ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ
Γραμμικές συναρτήσεις και Διαφορισιμότητα πραγματικών συναρτήσεων

Γραμμικές συναρτήσεις:

Ορισμός: Μία συνάρτηση $\overrightarrow{f} : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ονομάζεται **γραμμική συνάρτηση** αν και μόνο αν ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{cases} \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{y}) \\ \overrightarrow{f}(\lambda \overrightarrow{x}) = \lambda \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) \end{cases} , \tag{1}$$

για $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in U$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, οι οποίες συνδιαστικά γράφονται ως:

$$\overrightarrow{f}(\lambda \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \lambda \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{y}), \tag{2}$$

ή ακόμα γενικότερα

$$\overrightarrow{f}(\lambda \overrightarrow{x} + \mu \overrightarrow{y}) = \lambda \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) + \mu \overrightarrow{f}(\overrightarrow{y}), \tag{3}$$

για $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in U$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Πρόταση: Έστω $\overrightarrow{f} = (f_1, f_2, ..., f_m) : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:

1. $\overrightarrow{f}$ γραμμική διανυσματική συνάρτηση $\Leftrightarrow$ $f_1, f_2, ..., f_m$ γραμμικές πραγματικές συναρτήσεις.
2. $\overrightarrow{f}$ γραμμική διανυσματική συνάρτηση $\Rightarrow \overrightarrow{f}(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$.

• Για $n = 1$, $m = 1$:

$$f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ γραμμική } \Leftrightarrow \exists\, a \in \mathbb{R} : \; f(x) = ax \;,\; x \in U \tag{4}$$

Απόδειξη:
$(\Leftarrow)$

$$f(\lambda x + \mu y) = a(\lambda x + \mu y) = \lambda a x + \mu a y = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

άρα είναι γραμμική μία συνάρτηση της μορφής (4).
$(\Rightarrow)$
Θέτουμε

$$f(1) = a \in \mathbb{R} \qquad \text{και άρα} \qquad f(x) = f(1x) = x f(1) = ax \tag{5}$$

επομένως δείξαμε ότι μία γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει τη μορφή (4) με a να δίνεται από την (5).

• Για $n \geq 2$, $m = 1$:

$$f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ γραμμική } \Leftrightarrow \exists\, \overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n : \; f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{x} \;,\; \overrightarrow{x} \in U \tag{6}$$

Απόδειξη:
$(\Leftarrow)$

$$f(\lambda\overrightarrow{x}+\mu\overrightarrow{y})=\overrightarrow{a}\cdot(\lambda\overrightarrow{x}+\mu\overrightarrow{y})=\lambda\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x}+\mu\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{y}=\lambda f(\overrightarrow{x})+\mu f(\overrightarrow{y}),$$

άρα δείξαμε ότι μία συνάρτηση της μορφής (6) είναι γραμμική.
$(\Rightarrow)$

$$\overrightarrow{x}=(x_1,x_2,...,x_n)=x_1\overrightarrow{e_1}+x_2\overrightarrow{e_2}+...+x_n\overrightarrow{e_n}$$

Θέτουμε

$$\overrightarrow{a}=(f(\overrightarrow{e_1}),f(\overrightarrow{e_2}),...,f(\overrightarrow{e_n})) \tag{7}$$

και έχουμε

$$f(\overrightarrow{x})=f(x_1\overrightarrow{e_1}+x_2\overrightarrow{e_2}+...+x_n\overrightarrow{e_n})=x_1f(\overrightarrow{e_1})+x_2f(\overrightarrow{e_2})+x_nf(\overrightarrow{e_n})=\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{x},$$

επομένως δείξαμε ότι μία γραμμική συνάρτηση $f:U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ έχει την μορφή (6) με $\overrightarrow{a}$ να δίνεται από την (7).

• Για $n\geq 2$, $m\geq 2$:

$\overrightarrow{f}=(f_1,f_2,...,f_m):U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ γραμμική (δηλαδή $f_1,f_2,...,f_m:U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ γραμμικές)

$$\Leftrightarrow\quad \exists\,\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_m}\in\mathbb{R}^n:\ f_i(\overrightarrow{x})=\overrightarrow{a_i}\cdot\overrightarrow{x}\ ,\ \overrightarrow{x}\in U\ ,\ 1\leq i\leq m \tag{8}$$

Επομένως

$$\overrightarrow{f}:U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m\ \text{γραμμική}\Leftrightarrow\ \exists\ m\times n\ \text{πίνακας}\ A\ \text{ώστε}\ \overrightarrow{f}=A\overrightarrow{x} \tag{9}$$

όπου τα στοιχεία της i-οστής γραμμής είναι τα στοιχεία του $\overrightarrow{a_i}$ για $i=1,2,...,m$.

