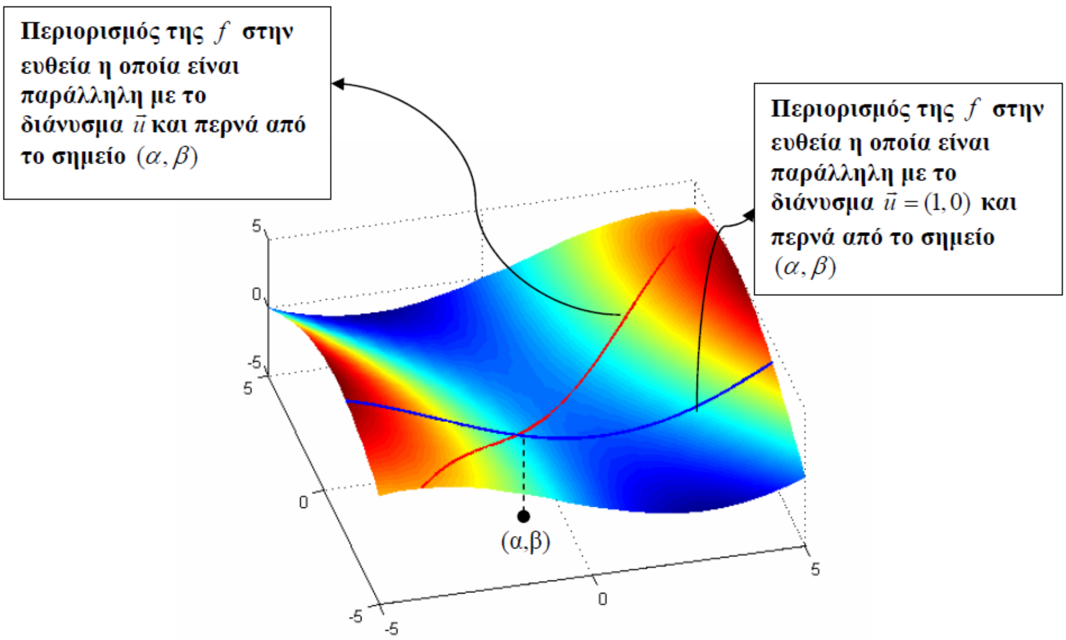
ΑΝΑΛΥΣΗ ΙΙ
Κατευθυνόμενη Παράγωγος

Κατευθυνόμενη Παράγωγος:

Ορισμός 1: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών με U ανοικτό, $\overrightarrow{a} = (a, b) \in U$ και $\overrightarrow{u} = (u, v)$ μία κατεύθυνση του $\mathbb{R}^2$ (δηλαδή $||\overrightarrow{u}|| = 1$). Τότε **κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο $\overrightarrow{a}$ ως προς την κατεύθυνση $\overrightarrow{u}$** είναι ο πραγματικός αριθμός $f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a})$ που ορίζεται από τον τύπο:

$$f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+uh, b+vh) - f(a,b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\overrightarrow{a} + h\overrightarrow{u}) - f(\overrightarrow{a})}{h} \qquad (1)$$

Γεωμετρική ερμηνεία: Η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a})$ είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f στο σημείο $\overrightarrow{a} = (a, b)$ κατά την κατεύθυνση $\overrightarrow{u} = (u, v)$ (συγκεκριμένα κατά μήκος της ευθείας του $\mathbb{R}^2$ η οποία περνάει από το σημείο (a, b) και είναι παράλληλη προς την κατεύθυνση $\overrightarrow{u}$).



Άρα η **κατευθυνόμενη παράγωγος** είναι η παράγωγος της (κόκκινης) συνάρτησης σε κάποιο σημείο (ενώ η **μερική παράγωγος** ως προς x είναι η παράγωγος της μπλε συνάρτησης σε κάποιο σημείο).

Σχόλιο: Η κατευθυνόμενη παράγωγος είναι μία επέκταση (γενίκευση) της μερικής παραγώγου, καθώς η μερική παράγωγος $f_x(a, b)$ της συνάρτησης $f(x, y)$ ως προς τη μεταβλητή x στο σημείο (a, b) είναι η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο (a, b) ως προς την κατεύθυνση $(1,0)$. Αντίστοιχα, η μερική παράγωγος $f_y(a,b)$ της συνάρτησης $f(x,y)$ ως προς τη μεταβλητή y στο σημείο (a,b) είναι η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο (a,b) ως προς την κατεύθυνση $(0,1)$.

