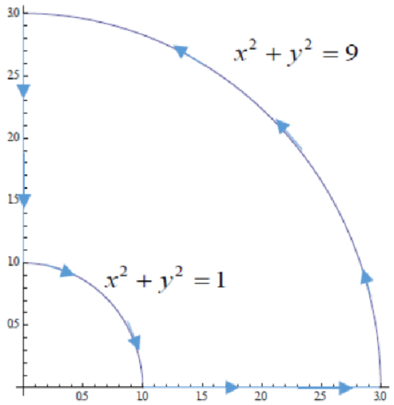
$$-1 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{και} \quad -1 \leqslant y \leqslant 3 - x\ ,$$

όπου η ευθεία βρέθηκε χρησιμοποιώντας τα δύο σημεία $(x_1,y_1) = (-1,4)$, $(x_2,y_2) = (1,2)$ και την εξίσωση της ευθείας στο επίπεδο $y - y_{1,2} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x - x_{1,2})$. Άρα:

$$\int_{C=\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \ \Rightarrow \int_C (6y-9x)dy - (yx-x^3)dx$$
$$= \iint_D (x-9)dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{3-x} (x-9)dydx = \int_{-1}^{1} [(x-9)y]_{-1}^{3-x} dx = \int_{-1}^{1} (x-9)(4-x)dx$$
$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{13}{2}x^2 - 36x\right]_{-1}^{1}$$

3. Να υπολογισθεί με χρήση του θεωρήματος του *Green* το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C (e^x + 2xy)dx + (4x^2 + siny)dy$, όπου C η καμπύλη που περιβάλλει το χωρίο $D = \{(x, y) : 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9\}$ στο 1ο τεταρτημόριο.

Λύση



Από το σχήμα φαίνεται ότι το χωρίο D είναι απλά συνεκτικό (δεν έχει τρύπες) και έχει ως σύνορο την θετικά προσανατολισμένη καμπύλη C η οποία είναι κατά τμήματα C^1, απλή (δεν τέμνει τον εαυτό της) και κλειστή. Επιπλέον το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}(x, y) = (e^x + 2xy, 4x^2 + siny)$ είναι C^1 στο D. Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του *Green* στο $\partial D = C$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 8x \ .$$

Άρα:

$$\int_{C=\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$
$$\Rightarrow \int_C (e^x + 2xy)dx + (4x^2 + siny)dy = \iint_D (8x - 2x)dxdy = \iint_D 6xdxdy \ .$$

Μένει λοιπόν να βρούμε τα άκρα ολοκλήρωσης των x και y. αφού βρισκόμαστε σε δακτύλιο (αναμεσα σε δύο κύκλους), όπως και στον δίσκο θα διευκολύνει αρκετά η χρήση πολικών συντεταγμένων.

$$x = rcos\theta \ , \quad y = rsin\theta \ , \quad x^2 + y^2 = r^2 \ , \quad J = r \ .$$

Για τα άκρα ολοκλήρωσης έχουμε

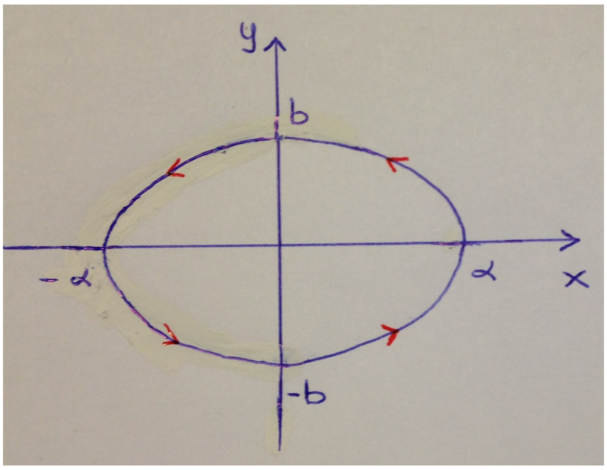
- $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9 \ \Rightarrow \ 1 \leqslant r^2 \leqslant 9 \ \Rightarrow \ 1 \leqslant r \leqslant 3 \ .$
- $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ (1ο τεταρτημόριο) .

Επομένως:

$$\int_C (e^x + 2xy)dx + (4x^2 + siny)dy = \iint_D (8x - 2x)dxdy = \iint_D 6xdxdy$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^3 6rcos\theta |J| drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^3 6r^2 cos\theta drd\theta = \int_2^{\frac{\pi}{2}} 6cos\theta \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^3 d\theta = 52 \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\theta d\theta = 52[sin\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 52 \ .$$

4. $i)$ Με χρήση του θεωρήματος $Green$ να υπολογιστεί το εμβαδόν της έλλειψης $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.
$ii)$ Για $a=2$ και $b=3$ να υπολογιστεί η εξερχόμενη ροή του διανυσματικού πεδίου $\overrightarrow{F}=(2x,5y)$ από την καμπύλη C της έλλειψης.

Λύση:



$i)$ Η εξίσωση $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ αποτελεί μία έλλειψη με ημιάξονες a και b. Επομένως έχουμε μια απλή κλειστή καμπύλη C με εσωτερικό χωρίο το D το οποίο είναι απλά συνεκτικό και του οποίου αναζητάμε το εμβαδόν. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$A=\frac{1}{2}\int_{\partial D}xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_{\partial D}\overrightarrow{F}\cdot dS\ .$$

Δηλαδή μπορούμε να βρούμε το εμβαδόν του D απ΄το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του συνόρου του.

Σημείωση: Αυτό προκύπτει εύκολα από το $A=\iint_D dxdy=\iint_D 1dxdy$, καθώς αν χρησιμοποιήσουμε αντίστροφα το θεώρημα του $Green$ αρκεί να βρούμε διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}$ τέτοιο ώστε $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1$. Επομένως αν επιλέξουμε το $\overrightarrow{F}(x,y)=(-y/2,x/2)$ έχουμε ότι $\dfrac{1}{2}\int_{\partial D=C}xdy-ydx=\dfrac{1}{2}\iint_D(1+1)dxdy=\iint_D 1dxdy=A$.

