ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΑΝΑΛΥΣΗ II

1. Έστω τα $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^2$ με $\overrightarrow{x} = (3,5)$ και $\overrightarrow{y} = (-4,2)$. Να βρεθούν:
$1)\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$, $2)\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}$, $3)\overrightarrow{y} - \overrightarrow{x}$, $4) - \overrightarrow{x} + 2\overrightarrow{y}$
$5)\|\overrightarrow{x}\|$, $6)\|\overrightarrow{y}\|$, $7)\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}$, $8)\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|$

ΛΥΣΗ

1) $\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} = (3,5) + (-4,2) = (3-4, 5+2) = (-1,7)$

2) $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} = (3,5) - (-4,2) = (3-(-4), 5-2) = (7,3)$

3) $\overrightarrow{y} - \overrightarrow{x} = (-4,2) - (3,5) = (-4-3, 2-5) = (-7,-3)$

4) $-\overrightarrow{x} + 2\overrightarrow{y} = -(3,5) + 2(-4,2) = (-3-8, 5+4) = (-11,9)$

5) $\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x}} = \sqrt{(3,5)\cdot(3,5)} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$

6) $\|\overrightarrow{y}\| = \sqrt{\overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{y}} = \sqrt{(-4,2)\cdot(-4,2)} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

7) $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = (3,5)\cdot(-4,2) = -12 + 10 = -2$

8) $\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| \stackrel{\text{ερώτημα } 1}{=} \|(-1,7)\| = \sqrt{(-1,7)\cdot(-1,7)} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$

2. Έστω τα $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^2$ με $\overrightarrow{x} = (-3,-2)$ και $\overrightarrow{y} = (2,1)$. Να βρεθεί το $cos\theta$ με $\theta = \sphericalangle(\overrightarrow{y} - \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$

ΛΥΣΗ

$$(\overrightarrow{y} - \overrightarrow{x}) \cdot \overrightarrow{y} = \|\overrightarrow{y} - \overrightarrow{x}\|\|\overrightarrow{y}\|cos\theta \Rightarrow (5,3)\cdot(2,1) = \|(5,3)\|\|(2,1)\|cos\theta$$
$$\Rightarrow 10 + 3 = \sqrt{(5,3)\cdot(5,3)}\sqrt{(2,1)\cdot(2,1)}cos\theta \Rightarrow 13 = \sqrt{34}\sqrt{5}cos\theta \Rightarrow cos\theta = \frac{13}{\sqrt{170}}$$

3. **Έστω τα $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^3$ με $\overrightarrow{x} = (3,-1,1)$ και $\overrightarrow{y} = (1,2,-1)$. Να βρεθεί το $\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}$**

ΛΥΣΗ

$$(3,-1,1)\times(1,2,-1) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \overrightarrow{j}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \overrightarrow{k}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$(-1)\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + 7\overrightarrow{k} = (-1,4,7)$

Επιπλέον ισχύει ότι:

$(-1,4,7)\cdot(3,-1,1) = -3-4+7 = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y})\perp\overrightarrow{x}$.

Ομοίως προκύπτει ότι $(\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y})\perp\overrightarrow{y}$.

4. **Έστω τα $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^3$ με $\overrightarrow{x} = (1,2,3)$ και $\overrightarrow{y} = (-1,0,-1)$. Να βρεθεί το $\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}$**

ΛΥΣΗ

$$(1,2,3)\times(-1,0,-1) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \overrightarrow{i}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - \overrightarrow{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \overrightarrow{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-2,-2,2)$$

Το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα θα είναι:

$$\overrightarrow{\eta} = \frac{(1,2,3)\times(-1,0,-1)}{\|(1,2,3)\times(-1,0,-1)\|},$$

αφού

$$\|\overrightarrow{\eta}\| = \frac{\|(1,2,3)\times(-1,0,-1)\|}{\|(1,2,3)\times(-1,0,-1)\|} = 1.$$

Επομένως, το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα σε δύο διανύσματα $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^3$ είναι το $\overrightarrow{z} = \dfrac{\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}}{\|\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}\|}$

5. **Έστω δύο μοναδιαία διανύσματα $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ και $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}$. Να δείξετε ότι το διάνυσμα $\overrightarrow{r}$ διχοτομεί την γωνία $\theta = \sphericalangle(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$.**

ΛΥΣΗ

Αφού $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ μοναδιαία $\Rightarrow \|\overrightarrow{x}\| = 1$ και $\|\overrightarrow{y}\| = 1$.