Ορισμός 2: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών με U ανοικτό, $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, ..., a_n) \in U$ και $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, ...u_n)$ μία κατεύθυνση του $\mathbb{R}^n$ (δηλαδή $||\overrightarrow{u}|| = 1$). Τότε **κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο $\overrightarrow{a}$ ως προς την κατεύθυνση $\overrightarrow{u}$** είναι ο πραγματικός αριθμός $f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a})$ που ορίζεται από τον τύπο:

$$\begin{aligned} f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a}) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1 + u_1h, a_2 + u_2h, ..., a_n + u_nh) - f(a_1, a_1, ..., a_n)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\overrightarrow{a} + h\overrightarrow{u}) - f(\overrightarrow{a})}{h} \end{aligned} \tag{2}$$

Σχόλιο: Η κατευθυνόμενη παράγωγος είναι μία επέκταση (γενίκευση) της μερικής παραγώγου, καθώς η μερική παράγωγος $f_{x_i}(\overrightarrow{a})$ της συνάρτησης f ως προς τη μεταβλητή x_i στο σημείο $\overrightarrow{a}$ είναι η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο $\overrightarrow{a}$ ως προς την κατεύθυνση $\overrightarrow{e_i}$ (όπου $\overrightarrow{e_i}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$ που έχει όλες τις συντεταγμένες μηδέν εκτός από την i-οστή συντεταγμένη που είναι ίση με ένα).

Παρατήρηση 1: Μία συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $\overrightarrow{a}$, δεν έχει πάντα κατευθυνόμενη παράγωγο $f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a})$ στο σημείο $\overrightarrow{a}$ ως προς κάθε κατεύθυνση $\overrightarrow{u}$.

Παρατήρηση 2: Μία συνάρτηση f που έχει κατευθυνόμενη παράγωγο $f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a})$ σε ένα σημείο $\overrightarrow{a}$ ως προς κάθε κατεύθυνση $\overrightarrow{u}$, δεν είναι πάντα συνεχής στο σημείο $\overrightarrow{a}$.

Θεώρημα 1: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών που είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{a} \in U$. Τότε υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a})$ της f στο σημείο $\overrightarrow{a}$ για κάθε κατεύθυνση $\overrightarrow{u}$ και ισχύει ο τύπος:

$$f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a}) = Df(\overrightarrow{a})(\overrightarrow{u}) = \nabla f(\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{u} \tag{3}$$

Απόδειξη: Εφόσον η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη στο $\overrightarrow{a}$, αν θέσουμε $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} + h\overrightarrow{u}$ (για $h \neq 0$ πολύ μικρό), παίρνουμε

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(\overrightarrow{a} + h\overrightarrow{u}) - f(\overrightarrow{a}) - Df(\overrightarrow{a})(h\overrightarrow{u})|}{||h\overrightarrow{u}||} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{|f(\overrightarrow{a} + h\overrightarrow{u}) - f(\overrightarrow{a}) - hDf(\overrightarrow{a})(\overrightarrow{u})|}{|h|} = 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0} \left| \frac{f(\overrightarrow{a} + h\overrightarrow{u}) - f(\overrightarrow{a})}{h} - Df(\overrightarrow{a})(\overrightarrow{u}) \right| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(\overrightarrow{a} + h\overrightarrow{u}) - f(\overrightarrow{a})}{h} - Df(\overrightarrow{a})(\overrightarrow{u}) \right] = 0 \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(\overrightarrow{a} + h\overrightarrow{u}) - f(\overrightarrow{a})}{h} = Df(\overrightarrow{a})(\overrightarrow{u})$$

(όπου χρησιμοποιήθηκε η σχέση $||\overrightarrow{u}|| = 1$). Επομένως από την τελευταία σχέση, τον ορισμό της κατευθυνόμενης παραγώγου (Ορισμός 2) και τη σχέση (21) του 5ου μαθήματος έπεται το ζητούμενο.

Παρατήρηση 3: Μία συνάρτηση f που έχει κατευθυνόμενη παράγωγο $f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a})$ σε ένα σημείο $\overrightarrow{a}$ ως προς κάθε κατεύθυνση $\overrightarrow{u}$, δεν είναι πάντα διαφορίσιμη στο $\overrightarrow{a}$.

