Εισαγωγή

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$
Για μια διατεταγμένη n-άδα $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\overrightarrow{x}$, δηλαδή $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Ισότητα

Δύο διανύσματα $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ είναι ίσα όταν:

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} \Leftrightarrow x_i = y_i \quad , \text{ για } i = 1, \ldots, n$$

Πράξεις

Έστω $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \overrightarrow{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

1) $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$ (Πρόσθεση)
2) $\lambda\overrightarrow{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$ (Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός)

Το $\overrightarrow{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ είναι το μηδενικό στοιχείο της πρόσθεσης και το $-\overrightarrow{x} = (-1)\overrightarrow{x} = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ το αντίθετο διάνυσμα του $\overrightarrow{x}$.
Άρα

$$\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} = \overrightarrow{x} + (-\overrightarrow{y}) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n)$$

Κανονική Βάση του $\mathbb{R}^n$

Θεωρούμε τα διανύσματα

$$\begin{gathered} e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0) \\ e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0) \\ \vdots \\ e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1). \end{gathered}$$

Τα $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν το χώρο, δηλαδή

$\forall \overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ έχουμε $\overrightarrow{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$.
Άρα $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ είναι κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$.

Εσωτερικό Γινόμενο

Έστω $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.
Το εσωτερικό γινόμενο των $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ ορίζεται ως:

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Ιδιότητες Εσωτερικού Γινομένου

Έστω $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z} \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν:

1) $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{x}$
2) $\overrightarrow{x} \cdot (\overrightarrow{y} + \overrightarrow{z}) = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} + \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{z}$
3) $(\lambda \overrightarrow{x}) \cdot \overrightarrow{y} = \lambda(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}) = \overrightarrow{x} \cdot (\lambda \overrightarrow{y})$
4) $\overrightarrow{0} \cdot \overrightarrow{x} = 0$.

Ευκλείδεια Νόρμα

Νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ καλείται η απεικόνιση $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

1) $\|\overrightarrow{x}\| \geq 0 \quad \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ και $\|\overrightarrow{x}\| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$
2) $\|\lambda \overrightarrow{x}\| = |\lambda| \|\overrightarrow{x}\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$
3) $\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| \leq \|\overrightarrow{x}\| + \|\overrightarrow{y}\| \quad \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$.

Ευκλείδεια Νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ καλείται η απεικόνιση $\|\cdot\|_2 : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ ώστε $\forall \overrightarrow{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\|\overrightarrow{x}\|_2 (:= \|\overrightarrow{x}\|) = \sqrt{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$$

και η οποία ικανοποιεί τις παραπάνω 4 ιδιότητες νόρμας.

Ανισότητα Cauchy – Schwarz

Για κάθε $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$ ισχύει η ανισότητα *Cauchy – Schwarz*

$$|\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}| \leq \|\overrightarrow{x}\| \|\overrightarrow{y}\|$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{y} = \lambda \overrightarrow{x}$ ή $\overrightarrow{x} = \lambda \overrightarrow{y}$ (δηλαδή $\overrightarrow{x} \parallel \overrightarrow{y}$).

Απόδειξη: Αν $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$ ισχύει. Έστω ένα $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\overrightarrow{0}\}$.

$0 \leq \|\lambda\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|^2 = (\lambda\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) \cdot (\lambda\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \lambda\overrightarrow{x} \cdot \lambda\overrightarrow{x} + 2\lambda\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} + \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{y} = \lambda^2 \|\overrightarrow{x}\|^2 + 2\lambda\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} + \|\overrightarrow{y}\|^2.$

Πολυώνυμο 2ου βαθμού ως προς το $\lambda \in \mathbb{R}$. Άρα

$\Delta \leq 0 \Rightarrow 4\,(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y})^2 - 4\|\overrightarrow{x}\|^2 \|\overrightarrow{y}\|^2 \leq 0 \Rightarrow 4\,(\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y})^2 \leq 4\|\overrightarrow{x}\|^2 \|\overrightarrow{y}\|^2 \Rightarrow |\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}| \leq \|\overrightarrow{x}\| \|\overrightarrow{y}\|.$