Έστω $\theta_1 = \sphericalangle(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{x})$ και $\theta_2 = \sphericalangle(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{y})$ τότε:

$$cos\theta_1 = \frac{\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{x}}{\|\overrightarrow{r}\| \|\overrightarrow{x}\|} = \frac{(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) \cdot \overrightarrow{x}}{\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| \cancelto{1}{\|\overrightarrow{x}\|}} = \frac{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{x}}{\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|} = \frac{\cancelto{1}{\|\overrightarrow{x}\|^2} + \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}}{\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|} = \frac{1 + \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}}{\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|}.$$

Ομοίως

$$cos\theta_2 = \frac{\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{y}}{\|\overrightarrow{r}\| \|\overrightarrow{y}\|} = \frac{(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) \cdot \overrightarrow{y}}{\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| \|\overrightarrow{y}\|} \overset{(\|\overrightarrow{y}\|=1)}{=} \dots = \frac{1 + \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}}{\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|} = cos\theta_1$$

Άρα αφού ο περιορισμός της $cos\theta$ στο $[0,\pi]$ είναι '1-1' έχουμε ότι $\theta_1 = \theta_2$.

6. Έστω $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{y} \quad \forall \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$. Τότε $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

ΛΥΣΗ

$\overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{y} \Leftrightarrow \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = 0 \quad \forall \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$. Αφού ισχύει για οποιοδήποτε $\overrightarrow{y}$ στον $\mathbb{R}^n$, θα ισχύει και για $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y}$.
Επομένως, από υπόθεση προκύπτει ότι $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

7. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{x} - \frac{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}}{\|\overrightarrow{y}\|^2}\overrightarrow{y}$ και $\overrightarrow{y}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

ΛΥΣΗ

$$\left(\overrightarrow{x} - \frac{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}}{\|\overrightarrow{y}\|^2}\overrightarrow{y}\right) \cdot \overrightarrow{y} = \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} - \overrightarrow{y} \cdot \frac{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}}{\|\overrightarrow{y}\|^2}\overrightarrow{y} \overset{\left(\frac{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}}{\|\overrightarrow{y}\|^2} \in \mathbb{R}\right)}{=} \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} - \frac{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}}{\|\overrightarrow{y}\|^2}\overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{y} =$$

$$= \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} - \frac{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}}{\cancel{\|\overrightarrow{y}\|^2}}\cancel{\|\overrightarrow{y}\|^2} = \cancel{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}} - \cancel{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}} = 0. \quad \text{Επομένως } \left(\overrightarrow{x} - \frac{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}}{\|\overrightarrow{y}\|^2}\overrightarrow{y}\right) \perp \overrightarrow{y}.$$

8. (Απόδειξη ανισότητας Cauchy – Schwarz). Για δύο διανύσματα $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$ ισχύει η σχέση: $|\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}| \leq \|\overrightarrow{x}\| \|\overrightarrow{y}\|$.

ΛΥΣΗ

1ος τρόπος
Γνωρίζουμε ότι το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ των $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ ικανοποιεί την ισότητα:

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = \|\overrightarrow{x}\| \|\overrightarrow{y}\| cos\theta. \qquad \theta \in [0, \pi]$$

Επομένως

$$|\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}| = \|\overrightarrow{x}\| \|\overrightarrow{y}\| |cos\theta| \overset{|cos\theta| \leq 1}{\Longrightarrow} |\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}| \leq \|\overrightarrow{x}\| \|\overrightarrow{y}\|.$$

Η ισότητα ικανοποιείται για $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$, καθώς και για $\theta = 0$ ή $\theta = \pi$, δηλαδή $\overrightarrow{x} \parallel \overrightarrow{y}$.

2ος τρόπος
Αν $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{y} = \overrightarrow{0}$ ισχύει. Έστω ένα $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\overrightarrow{0}\}$.

$0 \leq \|\lambda\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}\|^2 = (\lambda\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y})\cdot(\lambda\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}) = \lambda\overrightarrow{x}\cdot\lambda\overrightarrow{x}+2\lambda\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}+\overrightarrow{y}\cdot\overrightarrow{y} = \lambda^2\|\overrightarrow{x}\|^2+2\lambda\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}+\|\overrightarrow{y}\|^2$.