Επομένως για να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα 1ου είδους παίρνουμε την παραμέτρηση της έλλειψης

$$\overrightarrow{r}(\theta)=(acos\theta,bsin\theta)=(x(\theta),y(\theta))\ ,\quad \theta\in[0,2\pi]\ .$$

Επιπλέον

$$\frac{dx}{d\theta}=-asin\theta\ \Rightarrow\ dx=-asin\theta d\theta\quad ,\quad \frac{dy}{d\theta}=bcos\theta\ \Rightarrow\ dy=bcos\theta d\theta\ .$$

Άρα το ζητούμενο εμβαδόν θα δίνεται από:

$$A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[-bsin\theta(-asin\theta)+acos\theta(bcos\theta)\right]d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}ab(sin^2\theta+cos^2\theta)d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}abd\theta=\pi ab\ .$$

$ii)$ Για τον υπολογισμό της εξερχόμενης ροής ($flux$) θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$\int_C\overrightarrow{F}\cdot\hat{\mathbf{n}}dS=\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy$$

Επομένως αφού $\overrightarrow{F}(x,y)=(2x,5y)$ έχουμε ότι:

$$\frac{\partial P}{\partial x}=2 \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial y}=5 \ .$$

Η ζητούμενη ροή επομένως θα δίνεται από:

$$\iint_D (2+5)dxdy=\iint_D 7dxdy \ .$$

Μένει λοιπόν να προσδιορίσουμε τα άκρα ολοκλήρωσης. Παρατηρούμε ότι η για $x'=\frac{x}{2}$ και $y'=\frac{y}{3}$ η εξίσωση της έλλειψης γίνεται $x'^2+y'^2=1$. επομένως εφαρμόζοντας πολικές για τα x' και y' έχουμε:

$$x'=rcos\theta \ \Rightarrow \ x=2rcos\theta \ , \quad y'=rsin\theta \ \Rightarrow \ y=3rsin\theta \ , \quad J(r,\theta)=\begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2cos\theta & -2rsin\theta \\ 3sin\theta & 3rcos\theta \end{vmatrix}=6r \ .$$

Αφού το χωρίο D είναι το εσωτερικό της έλλειψης $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ έπεται ότι

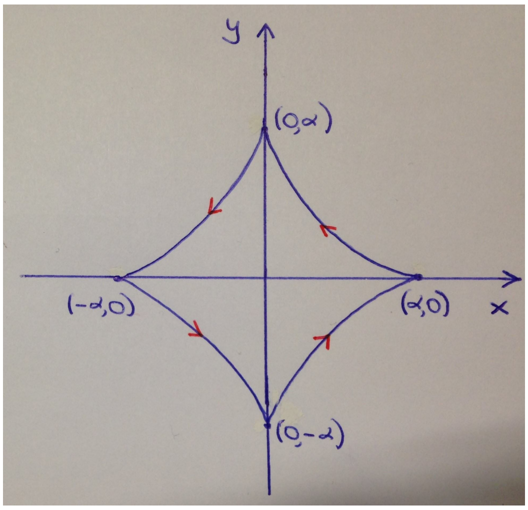
$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\leqslant 1 \ \Rightarrow \ x'^2+y'^2\leqslant 1 \ \Rightarrow \ r^2\leqslant 1 \ \Rightarrow \ 0\leqslant r\leqslant 1 \ .$$

Για την θ έχουμε προφανώς ότι $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$. Το ζητούμενο εμβαδόν επομένως δίνεται από:

$$7\iint_D dxdy=7\int_0^1\int_0^{2\pi}|J|d\theta dr=42\int_0^1\int_0^{2\pi}rd\theta dr=42\int_0^1 r[\theta]_0^{2\pi}dr=84\pi\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^1=42\pi \ .$$

5. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που φράσσεται από την υποκυκλοειδή καμπύλη $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a$, $a>0$, χρησιμοποιώντας την παραμέτρηση $\overrightarrow{r}(\theta)=(x(\theta),y(\theta))=(acos^3\theta,asin^3\theta)$, για $\theta\in[0,2\pi]$.

Λύση:



Όπως φαίνεται είτε από το σχήμα είτε από την παραμέτρηση $\overrightarrow{r}(\theta)$ η καμπύλη είναι κλειστή, απλή και κατα τμήματα C^1. Επιπλέον αποτελεί το σύνορο του χωρίου D ως προς το οποίο είναι θετικά προσανατολισμένη και το οποίο είναι ανοικτό και συνεκτικό και του οποίου το εμβαδόν αναζητάμε. Θα χρησιμοποιήσουμε λοιπόν τον τύπο για το εμβαδόν που χρησιμοποιήσαμε και στην προηγούμενη άσκηση. Για να κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής πρέπει να υπολογίσουμε τα $\frac{dx}{d\theta}$ και $\frac{dy}{d\theta}$.

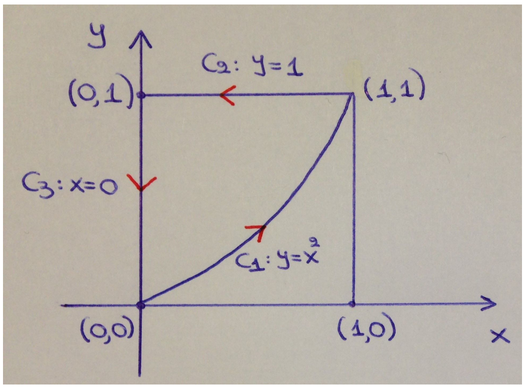
$$\frac{dx}{d\theta}=3asin^2\theta cos\theta \ \Rightarrow \ dx=3asin^2\theta cos\theta d\theta \quad , \quad \frac{dy}{d\theta}=-3acos^2\theta sin\theta \ \Rightarrow \ dy=-3acos^2\theta sin\theta d\theta \ .$$