Ευκλείδεια Απόσταση

Έστω $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$. Η Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των $\overrightarrow{x}$ και $\overrightarrow{y}$ ορίζεται ως:

$$d(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|$$

Ιδιότητες Ευκλείδειας Απόστασης

Έστω $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z} \in \mathbb{R}^n$. Τότε ισχύουν:

1) $d(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \geqslant 0$ και $d(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$
2) $d(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = d(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x})$
3) $d(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \leqslant d(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{z}) + d(\overrightarrow{z}, \overrightarrow{y})$ (Τριγωνική Ανισότητα)

Γωνία δύο μη-μηδενικών διανυσμάτων

Έστω $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\overrightarrow{0}\}$. Για τη γωνία $\theta = \sphericalangle(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ των $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ ισχύει ο τύπος

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \|\overrightarrow{x}\|\|\overrightarrow{y}\| cos\theta \quad , \quad \theta \in [0, \pi].$$

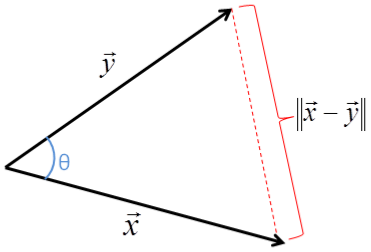
Απόδειξη: Από το νόμο των συνημιτόνων ισχύει ότι:

$$\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|^2 = \|\overrightarrow{x}\|^2 + \|\overrightarrow{y}\|^2 - 2\|\overrightarrow{x}\|\|\overrightarrow{y}\| \cos\theta.$$

Επιπλέον, από τον ορισμό της Ευκλείδιας νόρμας προκύπτει ότι:

$$\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|^2 = (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}) \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}) = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{y} - 2\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \|\overrightarrow{x}\|^2 + \|\overrightarrow{y}\|^2 - 2\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}.$$

Επομένως, από τις παραπάνω δύο σχέσεις έπεται η απόδειξη.



Σχήμα 1: Γωνία $\theta = \sphericalangle(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$

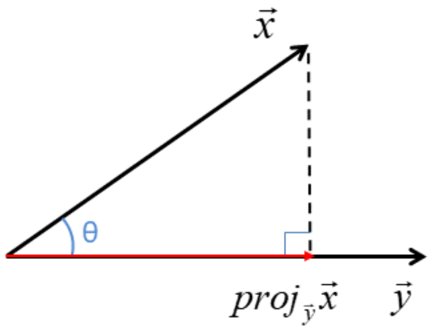
Κάθετα Διανύσματα

Έστω $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$. Τα $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ καλούνται κάθετα όταν το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν. Δηλαδή:

$$\overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{y} \Leftrightarrow \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = 0$$

Απόδειξη: Η απόδειξη έπεται άμεσα από τη σχέση $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \|\overrightarrow{x}\|\|\overrightarrow{y}\| \cos\theta$, καθώς όταν τα $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ είναι κάθετα ισχύει $\theta = 90^o$, δηλαδή $\cos\theta = 0$.

Προβολή Διανύσματος



Σχήμα 2: Προβολή του διανύσματος $\overrightarrow{x}$ στο $\overrightarrow{y}$

Έστω $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$ με $\overrightarrow{y} \neq \overrightarrow{0}$. Η προβολή ενός διανύσματος $\overrightarrow{x}$ πάνω σε ένα μη-μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{y}$ συμβολίζεται με $proj_{\overrightarrow{y}}(\overrightarrow{x})$ και δίνεται από τον τύπο:

$$proj_{\overrightarrow{y}}(\overrightarrow{x}) = \frac{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}}{\|\overrightarrow{y}\|^2}\overrightarrow{y}$$