Πολυώνυμο 2ου βαθμού ως προς το $\lambda \in \mathbb{R}$. Άρα

$\Delta \leq 0 \Rightarrow 4\,(\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y})^2 - 4\|\overrightarrow{x}\|^2\|\overrightarrow{y}\|^2 \leq 0 \Rightarrow \cancel{4}\,(\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y})^2 \leq \cancel{4}\|\overrightarrow{x}\|^2\|\overrightarrow{y}\|^2 \Rightarrow |\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}| \leq \|\overrightarrow{x}\|\|\overrightarrow{y}\|$.

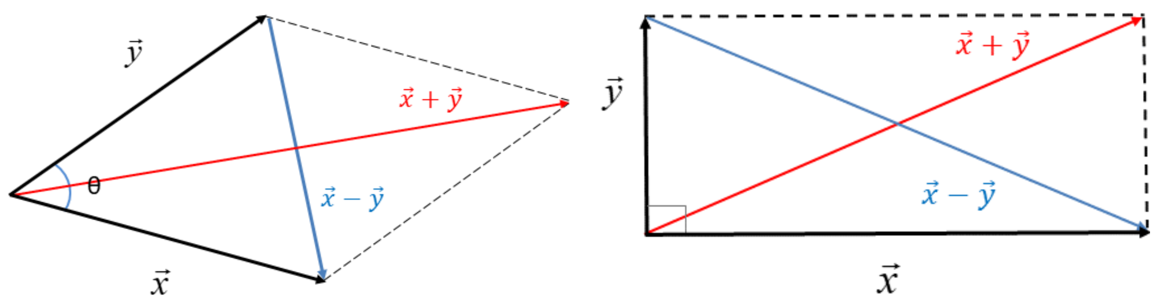
9. (Νόμος Παραλληλογράμμου). Για δύο διανύσματα $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$ ισχύει η σχέση: $\|\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}\|^2 + \|\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}\|^2 = 2\|\overrightarrow{x}\|^2 + 2\|\overrightarrow{y}\|^2$.

ΛΥΣΗ

$$\|\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}\|^2 + \|\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}\|^2 = (\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y})\cdot(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}) + (\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y})\cdot(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}) =$$
$$= \overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{x} + \overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y} + \overrightarrow{y}\cdot\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\cdot\overrightarrow{y} + \overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y} - \overrightarrow{y}\cdot\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\cdot\overrightarrow{y} \overset{(\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}=\overrightarrow{y}\,\overrightarrow{x})}{=}$$
$$= \|\overrightarrow{x}\|^2 + \|\overrightarrow{y}\|^2 + 2\cancel{\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}} + \|\overrightarrow{x}\|^2 - 2\cancel{\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y}} + \|\overrightarrow{y}\|^2 = 2\|\overrightarrow{x}\|^2 + 2\|\overrightarrow{y}\|^2$$

10. Να δείξετε ότι αν $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $\|\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}\| = \|\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}\|$, τότε $\overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{y}$.

ΛΥΣΗ



(α′) (β′)

$$\|\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}\|^2 = \|\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y}\|^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y})\cdot(\overrightarrow{x}+\overrightarrow{y}) = (\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y})\cdot(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{y})$$
$$\Leftrightarrow \cancel{\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{x}} + 2\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y} + \cancel{\overrightarrow{y}\cdot\overrightarrow{y}} = \cancel{\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{x}} - 2\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y} + \cancel{\overrightarrow{y}\cdot\overrightarrow{y}}$$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{x}\cdot\overrightarrow{y} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{x}\perp\overrightarrow{y}$.

11. Να βρεθεί η τιμή του $t \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $proj_{\overrightarrow{b}}(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{b}$, όπου $a = (1,t,1)$, $b = (9,1,1)$.

ΛΥΣΗ

$$proj_{\overrightarrow{b}}(\overrightarrow{a}) = \frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{b}\|^2}\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}$$

Επομένως για να ισχύει το ζητούμενο πρέπει:

$$\frac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{b}\|^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{9+t+1}{(\sqrt{81+1+1})^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{10+t}{83} = 1 \Leftrightarrow t = 73.$$

12. Αν $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ ανά δύο κάθετα μεταξύ τους. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει διάνυσμα $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ που να είναι κάθετο στα $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$.