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν του χωρίου D θα δίνεται από:

$$A = \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[acos^3\theta(3asin^2\theta cos\theta) - asin^3\theta(-3acos^2\theta sin\theta)\right] d\theta$$
$$= \frac{3}{2}a^2 \int_0^{2\pi} \left(sin^2\theta cos^4\theta + cos^2\theta sin^4\theta\right) d\theta = \frac{3}{2}a^2 \int_0^{2\pi} sin^2\theta cos^2\theta d\theta = \frac{3}{8}a^2 \int_0^{2\pi} sin^2 2\theta d\theta$$
$$= \frac{3}{8}a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1-cos4\theta}{2}\right) d\theta = ... = \frac{3}{8}\pi a^2 \ .$$

6. Να υπολογισθεί το έργο που παράγεται από το πεδίο δυνάμεων $\overrightarrow{F}(x,y) = (x+xy^2, 2(x^2y - y^2siny))$, κατα μήκος της καμπύλης C που φαίνεται στο σχήμα.

Λύση:



Όπως βλέπουμε και από το σχήμα, η καμπύλη C είναι απλή κλειστή και κατα τμήματα C^1. Επιπλέον είναι θετικά προσανατολισμένη ως προς το χωρίο D που περιβάλλει το οποίο θα είναι απλά συνεκτικό. Τέλος, το διανυσματικό πεδίο είναι C^1 στο D. Έπεται λοιπό ότι το έργο κατά μήκος της καμπύλης, με χρήση θεωρήματος $Green$ θα δίνεται από:

$$W = \int_C Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \ .$$

Επομένως:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} 4xy \ .$$

Όσον αφορά τα άκρα του D ξεκινώντας με τα άκρα του x έχουμε:

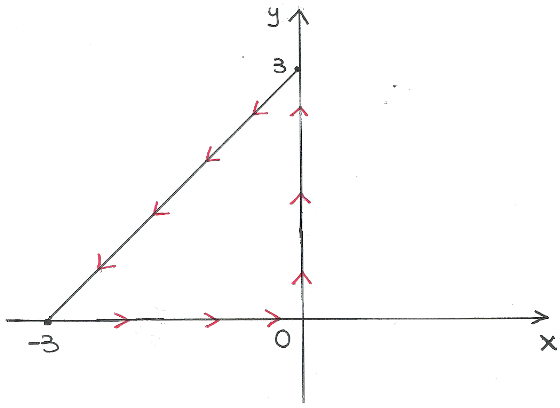
$$0 \leqslant x \leqslant 1 \quad , \quad x^2 \leqslant y \leqslant 1 \qquad (\text{ισοδύναμα } 0 \leqslant y \leqslant 1 \quad , \quad 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{y}\ ) \ .$$

Άρα το ζητούμενο έργο θα είναι:

$$\iint_D (4xy - 2xy)dxdy = \iint_D 2xydxdy \overset{Fubini}{=} 2\int_0^1 \int_{x^2}^1 xydydx = 2\int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{x^2}^1 dx$$
$$= \int_0^1 (x - x^5)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^6\right]_0^1 = \frac{1}{3} \ .$$

7. Να επαληθευθεί το θεώρημα *Green* για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C (xy^2 + x^2)dx + (4x-1)dy$, όπου C η καμπύλη που φαίνεται στο σχήμα:

Λύση:



Παρατηρούμε απο το σχήμα ότι η καμπύλη C είναι κλειστή, κατα τμήματα λεία C^1 και απλή (δεν τέμνει τον εαυτό της ή η παραμέτρηση της έχει παράγωγο $\neq 0$). Επιπλέον αποτελεί το σύνορο του απλά συνεκτικού χωρίου D και είναι θετικά προσανατολισμένη ως προς αυτό. Τέλος το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}(x,y) = (P,Q) = (xy^2 + x^2, 4x-1)$ είναι C^1 στο D. Άρα από το θεώρημα του *Green* έπεται ότι:

$$\int_{C=\partial D} Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \ .$$

Για να επαληθεύσουμε λοιπόν το θεώρημα, πρέπει να υπολογίσουμε ξεχωριστά το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (αριστερό μέλος) και ξεχωριστά το διπλό ολοκλήρωμα (δεξί μέλος) και να δούμε αν είναι ίσα.

- (Επικαμπύλιο):

Έχουμε λοιπόν ότι $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, όπου C_1, C_2, C_3 τα ευθύγραμμα τμήματα (C^1 απλές καμπύλες). Οι παραμετρήσεις τους λοιπόν θα είναι:

$C_1: \ \overrightarrow{r}(t) = (1-t)(0,0) + t(0,3) = (0,3t) \ , \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$ (ή ισοδύναμα $(0,t) \ , \quad 0 \leqslant t \leqslant 3)$.
$C_2: \ \overrightarrow{r}(t) = (1-t)(0,3) + t(-3,0) = (-3t, 3-3t) \ , \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$.
$C_3: \ \overrightarrow{r}(t) = (1-t)(-3,0) + t(0,0) = (3(t-1),0) \ , \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$ (ή ισοδύναμα $(t,0) \ , \quad -3 \leqslant t \leqslant 0)$.