Θεώρημα 2: Έστω $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μία πραγματική συνάρτηση n μεταβλητών που είναι διαφορίσιμη στο σημείο $\overrightarrow{a} \in U$ με $\nabla f(\overrightarrow{a}) \neq 0$ και $\overrightarrow{u}$ μία κατεύθυνση του $\mathbb{R}^n$. Τότε η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a})$ (ως συνάρτηση του $\overrightarrow{u}$) παίρνει **μέγιστη τιμή** όταν τα διανύσματα $\nabla f(\overrightarrow{a})$ και $\overrightarrow{u}$ είναι παράλληλα και ομόρροπα και **ελάχιστη τιμή** όταν τα διανύσματα $\nabla f(\overrightarrow{a})$ και $\overrightarrow{u}$ είναι παράλληλα και αντίρροπα. Συγκεκριμένα, η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a})$ της συνάρτησης f στο σημείο $\overrightarrow{a}$ παίρνει μέγιστη τιμή ίση με $||\nabla f(\overrightarrow{a})||$ στην κατεύθυνση $\overrightarrow{u} = \dfrac{\nabla f(\overrightarrow{a})}{||\nabla f(\overrightarrow{a})||}$ και ελάχιστη τιμή ίση με $-||\nabla f(\overrightarrow{a})||$ στην κατεύθυνση $\overrightarrow{u} = -\dfrac{\nabla f(\overrightarrow{a})}{||\nabla f(\overrightarrow{a})||}$.

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 1 έχουμε ότι

$$f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a}) = \nabla f(\overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{u} = ||\nabla f(\overrightarrow{a})||\,||\overrightarrow{u}||cos\theta = ||\nabla f(\overrightarrow{a})||cos\theta \tag{4}$$

με θ τη γωνία μεταξύ $\nabla f(\overrightarrow{a})$ και $\overrightarrow{u}$. Αφού λοιπόν ισχύει ότι $-1 \leq cos\theta \leq 1$, καταλήγουμε ότι η $f_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{a})$ παίρνει τη μέγιστη τιμή όταν $cos\theta = 1$ (δηλαδή $\theta = 0$) και την ελάχιστη τιμή όταν $cos\theta = -1$ (δηλαδή $\theta = \pi$). Επομένως, η μέγιστη και ελάχιστη τιμή καθώς και οι κατευθύνσεις για τις οποίες παίρνει αυτές τις τιμές η κατευθυνόμενη παράγωγος δίνονται αντικαθιστώντας τις παραπάνω τιμές της γωνίας θ στη σχέση (4).

Άσκηση 1: Να υπολογιστεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{sin(xy)}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

στο σημείο (0,0) ως προς την κατεύθυνση $\overrightarrow{u} = (u,v)$.

Λύση: Από τον Ορισμό 1 έχουμε τον τύπο:

$$\begin{aligned} f_{(u,v)}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+uh, 0+vh) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{sin(uvh^2)}{vh}}{h} \\ &= \frac{u}{u} \lim_{h\to 0} \frac{sin(uvh^2)}{vh^2} = u \lim_{h\to 0} \frac{sin(uvh^2)}{uvh^2} = u1 = u \end{aligned}$$

για $uv \neq 0$. Μας απομένουν οι περιπτώσεις για $uv = 0$, δηλαδή για $u = 0$ ή $v = 0$ και επειδή έχουμε ορίσει την κατεύθυνση να έχει $||\overrightarrow{u}|| = 1$ αυτές οι κατευθύνσεις είναι εν τέλει οι $\overrightarrow{u} = (0,1)$ και $\overrightarrow{u} = (1,0)$. Επομένως,

$$f_{(0,1)}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$f_{(1,0)}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Άσκηση 2: Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

είναι παραγωγίσιμη στο (0,0) αλλά δεν υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{(u,v)}(0,0)$ για καμία κατεύθυνση (u,v) με $uv \neq 0$.

Λύση: Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο (0,0) με παράγωγο $f'(0,0) = [0\ 0]$ (βλέπε 4ο μάθημα, Άσκηση 5). Όσον αφορά την κατευθυνόμενη παράγωγο, από τον Ορισμό 1 έχουμε ότι

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+uh, 0+vh) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{uvh^2}{(u^2+v^2)h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{uv}{h} = \begin{cases} 0 \text{ για } uv = 0 \\ \text{δεν υπάρχει το όριο για } uv \neq 0 \end{cases}$$

(καθώς $\lim_{h\to 0+} \dfrac{uv}{h} = (uv)(+\infty)$ και $\lim_{h\to 0-} \dfrac{uv}{h} = (uv)(-\infty)$). Επομένως δεν υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{(u,v)}(0,0)$ της f στο (0,0) ως προς την κατεύθυνση (u,v) για $uv \neq 0$.

