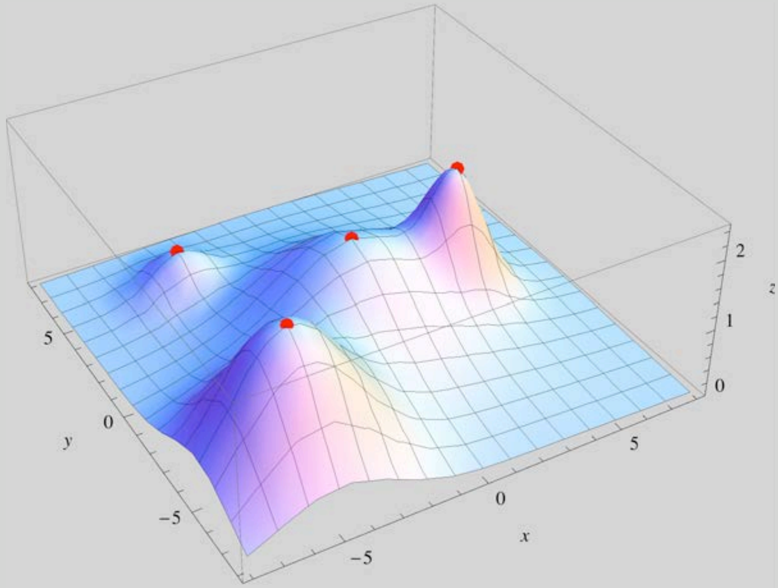
10. Ακρότατα - Ορισμός

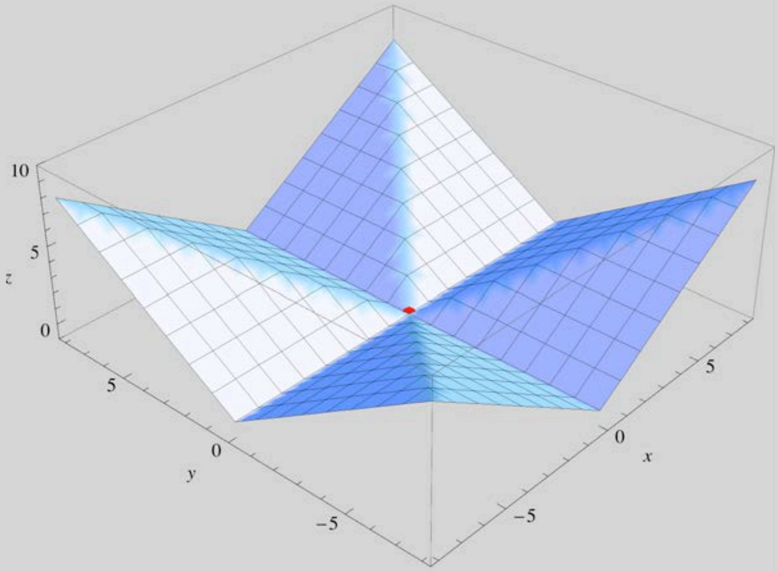
Έστω $f(x, y)$ ορισμένη σε περιοχή R που περιέχει το σημείο $\vec{a} = (x_0, y_0)$. Στην περίπτωση αυτή:

1. *Η f παρουσιάζει* ***τοπικό μέγιστο*** *στο σημείο $\vec{a}$, αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα σημεία (x, y) του R που ανήκουν σε ένα ανοικτό δίσκο κέντρου $\vec{a}$ και ακτίνας ε, ισχύει η σχέση $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$.*

2. *Η f παρουσιάζει* ***τοπικό ελάχιστο*** *στο σημείο $\vec{a}$, αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα σημεία (x, y) του R που ανήκουν σε ένα ανοικτό δίσκο κέντρου $\vec{a}$ και ακτίνας ε, ισχύει η σχέση $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$.*

Τα παρακάτω σχήματα είναι ενδεικτικά. Στο αριστερό σχήμα έχουμε 4 σημεία τοπικών μεγίστων, ενώ στο δεξιό έχουμε άπειρα σημεία τοπικού ελαχίστου.


2
z
1
0
5
0
y
−5
5
0
x
−5


10
5
z
0
5
0
y
−5
5
0
x
−5

11. Ακρότατα - Κριτήριο Fermat παράγωγος 1ης τάξης (I)

Θεώρημα

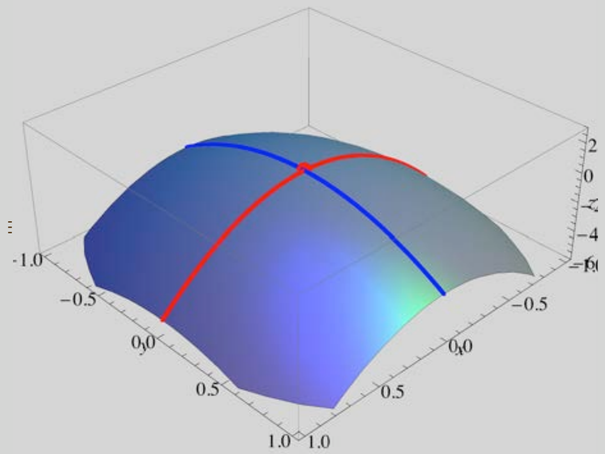
Αν η συνάρτηση $f(x, y)$ εμφανίζει τοπικό μέγιστο ή τοπικό ελάχιστο σε κάποιο εσωτερικό σημείο $\vec{a} = (x_0, y_0)$ του πεδίου ορισμού της, στο οποίο υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι, τότε ισχύει η σχέση

$$\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = 0.$$

Δηλαδή το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $\vec{a}$ είναι παράλληλο με το επίπεδο $x - y$.