Άρα

$$\int_{C_1} (xy^2 + x^2)dx + (4x-1)dy \overset{x=0\ ,\ y=t}{=} \int_0^3 (0t^2 + 0)0dt + \int_0^3 (4\cdot 0 - 1)1dt = \int_0^3 (-1)dt = -3$$

$$\int_{C_2} (xy^2 + x^2)dx + (4x-1)dy \overset{x=-3t\ ,\ y=3-3t}{=} \int_0^1 \left[(-3t)(3-3t)^2 + (-3t)^2\right](-3)dt + \int_0^1 \left[4(-3t) - 1\right](-3)dt$$

$$= \int_0^1 \left(81t^3 - 189t^2 + 81t\right) dt + \int_0^1 (36t + 3)\, dt = \ldots = \frac{75}{4}$$

$$\int_{C_3} (xy^2 + x^2)dx + (4x-1)dy \overset{x=t\ ,\ y=0}{=} \int_{-3}^0 \left(t0^2 + t^2\right) 1dt + \int_{-3}^0 (4t-1)0dt = \int_{-3}^0 t^2 dt = 9 \ .$$

Επομένως

$$\int_C (xy^2 + x^2)dx + (4x-1)dy = -3 + \frac{75}{4} + 9 = \frac{99}{4} \ .$$

- (Διπλό):

Έχουμε ότι:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 4 \quad , \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2xy \ .$$

Επομένως υπολογίζουμε το διπλό ολοκλήρωμα:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \iint_D (4 - 2xy) dxdy \ .$$

Μένει λοιπόν να προσδιορίσουμε τα άκρα ολοκλήρωσης των x και y. Ξεκινώντας με το x έχουμε:

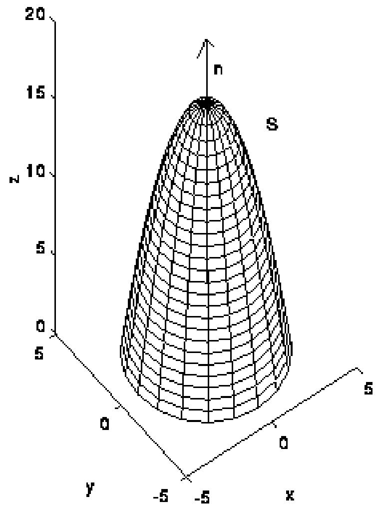
$$-3 \leqslant x \leqslant 0 \quad , \quad 0 \leqslant y \leqslant x + 3 \ ,$$

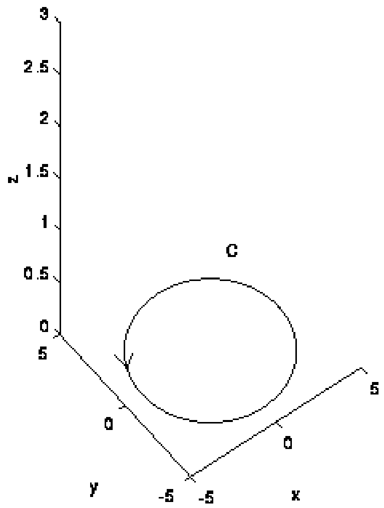
όπου η ευθεία $y = x + 3$ μπορεί να βρεθεί από τα σημεία $(x_1, y_1) = (0, 3), (x_2, y_2) = (-3, 0)$ και την εξίσωση $y = y_{1,2} + \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_{1,2})$. Επομένως:

$$\iint_D (4 - 2xy) dxdy \stackrel{Fubini}{=} \int_{-3}^{0} \int_{0}^{x+3} (4 - 2xy) dydx = \int_{-3}^{0} \left[4y - xy^2 \right]_0^{x+3} dx$$
$$= \int_{-3}^{0} \left(12 - 5x - 6x^2 - x^3 \right) dx = ... = \frac{99}{4} \ .$$

8. Επαληθεύστε το θεώρημα του *Stokes* για την επιφάνεια S ενός παραβολοειδούς $z = 16 - x^2 - y^2$, για $z \geqslant 0$ και για το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (3y, 4z, -6x)$.

Λύση:





Από το θεώρημα του *Stokes* έχουμε:

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_S curl \overrightarrow{F} \cdot \mathbf{\hat{n}} dS \ ,$$

θεωρώντας ότι η καμπύλη C είναι θετικά προσανατολισμένη ως προς το κάθετο $\mathbf{\hat{n}}$. Για να επαληθεύσουμε το θεώρημα θα υπολογίσουμε ξεχωριστά το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (αριστερό μέλος) και ξεχωριστά το επιφανειακό ολοκλήρωμα (δεξί μέλος) και θα δούμε αν αυτά είναι ίσα.

• (Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα):
Απαλοίφοντας το z με την επιφάνεια $z = 0$ προκύπτει ότι το σύνορο του D που είναι η ορθή προβολή του στερεού θα είναι $x^2 + y^2 = 16$. Επομένως αφού έχουμε κύκλο θα χρησιμοποιήσουμε την παραμέτρηση

$$\overrightarrow{r}(\theta) = (4cos\theta, 4sin\theta, 0) = (x(\theta), y(\theta), z(\theta)) \quad , \quad \theta \in [0, 2\pi] \ .$$

Άρα:

$$\int_C \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^{2\pi} \overrightarrow{F}(x(\theta), y(\theta), z(\theta)) \cdot \overrightarrow{r}'(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (12sin\theta, 0, -24cos\theta) \cdot (-4sin\theta, 4cos\theta, 0) d\theta$$

$$= -48 \int_0^{2\pi} sin^2\theta d\theta = -48 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 - cos(2\theta)}{2} \right) d\theta = -48\pi \ .$$

• (Επιφανειακό ολοκλήρωμα):
Αρχικά υπολογίζουμε το $curl\overrightarrow{F}$, όπου $\overrightarrow{F} = (3y, 4z, -6x)$:

$$curl\overrightarrow{F} = \nabla \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 3y & 4z & -6x \end{vmatrix} = (-4, 6, -3)$$

Αν $g(x, y, z) = z + x^2 + y^2 - 16$ τότε $g(x, y, z) = 0$. Επομένως το κάθετο διάνυσμα θα είναι:

$$\overrightarrow{N} = \nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 1) \ .$$

Άρα έχουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα:

$$\iint_S (-4, 6, -3) \cdot \mathbf{\hat{n}} dS = \iint_D (-4, 6, -3) \cdot \overrightarrow{N} dxdy = \iint_D (-8x + 12y - 3) dxdy \ .$$

Μένει να υπολογίσουμε το κάθετο διάνυσμα και τα άκρα ολοκλήρωσης των x και y τα οποία ανήκουν στον δίσκο $D = \big\{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 16\big\}$. Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες έχουμε:

$$0 \leqslant r \leqslant 4 \quad , \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \ .$$