Συγκεκριμένα, έστω $\overrightarrow{a_i}=(a_{i1},a_{i2},...,a_{in})\in\mathbb{R}^n$ για $i=1,2,...,m$. Τότε

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})=(f_1(\overrightarrow{x}),\,f_2(\overrightarrow{x}),\,...,\,f_m(\overrightarrow{x}))=(\overrightarrow{a_1}\cdot\overrightarrow{x},\,,\,\overrightarrow{a_2}\cdot\overrightarrow{x}\,,\,...\,\overrightarrow{a_m}\cdot\overrightarrow{x})\\&=(a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n\,,\,a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n\,,\,a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n)\\&=A\overrightarrow{x}\end{aligned}$$

με

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&...&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&...&a_{2n}\\...&...&...&...\\a_{m1}&a_{m2}&...&a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(\overrightarrow{e_1})&f_1(\overrightarrow{e_2})&...&f_1(\overrightarrow{e_n})\\f_2(\overrightarrow{e_1})&f_2(\overrightarrow{e_2})&...&f_2(\overrightarrow{e_n})\\...&...&...&...\\f_m(\overrightarrow{e_1})&f_m(\overrightarrow{e_2})&...&f_m(\overrightarrow{e_n})\end{pmatrix},$$

(Η απόδειξη μπορεί να γίνει ακολουθώντας τη διαδικασία που ακολουθήθηκε στην προηγούμενη περίπτωση (που είχαμε $n\geq 2, m=1$) για τη σχέση (8)).

Διαφορισιμότητα:

Ορισμός 1: Έστω $f:U\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών με U ανοικτό. Η συνάρτηση f ονομάζεται **διαφορίσιμη σε ένα σημείο** $\overrightarrow{a}$ του U, όταν υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει

$$\lim_{\overrightarrow{x}\to\overrightarrow{a}}\frac{|f(\overrightarrow{x})-f(\overrightarrow{a})-T(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{a})|}{||\overrightarrow{x}-\overrightarrow{a}||}=0\ , \tag{10}$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{\overrightarrow{x}\to\overrightarrow{a}}\frac{f(\overrightarrow{x})-f(\overrightarrow{a})-T(\overrightarrow{x}-\overrightarrow{a})}{||\overrightarrow{x}-\overrightarrow{a}||}=0\ ,$$

για $\overrightarrow{x} \in U$ με $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{a}$.

Πρόταση 1: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών με U ανοικτό. Η συνάρτηση f είναι **διαφορίσιμη στο σημείο** $\overrightarrow{a}$ του U αν και μόνο αν υπάρχει ένας $1 \times n$ πίνακας A έτσι ώστε να ισχύει

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} \frac{|f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{a}) - A(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})|}{||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}||} = 0 \ , \tag{11}$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} \frac{f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{a}) - A(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})}{||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}||} = 0 \ ,$$

όπου $A(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})$ είναι το γινόμενο του $1 \times n$ πίνακα A με τον $n \times 1$ πίνακα $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}$ (δηλαδή είναι ένα στοιχείο του $\mathbb{R}$ αφού $(1 \times n)(n \times 1) = 1 \times 1$).

Θεώρημα 1: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών, η οποία είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{a} \in U$. Τότε η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{a}$. Επιπλέον για τον μετασχηματισμό του Ορισμού 1 και για τον $1 \times n$ πίνακα A της Πρότασης 1, ισχύουν τα παρακάτω:

$$T(\overrightarrow{x}) = f_{x_1}(\overrightarrow{a})x_1 + f_{x_2}(\overrightarrow{a})x_2 + ... + f_{x_n}(\overrightarrow{a})x_n \ , \tag{12}$$

για κάθε $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ και

$$A = f'(\overrightarrow{a}) = [\ f_{x_1}(\overrightarrow{a}) \ f_{x_2}(\overrightarrow{a}) \ ... \ f_{x_n}(\overrightarrow{a})\ ] \ . \tag{13}$$

Απόδειξη: Εφόσον η f είναι διαφορίσιμη στο $\overrightarrow{a}$ τότε από τον Ορισμό 1 (σχέση (10)) για $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + h\overrightarrow{e_i}$ (με $h \neq 0$ πολύ μικρό) παίρνουμε