ΛΥΣΗ

Έστω ότι υπάρχει τέτοιο $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\overrightarrow{0}\}$. Τότε:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v}\perp\overrightarrow{a} &\Leftrightarrow \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{a} = 0 \Leftrightarrow v_1a_1 + v_2a_2 + v_3a_3 = 0\\
\overrightarrow{v}\perp\overrightarrow{b} &\Leftrightarrow \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{b} = 0 \Leftrightarrow v_1b_1 + v_2b_2 + v_3b_3 = 0\\
\overrightarrow{v}\perp\overrightarrow{c} &\Leftrightarrow \overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{c} = 0 \Leftrightarrow v_1c_1 + v_2c_2 + v_3c_3 = 0
\end{aligned}$$

Το παραπάνω γραμμικό σύστημα μπορεί να γραφεί στη μορφή πινάκων:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1\\ v_2\\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}$$

όπου:

$$det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \ldots = c_1(a_2b_3 - a_3b_2) + c_2(a_3b_1 - a_1b_3) + c_3(a_1b_2 - a_2b_1) =$$

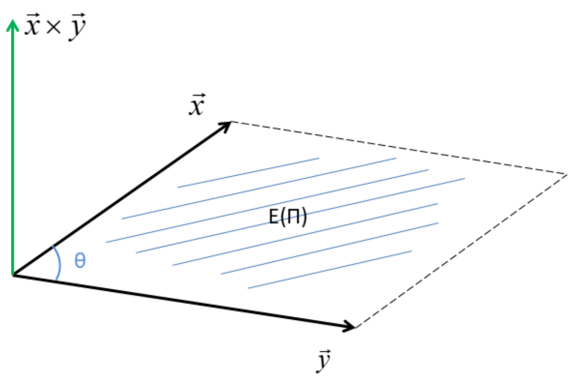
$$= \overrightarrow{c}\cdot\begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \overrightarrow{c}\cdot(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}).$$

Από υπόθεση, λόγω καθετότητας μεταξύ των $\overrightarrow{c}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ προκύπτει ότι η ορίζουσα είναι $\neq 0$.
Άρα ο πίνακας

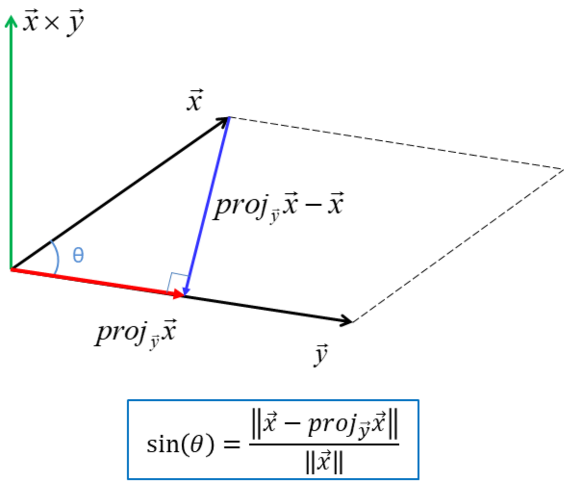
$\mathrm{A}=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος. Επομένως πολλαπλασιάζοντας το σύστημα απο αριστερά με τον A^{-1} προκύπτει ότι $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$. Άτοπο από υπόθεση.

13. Έστω $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^3$. Να αποδειχθεί ότι η νόρμα του εξωτερικού τους γινομένου $\|\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}\|$ ισούται με το εμβαδόν $\mathbf{E}(\boldsymbol{\Pi})$ του παραλληλογράμμου $\boldsymbol{\Pi}=\{\lambda \overrightarrow{x} + \mu \overrightarrow{y} \;\;,\;\; 0 \leq \lambda, \mu \leq 1\}$.

ΛΥΣΗ



(γ′)



(δ′)

Έστω $\theta = \sphericalangle(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ και $proj_{\overrightarrow{y}}\overrightarrow{(x)}$ η προβολή του $\overrightarrow{x}$ στο $\overrightarrow{y}$.