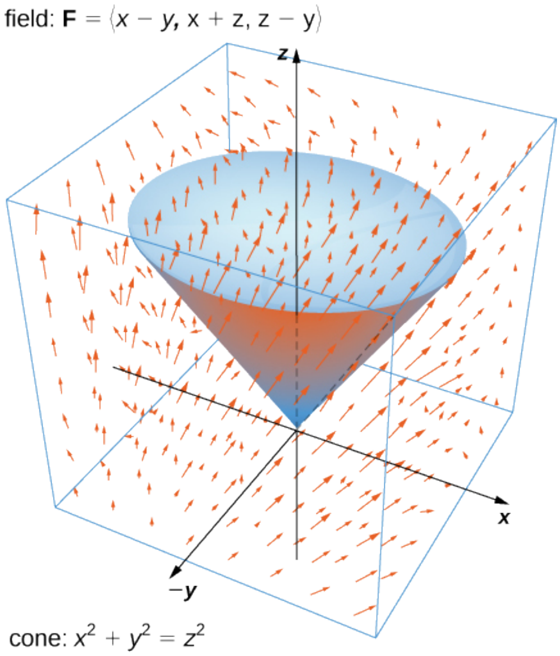
$$\iint_D (-8x + 12y - 3) dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^4 (-8rcos\theta + 12rsin\theta - 3) rdrd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^4 (-8r^2cos\theta + 12r^2sin\theta - 3r) drd\theta = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{8}{3}r^3cos\theta + 4r^3sin\theta - \frac{3}{2}r^2 \right]_0^4 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\frac{512}{3}cos\theta + 256sin\theta - 24) d\theta = -48\pi \ .$$

9. Επαληθεύστε το θεώρημα του $Gauss$ (Απόκλισης) για το διανυσματικό πεδίο $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x-y, x+z, z-y)$ και την επιφάνεια S που αποτελείται από τον κώνο $x^2+y^2 = z^2$, $0 \leqslant z \leqslant 1$ και το το κομμάτι του επιπέδου $z = 1$ που περιέχεται από τον κώνο.

Λύση:



Η S είναι μια θετικά προσανατολισμένη (κάθετο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$ με κατεύθυνση προς τα έξω) τμηματικά λεία επιφάνεια και Έστω R το στερεό που περικλύεται από την επιφάνεια S. Από το θεώρημα του $Gauss$ έχουμε:

$$\iiint_R \nabla \cdot \overrightarrow{F}(x,y,z)dxdydz = \iint_S \overrightarrow{F} \cdot \hat{\mathbf{n}}dS \ .$$

Για την επαλήθευση του θεωρήματος πρέπει να υπολογίσουμε το αριστερό και δεξί μέλος και να δούμε αν είναι ίσα.

• (Τριπλό ολοκλήρωμα):
Αρχικά υπολογίζουμε το $div\overrightarrow{F} = \nabla \cdot \overrightarrow{F}$:

$$div\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (x-y, x+z, z-y) = 2 \ .$$

Επομένως

$$\iiint_R div\overrightarrow{F}(x,y,z)dxdydz = 2\iiint_R dxdydz \ .$$

Μένει να βρούμε τα άκρα ολοκλήρωσης των x, y και z στο στερεό R. Κάνοντας απαλοιφή του z από το σύστημα των δύο επιφανειών:

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} \quad (z \geqslant 0) \\ z = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow x^2+y^2 = 1 \quad ,$$

προκύπτει ότι η ορθή προβολή του στερεού στο επίπεδο xy έχει σύνορο τον κύκλο $x^2+y^2 = 1$. Επομένως η προβολή του στερεού R θα είναι:

$$D = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \leqslant 1\right\} \ .$$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν κυλινδρικές συντεταγμένες έχουμε τα άκρα:

$$0 \leqslant r \leqslant 1 \quad , \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi \quad , \quad \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant 1 \ .$$

Άρα

$$2\iiint_R dxdydz = 2\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^1 rdzdrd\theta = ... = \frac{2\pi}{3}$$

• (Επιφανειακό Ολοκλήρωμα):
Για τον υπολογισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος της επιφάνειας S αφού είναι κατά τμήματα λεία, σπάμε το ολοκλήρωμα σε δύο ολοκληρώματα για τις λείες επιφάνειες S_1 και S_2 του κώνου και του τμήματος $z = 1$ που περιέχεται στον κώνο και κλείνει την επιφάνεια από πάνω.
Για την S_2 : Το κάθετο διάνυσμα $\overrightarrow{N}$ στο επίπεδο $z = 1$ (φορά προς τα έξω) θα είναι το $(0, 0, 1)$ (είτε από τον τύπο του επιπέδου $0x + 0y + 1z = 1$, είτε από το *gradient* της $g(x, y, z) = z - 1 = 0$). Επομένως:

$$\iint_{D_2}(x-y, x+1, 1-y)\cdot(0,0,1)dxdy = \iint_{D_2}(1-y)dxdy\ ,$$

όπου D_2 η προβολή της S_2 στο επίπεδο (δίσκος $x^2 + y^2 \leqslant 1$). Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες έχουμε τα άκρα:

$$0 \leqslant r \leqslant 1 \quad , \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\ .$$

Άρα:

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}(1 - rsin\theta)rd\theta dr = \int_0^1\left[r\theta + r^2cos\theta\right]_0^{2\pi}dr = \int_0^1(2r\pi)dr = \pi\ .$$

Για την επιφάνεια S_1 του κώνου: Παίρνουμε την παραμέτρηση του κώνου $\overrightarrow{r}(u, v) = (ucosv, usinv, u)$ και το κάθετο διάνυσμα θα δίνεται από το εξωτερικό γινόμενο:

$$\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ cosv & sinv & 1 \\ -usinv & ucosv & 0 \end{vmatrix} = (-ucosv, -usinv, u)\ .$$