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(\overrightarrow{a} + h\overrightarrow{e_i}) - f(\overrightarrow{a}) - T(h\overrightarrow{e_i})|}{||h\overrightarrow{e_i}||} = 0 \ ,$$

η οποία καθώς ο T είναι γραμμικός μετασχηματισμός και $||\overrightarrow{e_i}|| = 1$ δίνει:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \to 0} \frac{|f(\overrightarrow{a} + h\overrightarrow{e_i}) - f(\overrightarrow{a}) - hT(\overrightarrow{e_i})|}{|h|} = 0 \\
\Rightarrow &\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(\overrightarrow{a} + h\overrightarrow{e_i}) - f(\overrightarrow{a})}{h} - T(\overrightarrow{e_i}) \right| = 0 \\
\Rightarrow &\lim_{h \to 0} \left[\frac{f(\overrightarrow{a} + h\overrightarrow{e_i}) - f(\overrightarrow{a})}{h} - T(\overrightarrow{e_i}) \right] = 0 \\
\Rightarrow &\lim_{h \to 0} \frac{f(\overrightarrow{a} + h\overrightarrow{e_i}) - f(\overrightarrow{a})}{h} = T(\overrightarrow{e_i}) \ . \qquad (14)
\end{aligned}$$

Επομένως από τη σχέση (14) και τον ορισμό της μερικής παραγώγου (βλέπε '4ο μάθημα'), υπάρχει η μερική παράγωγος $f_{x_i}(\overrightarrow{a})$ για $1 \leq i \leq n$, και ισχύει

$$f_{x_i}(\overrightarrow{a}) = T(\overrightarrow{e_i}) \ , \tag{15}$$

και επομένως η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{a}$.
Τότε εφόσον ο T είναι γραμμικός μετασχηματισμός και μέσω της (15) παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}
T(\overrightarrow{x}) = T(x_1, x_2, ...x_n) &= T(x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + ... + x_n\overrightarrow{e_n}) \\
&= x_1T(\overrightarrow{e_1}) + x_2T(\overrightarrow{e_2}) + ... + x_nT(\overrightarrow{e_n}) \\
&= f_{x_1}(\overrightarrow{a})x_1 + f_{x_2}(\overrightarrow{a})x_2 + ... + f_{x_n}(\overrightarrow{a})x_n
\end{aligned}$$

Ομοίως δουλεύουμε για να αποδείξουμε τη δεύτερη σχέση του Θεωρήματος 1 (σχέση (13)), δηλαδή θέτουμε πάλι $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + h\overrightarrow{e_i}$ (με $h \neq 0$ πολύ μικρό) και από τη σχέση (11) έχουμε ότι

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(\overrightarrow{a} + h\overrightarrow{e_i}) - f(\overrightarrow{a}) - A(h\overrightarrow{e_i})|}{||h\overrightarrow{e_i}||} = 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{|f(\overrightarrow{a} + h\overrightarrow{e_i}) - f(\overrightarrow{a}) - hA\overrightarrow{e_i}|}{|h|} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \left| \frac{f(\overrightarrow{a} + h\overrightarrow{e_i}) - f(\overrightarrow{a})}{h} - A\overrightarrow{e_i} \right| = 0 \qquad \Rightarrow \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(\overrightarrow{a} + h\overrightarrow{e_i}) - f(\overrightarrow{a})}{h} - A\overrightarrow{e_i} \right] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(\overrightarrow{a} + h\overrightarrow{e_i}) - f(\overrightarrow{a})}{h} = A\overrightarrow{e_i} \ , \tag{16}$$

(όπου $A\overrightarrow{e_i}$ είναι το γινόμενο του $1 \times n$ πίνακα με το διάνυσμα $\overrightarrow{e_i}$, καθώς κάθε διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$ γράφεται σαν πίνακας στήλη $n \times 1$, επομένως το γινόμενο $A\overrightarrow{e_i}$ είναι εν τέλει ένας αριθμός αφού είναι το γινόμενο $(1 \times n)(n \times 1) = (1 \times 1)$). Επομένως από τη σχέση (16) και τον ορισμό της μερικής παραγώγου (βλέπε '4ο μάθημα'), υπάρχει η μερική παράγωγος $f_{x_i}(\overrightarrow{a})$ για $1 \leq i \leq n$, και ισχύει

$$f_{x_i}(\overrightarrow{a}) = A\overrightarrow{e_i} \ , \tag{17}$$

για $1 \leq i \leq n$. Από τις παραπάνω σχέσεις (17) και από τον ορισμό της παραγώγου (βλέπε 4ο μάθημα) προκύπτει ότι

$$A = f'(\overrightarrow{a}) = [\ f_{x_1}(\overrightarrow{a}) \ f_{x_2}(\overrightarrow{a}) \ ... \ f_{x_n}(\overrightarrow{a}) \,] \ ,$$