Άσκηση 3: Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}\,, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0\,, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

έχει κατευθυνόμενη παράγωγο $f_{(u,v)}(0,0)$ στο (0,0) ως προς κάθε κατεύθυνση $\overrightarrow{u} = (u,v)$ αλλά δεν είναι συνεχής στο (0,0).

Λύση: Από τον Ορισμό 1 έχουμε ότι

$$f_{(u,v)}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+uh,0+vh)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{uv^2h^3}{u^2h^2+v^4h^4}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{uv^2}{u^2+v^4h^2} = \frac{uv^2}{u^2} = \frac{v^2}{u} \text{ για } u\neq 0$$

Για την περίπτωση $u=0$, παίρνουμε την κατεύθυνση $(u,v)=(0,1)$ (ώστε $||(u,v)||=1$) και επομένως έχουμε

$$f_{(0,1)}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+0h,0+1h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{0}{h^4}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

Επομένως, η f έχει κατευθυνόμενες παραγώγους στο σημείο (0,0) ως προς όλες τις κατευθύνσεις $\overrightarrow{u} = (u,v)$.
Η συνάρτηση f όμως δεν είναι συνεχής στο (0,0) καθώς δεν υπάρχει καν το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ αφού

$$f(x,0) = \frac{0}{x^2} = 0 \to 0 \quad \text{και} \quad f(y^2,y) = \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}\ .$$

Άσκηση 4: Να υπολογιστεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της συνάρτησης $f(x,y,z) = xe^y + zsiny$ στο σημείο $\overrightarrow{a} = (1,0,1)$ ως προς την κατεύθυνση του διανύσματος $\overrightarrow{u} = (1,1,0)$.

Λύση: Η συνάρτηση f είναι διαφορίσιμη **διότι** οι μερικές της παράγωγοι

$$f_x(x,y,z) = e^y \quad , \quad f_y(x,y,z) = xe^y + zcosy \quad , \quad f_z(x,y,z) = siny$$

υπάρχουν και είναι συνεχείς. Η κλίση της f είναι η $\nabla f(x,y,z) = (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z) f_z(x,y,z)) = (e^y, xe^y + zcosy, siny)$ η οποία παίρνει στο σημείο $(1,0,1)$ την τιμή $\nabla f(1,0,1) = (1,2,0)$.

Το διάνυσμα $\overrightarrow{u} = (1,1,0)$ δεν είναι μοναδιαίο (δηλαδή $||u|| \neq 1$) επομένως θέλουμε να βρούμε την κατεύθυνσή του ώστε να βρούμε έπειτα την κατευθυνόμενη παράγωγο της f στο σημείο (1,0,1) ως προς την κατεύθυνση του $\overrightarrow{u}$. Επομένως η ζητούμενη κατεύθυνση (δηλαδή το ζητούμενο μοναδιαίο διάνυσμα) είναι η

$$\overrightarrow{w} = \frac{\overrightarrow{u}}{||\overrightarrow{u}||} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

Επομένως από το Θεώρημα 1 υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο (1,0,1) ως προς την κατεύθυνση του διανύσματος $\overrightarrow{u} = (1,1,0)$ (δηλαδή ως προς το μοναδιαίο διάνυσμα $\overrightarrow{w} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0))$ και δίνεται από τον τύπο

$$f_{\overrightarrow{w}}(\overrightarrow{a}) = \nabla f(1,0,1)\cdot\overrightarrow{w} = (1,2,0)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = 1\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\frac{1}{\sqrt{2}} + 0 = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\ .$$

Άσκηση 5: Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}\,, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0\,, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

έχει κατευθυνόμενη παράγωγο στο (0,0) ως προς την κατεύθυνση $\overrightarrow{u} = (u,v)$ αλλά δεν είναι διαφορίσιμη στο (0,0).