Το ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\iint_{S_1}\overrightarrow{F}\cdot\mathbf{\hat{n}}dS = \iint_{D_1}\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(u,v))\cdot(\overrightarrow{r}_u\times\overrightarrow{r}_v)dudv\ ,$$

όπου D_1 είναι η προβολή του κώνου στο xy επίπεδο (πάλι ο δίσκος $x^2 + y^2 \leqslant 1$) ή το πεδίο ορισμού της παραμέτρησης $\overrightarrow{r}$. Επομένως τα άκρα ολοκλήρωσης θα είναι:

$$0 \leqslant u \leqslant 1 \quad , \quad 0 \leqslant v \leqslant 2\pi\ .$$

Σημειώνεται ότι τα αρνητικά πρόσημα στις x και y συνιστώσες του κάθετου διανύσματος $\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v$ δείχνουν αρνητικό προσανατολισμό, επειδή όμως εμάς είναι θετικά προσανατολισμένη η επιφάνεια θα πάρουμε το αντίθετο κάθετο διάνυσμα δηλαδή το $\overrightarrow{r}_u\times\overrightarrow{r}_v = (ucosv, usinv, -u)$.
Επομένως το ολοκλήρωμα είναι:

$$\int_0^1\int_0^{2\pi}(ucosv - usinv, ucosv + u, u - usinv)\cdot(ucosv, usinv, -u)dvdu$$
$$= \int_0^1\int_0^{2\pi}(u^2cos^2v + 2u^2sinv - u^2)dvdu = -\frac{\pi}{3}\ .$$

Σημείωση: Θα μπορούσαμε ισοδύναμα να υπολογίσουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα ως εξής: Έστω $g(x,y,z) = z - \sqrt{x^2+y^2} = 0$. Το κάθετο διάνυσμα $\overrightarrow{N}$ θα δίνεται από:

$$\overrightarrow{N} = \nabla g(x,y,z) = \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right) .$$

Ομοίως με προηγουμένως, επειδή έχουμε θετικά προσανατολισμένη επιφάνεια θα πάρουμε το αντίθετο κάθετο διάνυσμα. Επομένως το επιφανειακό ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\iint_{D_1} (x-y, x+z, z-y) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right) dxdy .$$

Χρησιμοποιώντας πολικές για τον μοναδιαίο δίσκο D_1 και χρησιμοποιώντας την εξίσωση του κώνου $z = \sqrt{x^2+y^2} = r$ σε πολικές έχουμε:

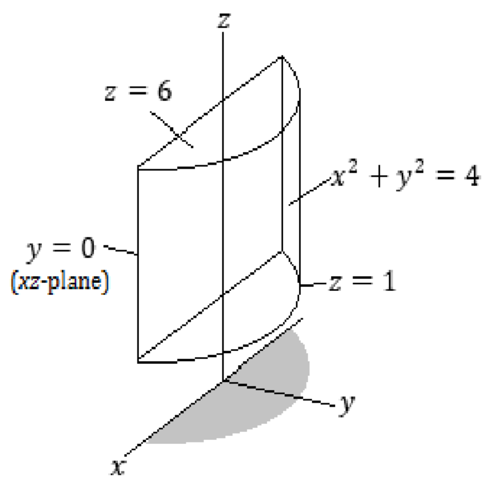
$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} (rcos\theta - rsin\theta, rcos\theta + r, r - rsin\theta) \cdot (cos\theta, sin\theta, -1) r d\theta dr$$
$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} (r^2cos^2\theta - r^2 + 2r^2 sin\theta) d\theta dr = -\frac{\pi}{3} .$$

Τέλος το επιφανειακό ολοκλήρωμα της S θα δίνεται από το άθροισμα των επιμέρους δύο:

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \mathbf{\hat{n}} dS = \iint_{S_1} \overrightarrow{F} \cdot \mathbf{\hat{n}} dS + \iint_{S_2} \overrightarrow{F} \cdot \mathbf{\hat{n}} dS = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi .$$

10. Να υπολογισθεί ο ρυθμός ροής του διανυσματικού πεδίου $\overrightarrow{F}(x,y,z) = (xy, -y, z)$ δια μέσου της κλειστής επιφάνειας S που αποτελείται από τον κύλινδρο $x^2+y^2 = 4$ και τα επίπεδα $y = 0$, $z = 1$ και $z = 6$.

Λύση:



Ο ρυθμός ροής δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$\int_S \overrightarrow{F}(x,y,z) \cdot \mathbf{\hat{n}} dS .$$

1ος τρόπος:
Θα σπάσουμε το ολοκλήρωμα στα αντίστοιχα επιφανειακά S_1, S_2, S_3, S_4 του κυλίνδρου και των επιπέδων που σχηματίζουν την επιφάνεια S (θετικά προσανατολισμένη). Επιπλέον πρέπει να υπολογίσουμε το κάθετο διάνυσμα $\mathbf{\hat{n}}$ (με φορά προς τα έξω) για κάθε επιφάνεια ξεχωριστά.

• Για την S_1: Επίπεδο $y = 0$: Το κάθετο διάνυσμα απο την εξίσωση του επιπέδου $0x + 1y + 0z = 0$ με φορά προς τα έξω θα είναι $\overrightarrow{N}_1 = (0, -1, 0) = \mathbf{\hat{n}_1}$ (θέλουμε να έχει φορά προς τα έξω για αυτό παίρνουμε -1 και όχι 1). Το διανυσματικό πεδίο θα είναι $\overrightarrow{F}(x, 0, z) = (0, 0, z)$. Επομένως:

$$\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N}_1 = (0, 0, z) \cdot (0, 1, 0) = (0, 0, 0) \ .$$

Οπότε ο ρυθμός ροής διαμέσου της S_1 θα είναι 0.