(καθώς $A = [\,A\overrightarrow{e_1} \ A\overrightarrow{e_2} \ ... \ A\overrightarrow{e_n}\,]$ αφού $A\overrightarrow{e_i}$ είναι η i-οστή συντεταγμένη του $1 \times n$ πίνακα A).

Ορισμός 2: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών με U ανοικτό, η οποία είναι διαφορίσιμη σε ένα σημείο $\overrightarrow{a} \in U$. Τότε **διαφορικό της συνάρτησης f στο σημείο $\overrightarrow{a}$** ονομάζεται ο γραμμικός μετασχηματισμός $Df(\overrightarrow{a}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$Df(\overrightarrow{a})(\overrightarrow{x}) := \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(\overrightarrow{a}) x_i \ , \tag{18}$$

για $\overrightarrow{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Θεώρημα 2: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών με U ανοικτό και $\overrightarrow{a} \in U$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:
1. Η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{a}$.
2. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{a}$ και ισχύει:

$$\lim_{\overrightarrow{x}\to\overrightarrow{a}} \frac{f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{a}) - f'(\overrightarrow{a})(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})}{||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}||} = 0 \ , \tag{19}$$

όπου $f'(\overrightarrow{a})(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})$ είναι το γινόμενο του $1 \times n$ πίνακα $f'(\overrightarrow{a})$ με τον $n \times 1$ πίνακα $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}$ (καθώς το διάνυσμα $\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}$ του $\mathbb{R}^n$ μπορεί να γραφεί σαν πίνακας στήλη $n \times 1$),
η οποία γράφεται ισοδύναμα ως

$$\lim_{\overrightarrow{x}\to\overrightarrow{a}} \frac{f(\overrightarrow{x}) - f(\overrightarrow{a}) - \nabla f(\overrightarrow{a}) \cdot (\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a})}{||\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}||} = 0 \ . \tag{20}$$

Επιπλέον, αν ισχύει ένας από τους παραπάνω ισοδύναμους ισχυρισμούς (1. ή 2.) τότε για το διαφορικό της f στο σημείο $\overrightarrow{a}$ ισχύει ο ακόλουθος τύπος:

$$Df(\overrightarrow{a})(\overrightarrow{x}) = f'(\overrightarrow{a})\overrightarrow{x} = Jf(\overrightarrow{a})\overrightarrow{x} = \nabla f(\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{x} \tag{21}$$

Η τελευταία σχέση, δηλαδή η σχέση $Df(\overrightarrow{a})(\overrightarrow{x}) = \nabla f(\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{x}$, γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\begin{aligned} Df(\overrightarrow{a})(\overrightarrow{x}) &= [\ f_{x_1}(\overrightarrow{a}) \ f_{x_2}(\overrightarrow{a}) \ ... \ f_{x_n}(\overrightarrow{a}) \,] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= (f_{x_1}(\overrightarrow{a}), f_{x_2}(\overrightarrow{a}), ..., f_{x_n}(\overrightarrow{a})) \cdot (x_1, x_2, ...x_n) \end{aligned} \tag{22}$$