Λύση: Από τον ορισμό της κατευθυνόμενης παραγώγου έχουμε

$$f_{(u,v)}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(uh,vh) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{u^3h^3}{(u^2+v^2)h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} u^3 = u^3$$

(όπου χρησιμοποιήθηκε η σχέση $u^2 + v^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 = 1^2 = 1$).
Άρα η f έχει κατευθυνόμενη παράγωγο στο σημείο (0,0) ως προς κάθε κατεύθυνση $\overrightarrow{u} = (u,v)$ και **επομένως** είναι παραγωγίσιμη στο σημείο (0,0) με κλίση $\nabla f(0,0) = (1,0)$. Όμως το όριο

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0)\cdot(x,y)|}{||(x,y)-(0,0)||} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y) - f(0,0) - (1,0)\cdot(x,y)|}{||(x,y)-(0,0)||}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left|\dfrac{x^3}{x^2+y^2} - x\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

δεν υπάρχει, καθώς

$$\begin{cases} \lim_{(x,0)\to(0,0)} \dfrac{|x|y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{(x,0)\to(0,0)} \dfrac{0}{(y^2)^{3/2}} = 0 \\ \lim_{(x,x)\to(0,0)} \dfrac{|x|y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{(x,x)\to(0,0)} \dfrac{|x|x^2}{(2x^2)^{3/2}} = \lim_{(x,x)\to(0,0)} \dfrac{|x|^3}{(\sqrt{2})^3|x|^3} = \dfrac{1}{(\sqrt{2})^3} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

(από $(x^2)^{3/2} = (\sqrt{x^2})^3 = |x|^3$ και προφανώς $x^2 = |x|^2$). Επομένως από το Θεώρημα 2 του 5ου μαθηματος, η f δεν είναι διαφορίσιμη στο (0,0) (εφόσον έχουμε ήδη πεί ότι είναι παραγωγίσιμη οπότε για να είναι διαφορίσιμη θα έπρεπε το παραπάνω όριο να υπάρχει και να είναι ίσο με μηδέν).

Άσκηση 6: Έστω $f(x,y,z) = x - y^2 + xz^3$. (i) Να βρεθούν οι κατευθύνσεις $\overrightarrow{u}$ για τις οποίες παίρνει η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο $\overrightarrow{a} = (0,0,0)$ μέγιστη και ελάχιστη τιμή. (ii) Αντίστοιχα, να βρεθούν οι κατευθύνσεις $\overrightarrow{u}$ για τις οποίες παίρνει η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο σημείο $\overrightarrow{a} = (2,1,1)$ μέγιστη και ελάχιστη τιμή.

Λύση: $\nabla f(x,y,z) = (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z)) = (1+z^3,\ -2y,\ 3xz^2)$

(i) Στο σημείο $\overrightarrow{a} = (0,0,0)$ έχουμε $\nabla f(0,0,0) = (1,0,0)$.
Επομένως, από το Θεώρημα 2 έχουμε ότι η κατεύθυνση για την οποία η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\overrightarrow{u}}(0,0,0)$ παίρνει μέγιστη τιμή είναι η

$$\overrightarrow{u} = \frac{\nabla f(0,0,0)}{||\nabla f(0,0,0)||} = \frac{(1,0,0)}{||(1,0,0)||} = (1,0,0)$$

και η κατεύθυνση για την οποία η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\overrightarrow{u}}(0,0,0)$ παίρνει ελάχιστη τιμή είναι η

$$\overrightarrow{u} = -\frac{\nabla f(0,0,0)}{||\nabla f(0,0,0)||} = -\frac{(1,0,0)}{||(1,0,0)||} = (-1,0,0).$$

(ii) Στο σημείο $\overrightarrow{a} = (2,1,1)$ έχουμε $\nabla f(2,1,1) = (2,-2,6)$.
Επομένως, από το Θεώρημα 2 έχουμε ότι η κατεύθυνση για την οποία η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\overrightarrow{u}}(2,1,1)$ παίρνει μέγιστη τιμή είναι η

$$\overrightarrow{u} = \frac{\nabla f(2,1,1)}{||\nabla f(2,1,1)||} = \frac{(2,-2,6)}{||(2,-2,6)||} = (\frac{2}{\sqrt{44}}, \frac{-2}{\sqrt{44}}, \frac{6}{\sqrt{44}})$$

και η κατεύθυνση για την οποία η κατευθυνόμενη παράγωγος $f_{\overrightarrow{u}}(2,1,1)$ παίρνει ελάχιστη τιμή είναι η

$$\overrightarrow{u} = -\frac{\nabla f(2,1,1)}{||\nabla f(2,1,1)||} = -\frac{(2,-2,6)}{||(2,-2,6)||} = (\frac{-2}{\sqrt{44}}, \frac{2}{\sqrt{44}}, \frac{-6}{\sqrt{44}}).$$