Τότε απο Ευκλείδια Γεωμετρία το εμβαδόν του παραλληλογράμμου δίνεται απο τη σχέση:
$\mathrm{E}(\Pi)=\|\overrightarrow{y}\|\|\overrightarrow{x} - proj_{\overrightarrow{y}}\overrightarrow{(x)}\| = \|\overrightarrow{x}\|\|\overrightarrow{y}\|\sin\theta$ (Εικόνα δ′),
όπου $\|\overrightarrow{x}\|$ το μήκος του διανύσματος $\overrightarrow{x}$ και $\|\overrightarrow{y}\|$ το μήκος του διανύσματος $\overrightarrow{y}$.

Επιπλέον, απο Ταυτότητα *Lagrange* ισχύει ότι:
$\|\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}\|^2 = \|\overrightarrow{x}\|^2\|\overrightarrow{y}\|^2 - (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y})^2 = \|\overrightarrow{x}\|^2\|\overrightarrow{y}\|^2 - \|\overrightarrow{x}\|^2\|\overrightarrow{y}\|^2(\cos\theta)^2$
$= \|\overrightarrow{x}\|^2\|\overrightarrow{y}\|^2(1 - (\cos\theta)^2) = \|\overrightarrow{x}\|^2\|\overrightarrow{y}\|^2(\sin\theta)^2 \Rightarrow \|\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}\| = \|\overrightarrow{x}\|\|\overrightarrow{y}\|\sin\theta$

Επομένως απο τις παραπάνω δύο σχέσεις έπεται η απόδειξη.

14. Να βρεθεί το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που παράγεται απο τα διανύσματα $\overrightarrow{\alpha} = (1, -2, 1)$ και $\overrightarrow{\beta} = (2, 1, 1)$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε αποδείξει ότι $\mathrm{E}(\Pi)=\|\overrightarrow{\alpha} \times \overrightarrow{\beta}\|$.

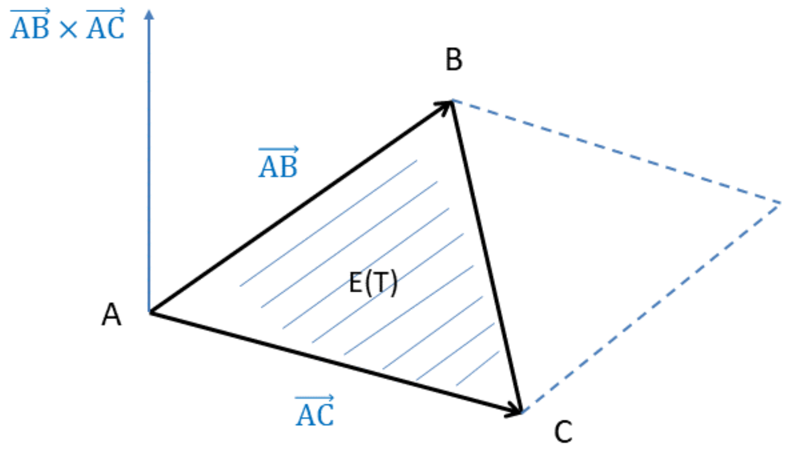
$$\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = (1,-2,1) \times (2,1,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(-3) + \vec{j} + 5\vec{k} = (-3,1,5)$$

Επομένως, Ε(Π)=$\|\vec{\alpha} \times \vec{\beta}\| = \sqrt{(-3)^2+1^2+5^2} = \sqrt{9+1+25} = \sqrt{35}$

15. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές $A=(1,0,0), B=(1,2,-1), C=(0,2,-4)$.

ΛΥΣΗ



Σχήμα 1: Ε(Τ)=$\frac{1}{2}$Ε(Π)

Το εμβαδόν του τριγώνου Ε(Τ) θα ισούται με $\frac{1}{2}$Ε(Π), όπου Π το παραλληλόγραμμο που παράγεται απο τα $\overrightarrow{AB}=(0,2,-1)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,2-4)$.

Έχουμε αποδείξει (Άσκηση 13) ότι Ε(Π)=$\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|$.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0,2,-1) \times (-1,2,-4) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} = (-6,1,2)$$

Επομένως, Ε(Τ)=$\frac{1}{2}$Ε(Π)=$\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2+1^2+2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36+1+4} = \frac{1}{2}\sqrt{41}$.