Επιπλέον, η αριθμητική συνιστώσα (προβολή) του $\overrightarrow{x}$ κατά την κατεύθυνση του $\overrightarrow{y}$ συμβολίζεται με $comp_{\overrightarrow{y}}(\overrightarrow{x})$ και δίνεται απο:

$$comp_{\overrightarrow{y}}(\overrightarrow{x}) = \frac{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}}{\|\overrightarrow{y}\|}$$

Εξωτερικό Γινόμενο

Έστω $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3), \overrightarrow{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.
Το εξωτερικό γινόμενο των $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ ορίζεται ως:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - \overrightarrow{j}\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + \overrightarrow{k}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \\ &= \overrightarrow{i}(x_2y_3 - x_3y_2) - \overrightarrow{j}(x_1y_3 - x_3y_1) + \overrightarrow{k}(x_1y_2 - x_2y_1),\end{aligned}$$

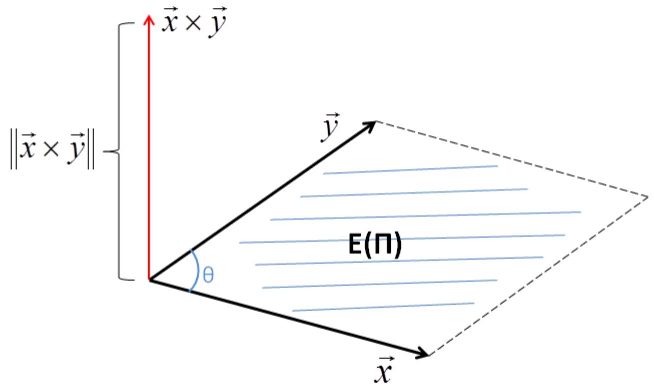
όπου $\overrightarrow{i} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{j} = (0, 1, 0)$, $\overrightarrow{k} = (0, 0, 1)$.

Ιδιότητες Εξωτερικού Γινομένου

Έστω $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^3$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν:

1) $\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$
2) $\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y} = -\overrightarrow{y} \times \overrightarrow{x}$
3) $\overrightarrow{x} \times (\lambda \overrightarrow{y}) = \lambda(\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y})$
4) $(\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}) \perp \overrightarrow{x}$ και $(\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}) \perp \overrightarrow{y}$
5) $\|\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}\|^2 = \|\overrightarrow{x}\|^2 \|\overrightarrow{y}\|^2 - (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y})^2$ (Ταυτότητα *Lagrange*)
6) $\|\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}\| = \|\overrightarrow{x}\| \|\overrightarrow{y}\| \sin\theta$

Παρατήρηση: Η ιδιότητα 6 ερμηνεύεται ως εξής:
Έστω $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^3$. Η νόρμα του εξωτερικού τους γινομένου $\|\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}\|$ ισούται με το εμβαδόν Ε(Π) του παραλληλογράμμου Π=$\{\lambda \overrightarrow{x} + \mu \overrightarrow{y} \ , \ 0 \leq \lambda, \mu \leq 1\}$.



Σχήμα 3: Ε(Π)=$\|\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}\| = \|\overrightarrow{x}\| \|\overrightarrow{y}\| sin\theta$

Σημείωση:
1) Για το εξωτερικό γινόμενο δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα.
2) Το εσωτερικό γινόμενο είναι μια απεικόνιση $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$.
Επομένως το $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}$ για $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$ είναι ένας πραγματικός αριθμός.
Το εξωτερικό γινόμενο είναι μια απεικόνιση $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$.
Επομένως το $\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}$ για $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^3$ είναι ένα διάνυσμα.

Μικτό Γινόμενο

Έστω $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, x_3), \overrightarrow{y} = (y_1, y_2, y_3), \overrightarrow{z} = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$.
Το μικτό γινόμενο των $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z}$ ορίζεται ως:

$$\overrightarrow{x} \cdot (\overrightarrow{y} \times \overrightarrow{z}) = (x_1, x_2, x_3) \cdot \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & y_3 \\ z_2 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & y_3 \\ z_1 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$