• Για την S_2: Επίπεδο $z = 1$: Το κάθετο διάνυσμα από την εξίσωση του επιπέδου $0x + 0y + 1z = 1$ με φορά προς τα έξω θα είναι $\overrightarrow{N}_2 = (0, 0, -1) = \mathbf{\hat{n}_2}$ (θέλουμε να έχει φορά προς τα έξω για αυτό παίρνουμε -1 και όχι 1). Για $z = 1$ το διανυσματικό πεδίο γίνεται $\overrightarrow{F}(x, y, 1) = (xy, -y, 1)$. Επομένως:

$$\overrightarrow{F} \cdot \mathbf{\hat{n}_2} = (xy, -y, 1) \cdot (0, 0, -1) = -1 \ .$$

Το αντίστοιχο επιφανειακό ολοκλήρωμα επομένως θα είναι:

$$\iint_{S_2} (-1) dS = \int_{D_2} (-1) dxdy \ .$$

Η προβολή D_2 της S_2 θα είναι προφανώς ο μισός δίσκος $x^2 + y^2 \leqslant 2^2$ για $y \geqslant 0$. Χρησιμοποιώντας επομένως πολικές συντεταγμένες έχουμε:

$$0 \leqslant r \leqslant 2 \quad , \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \ .$$

Το ολοκλήρωμα λοιπόν γίνεται:

$$-\int_0^\pi \int_0^2 r dr d\theta = -\int_0^\pi \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^2 d\theta = -2\int_0^\pi d\theta = -2\pi \ .$$

• Για την S_3: Επίπεδο $z = 6$: Το κάθετο διάνυσμα με φορά προς τα έξω θα είναι $\overrightarrow{N}_3 = (0, 0, 6)$ και το αντιστοιχο μοναδιαίο θα είναι $\mathbf{\hat{n}_3} = \frac{\overrightarrow{N_3}}{\|\overrightarrow{N}_3\|} = (0, 0, 1)$. Το διανυσματικό πεδίο για $z = 6$ γίνεται $\overrightarrow{F}(x, y, 6) = (xy, -y, 6)$. Επομένως:

$$\overrightarrow{F}(x, y, 6) \cdot \mathbf{\hat{n}_3} = (xy, -y, 6) \cdot (0, 0, 1) = 6 \ .$$

Επειδή η προβολή του $z = 6$ είναι η ίδια με του $z = 1$ δουλεύουμε ακριβώς όπως στο $z = 1$ με πολικές και έχουμε:

$$\iint_{S_3} 6 dS = 6\int_0^2 \int_0^\pi r d\theta dr = 12\pi \ .$$

• Για την S_4: Για τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 4$, παίρνουμε την παραμέτρηση του κυλίνδρου $\overrightarrow{r}(u, v) = (2cosu, 2sinu, v)$. Το κάθετο διάνυσμα με φορά προς τα έξω θα είναι $\overrightarrow{N}_4 = \overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v = (-2sinu, 2cosu, 0) \times (0, 0, 1) = (2cosu, 2sinu, 0)$. Άρα το επιφανειακό ολοκλήρωμα θα είναι:

$$\iint_{D_4} \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(u, v)) \cdot (\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v) dudv = \iint_{D_4} ((2cosu)(2sinu), -2sinu, v) \cdot (2cosu, 2sinu, 0) dudv$$

$$= \iint_{D_4} (4cosusinu, -2sinu, v) \cdot (2cosu, 2sinu, 0) dudv = \iint_{D_4} (8cos^2usinu - 4sin^2u) dudv \ ,$$

όπου για το D_4 τα άκρα ολοκλήρωσης θα είναι:

$$0 \leqslant u \leqslant \pi \quad , \quad 1 \leqslant v \leqslant 6 \ .$$

Το ζητούμενο ολοκλήρωμα θα είναι:

$$\int_1^6 \int_0^\pi (8cos^2 usinu - 4sin^2 u)dudv \ .$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα:

$$sin^2 u = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos2u \ ,$$

ο υπολογισμός απλοποιείται:

$$\int_1^6 \int_0^\pi (8cos^2 usinu - 4(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos2u))dudv = \int_1^6 \int_0^\pi (8cos^2 usinu - 2 + 2cos2u)dudv$$
$$= \int_1^6 \left[-\frac{8}{3}cos^3 u - 2u + sin2u \right]_0^\pi dv = \int_1^6 (\frac{16}{3} - 2\pi)dv = \frac{80}{3} - 10\pi \ .$$

Αθροίζοντας λοιπόν τα παραπάνω ολοκληρώματα έχουμε το ζητούμενο:

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \mathbf{\hat{n}} dS = \iint_{S_1} \overrightarrow{F} \cdot \mathbf{\hat{n}_1} dS + \iint_{S_2} \overrightarrow{F} \cdot \mathbf{\hat{n}_2} dS + \iint_{S_3} \overrightarrow{F} \cdot \mathbf{\hat{n}_3} dS + \iint_{S_4} \overrightarrow{F} \cdot \mathbf{\hat{n}_4} dS$$
$$= -2\pi + 12\pi + \frac{80}{3} - 10\pi = \frac{80}{3} \ .$$

2ος τρόπος (Χρήση θεωρήματος Απόκλισης):
Έστω R το στερεό που περικλείεται από την κλειστή, κατα τμήματα λεία και θετικά προσανατολισμένη S. Από το θεώρημα του $Gauss$ έχουμε:

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \mathbf{\hat{n}} dS = \iiint_R div\overrightarrow{F} dxdydz = \iiint_R \nabla \cdot \overrightarrow{F} dxdydz = \iiint_R \frac{\partial xy}{\partial x} + \frac{\partial(-y)}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} dxdydz$$
$$= \iiint_R ydxdydz \ .$$

Μένει να βρούμε τα άκρα ολοκλήρωσης των x, y, z. Καθώς το σχήμα αποτελείται απο ένα τμήμα του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 4$ θα απλοποιήσει τον υπολογισμό η χρήση κυλινδρικών συντεταγμένων. Τα άκρα επομένως θα είναι:

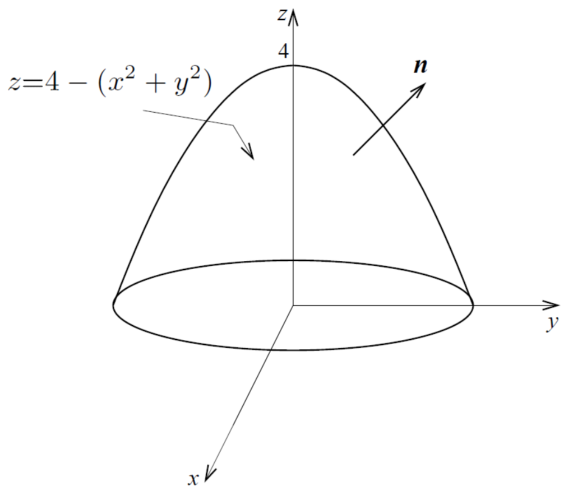
$$0 \leqslant r \leqslant 2 \quad , \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \quad , \quad 1 \leqslant z \leqslant 6 \quad , \quad J = r \ .$$

Το ολοκλήρωμα λοιπόν γίνεται:

$$\int_1^6 \int_0^\pi \int_0^2 r^2 sin\theta drd\theta dz = \int_1^6 \int_0^\pi \left[\frac{r^3}{3} sin\theta \right]_0^2 d\theta dz = \int_1^6 \int_0^\pi \frac{8}{3} sin\theta d\theta dz = \frac{8}{3} \int_0^\pi sin\theta \int_1^6 dzd\theta$$
$$\frac{8}{3}5 \int_0^\pi sin\theta d\theta = \frac{8}{3}5[-cos\theta]_0^\pi = \frac{8}{3}5 \cdot 2 = \frac{80}{3} \ .$$

11. Έστω S η επιφάνεια που αποτελείται απο το παραβολοειδές $z = 4 - x^2 - y^2$ και τα επίπεδα $z = 0$ και $z = 4$ και η οποία είναι προσανατολισμένη ώστε το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα να δείχνει προς τα πάνω.
α. Να δείξετε ότι η παραμέτρηση $\overrightarrow{r}(u, v) = (ucosv, usinv, 4 - u^2)$ όπου $0 \leqslant u \leqslant 2$ και $0 \leqslant v \leqslant 2\pi$ διατηρεί τον προσανατολισμό.
β. Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο σημείο $(1, 1, 2)$.
γ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν της S.
δ. Να βρεθεί ο ρυθμός ροής του διανυσματικού πεδίου $\overrightarrow{F}(x, y, z) = (y, -x, 3)$ δια μέσου της S.

Λύση:



α. Αφού δίνεται η παραμέτρηση αρκεί να υπολογίσουμε το κάθετο διάνυσμα $\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v$ και να δείξουμε ότι δείχνει προς τα πάνω.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{r}_u &= (cosv, sinv, -2u)\\
\overrightarrow{r}_v &= (-usinv, ucosv, 0)\\
\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v &= (2u^2cosv, 2u^2sinv, u)
\end{aligned}$$

Επειδή λοιπόν έχουμε ότι $u \geqslant 0$ έπεται ότι το $\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v$ έχει φορά προς τα πάνω. Άρα η παραμετρικοποίηση διατηρεί τον προσανατολισμό.

β. Η εξίσωση του εφαπτομένου επιπέδου στο σημείο $(1,1,2)$ δίνεται από την εξίσωση:

$$(x-1, y-1, z-2) \cdot \overrightarrow{N} \ ,$$

όπου $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v$ το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια. Έχουμε ότι $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v = (2u^2cosv, 2u^2sinv, u) = u(2ucosv, 2usinv, 1) = u(2x, 2y, 1)$. Άρα στο σημείο $(1,1,2)$ ένα κάθετο διάνυσμα είναι το $(2,2,1)$. Επομένως η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο σημείο $(1,1,2)$ είναι:

$$2(x-1) + 2(y-1) + 1(z-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 2y + z - 6 = 0 \ .$$

γ. Για το εμβαδόν χρησιμοποιούμε τον τύπο με την παραμέτρηση:

$$A(S) = \int_S dS = \int_D \|\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v\| dudv \ ,$$

όπου D το πεδίο ορισμού της παραμέτρησης. ·Άρα:

$$A(S) = \int_0^{2\pi} \int_0^2 u\sqrt{1+4u^2}dudv = 2\pi \left[\frac{1}{12}(1+4u^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 = \frac{\pi}{6}(17\sqrt{17}-1) \ .$$

δ. Ο ρυθμός ροής του $\overrightarrow{F}$ δια μέσου της S δίνεται από το επιφανειακό ολοκλήρωμα:

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{S} = \iint_S \overrightarrow{F} \cdot \mathbf{\hat{n}} dS = \iint_S \overrightarrow{F} \cdot \frac{\overrightarrow{N}}{\|\overrightarrow{N}\|} dS = \iint_D \overrightarrow{F} \cdot \frac{\overrightarrow{N}}{\|\overrightarrow{N}\|} \|\overrightarrow{N}\| dxdy = \iint_D \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N} dxdy \ ,$$

όπου $\overrightarrow{N}$ το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια, $\mathbf{\hat{n}}$ το κάθετο μοναδιαίο και D η προβολή στο xy επίπεδο ή το πεδίο ορισμού της παραμέτρησης. Αφού έχουμε την παραμέτρηση της S θα χρησιμοποιήσουμε την ισοδύναμη μορφή του παραπάνω ολοκληρώματος:

$$\iint_D \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(u,v)) \cdot (\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v) dudv = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(u,v)) \cdot (\overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v) dudv$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (usinv, -ucosv, 3) \cdot (2u^2 cosv, 2u^2 sinv, u) dudv$$
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (2u^3 sinvcosv - 2u^3 sinvcosv + 3u) dudv = \int_0^{2\pi} \int_0^2 3ududv = \int_0^2 3u[v]_0^{2\pi} du = 6\pi \int_0^2 udu$$
$$= 6\pi \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^2 = 12\pi \ .$$