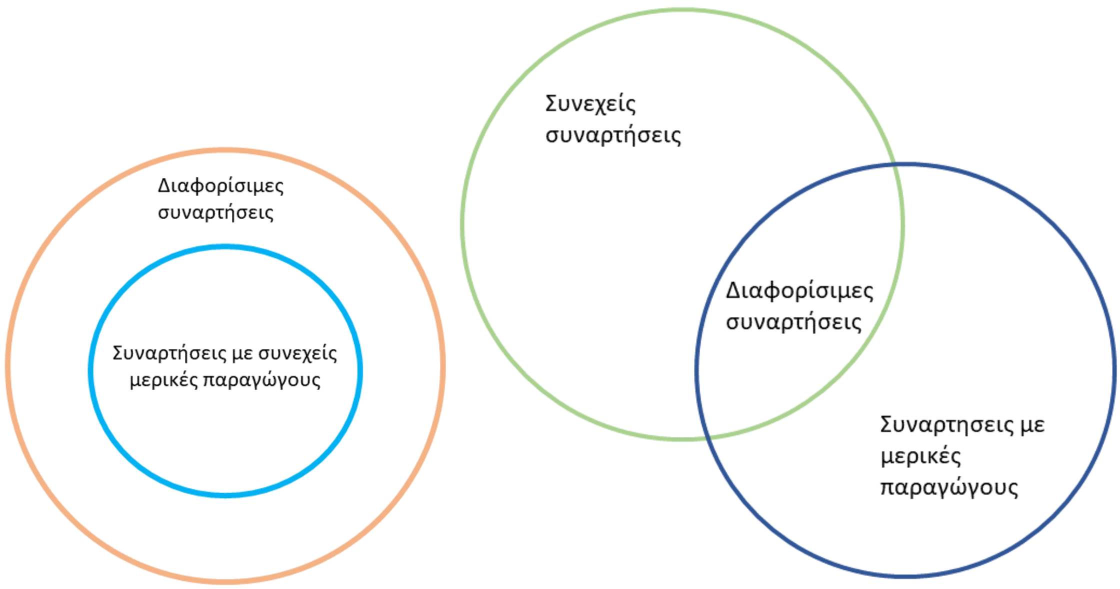
Πόρισμα 2: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία διαφορίσιμη συνάρτηση στο σημείο $\overrightarrow{a} \in U$. Τότε η f είναι συνεχής στο σημείο $\overrightarrow{a}$. Ο αντίθετος ισχυρισμός δεν ισχύει πάντα.

Αντιπαράδειγμα του αντίθετου ισχυρισμού είναι η συνάρτηση $f(x, y) = |x|$ η οποία είναι συνεχής στο $(0, 0)$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$ (αφού δεν έχει μερική παράγωγο ως προς x).

Θεώρημα 3: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία C^1 συνάρτηση (ή αλλιώς συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση) σε ένα σημείο $\overrightarrow{a} \in U$. Τότε η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{a}$. Ο αντίθετος ισχυρισμός δεν ισχύει πάντα.

Παρατήρηση: Μία διαφορίσιμη συνάρτηση σε ένα σημείο $\overrightarrow{a}$, έχει μερικές παραγώγους $f_{x_i}(\overrightarrow{a})$ $(1 \leq i \leq n)$ στο $\overrightarrow{a}$. Ο αντίθετος ισχυρισμός δεν ισχύει πάντα.

Αντιπαράδειγμα του αντίθετου ισχυρισμού είναι η συνάρτηση $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$
η οποία δεν είναι συνεχής στο (0,0) επομένως δεν είναι διαφορίσιμη στο (0,0) (από το Πόρισμα 2) αλλά έχει μερικές παραγώγους $f_x(0,0)$ και $f_y(0,0)$ στο σημείο (0,0).



Άσκηση 1: Έστω η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Να δειχθεί ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $(0, 0)$ με διαφορικό $Df(0, 0) = 0$.

Λύση: Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $f'(0, 0) = [0\ 0]$. Επίσης,

$$\frac{|f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0) \cdot (x,y)|}{||(x,y)-(0,0)||} = \frac{\left|f(x,y) - [0\,0]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right|}{||(x,y)-(0,0)||} = \frac{\dfrac{|x|y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|x|y^2}{x^2+y^2} \leq \frac{|x|y^2}{y^2} = |x| \to 0$$

για $(x,y) \to (0,0)$. Επομένως από την παραπάνω σχέση (και τις ιδιότητες ορίων) έχουμε ότι

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)|}{||(x,y)-(0,0)||} = 0\ .$$

Επομένως από το Θεώρημα 2 έχουμε ότι το διαφορικό δίνεται από τον τύπο

$$Df(0,0)(x,y) = \nabla f(0,0)\cdot(x,y) = [0\,0]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0\ .$$

Άσκηση 2: Να αποδειχθεί ότι δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$ η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}\ .$$

Λύση: Η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$, καθώς
$f(x,0) = 0 \to 0$ και $f(x,x) = \dfrac{1}{2} \to \dfrac{1}{2}$ για $x \to 0$, άρα δεν υπάρχει το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
Επομένως από το Πόρισμα 2 η f δεν είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$
(καθώς βάση του Πορίσματος, αν ήταν διαφορίσιμη στο (0,0) θα ήταν και συνεχής στο (0,0)).