Απόδειξη

Η απόδειξη είναι αρκετά απλή. Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο $\vec{a}$ τοπικό μέγιστο. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x, y_0)$ (κόκκινη γραμμή). Η g παρουσιάζει στο σημείο x_0 τοπικό μέγιστο. Άρα από το γνωστό θεώρημα του Fermat για τις συναρτήσεις μιας μεταβλητής προκύπτει ότι $f_x(x_0, y_0) = g'(x_0) = 0$. Θεωρώντας τη συνάρτηση $h(y) = f(x_0, y)$ (μπλε γραμμή) και ακολουθώντας τα ίδια βήματα αποδεικνύουμε ότι $f_y(x_0, y_0) = 0$. Η απόδειξη για το τοπικό ελάχιστο είναι παρόμοια.



11. Ακρότατα - Κριτήριο Fermat παράγωγος 1ης τάξης (II)

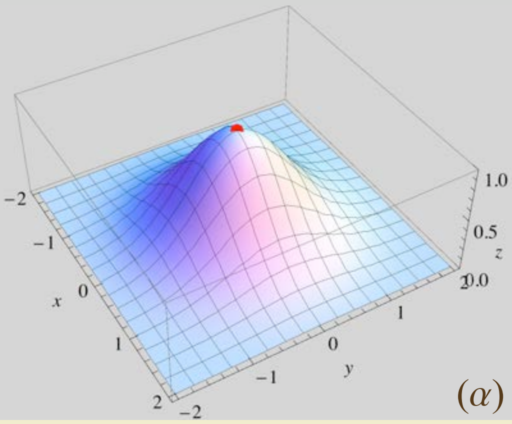
Όπως ισχύει για τις συναρτήσεις μίας μεταβλητής, το παραπάνω θεώρημα μας λέει ότι τα μόνα σημεία όπου μια συνάρτηση $f(x, y)$ μπορεί ποτέ να εμφανίσει ακρότατα είναι:

1. Εσωτερικά σημεία στα οποία ισχύει η σχέση $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = 0$. (βλέπε Σχήμα α, $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$)

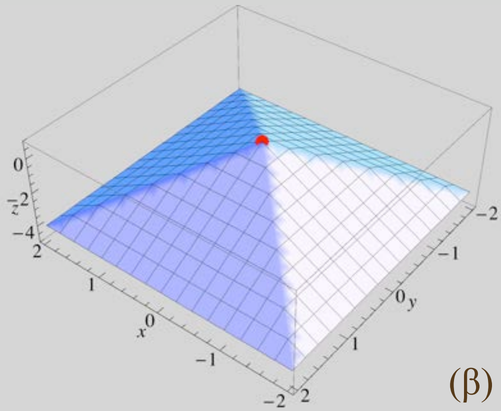
2. Εσωτερικά σημεία όπου μία τουλάχιστον εκ των μερικών παραγώγων δεν υπάρχει.
(βλέπε Σχήμα b, $f(x, y) = |x-y| + |x+y|$)

3. Συνοριακά σημεία του πεδίου ορισμού της συνάρτησης. (βλέπε Σχήμα c, $f(x, y) = \sqrt{x-y} + \sqrt{x+y}$)

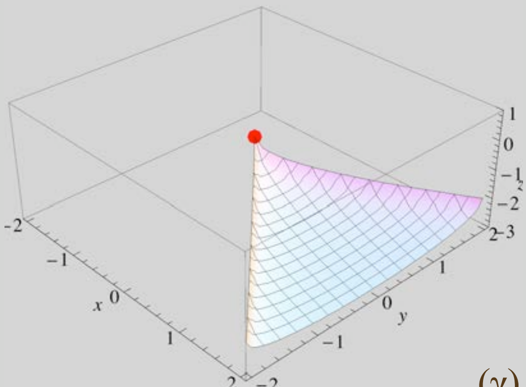
Τα σημεία των δύο πρώτων κατηγοριών ονομάζονται ***κρίσιμα σημεία.***



(α)



(β)



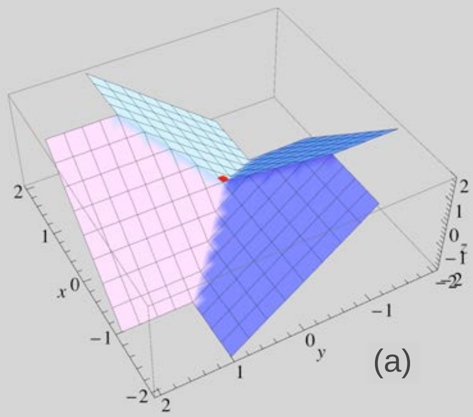
(γ)

12. *Σαγματικά Σημεία* (saddle points)

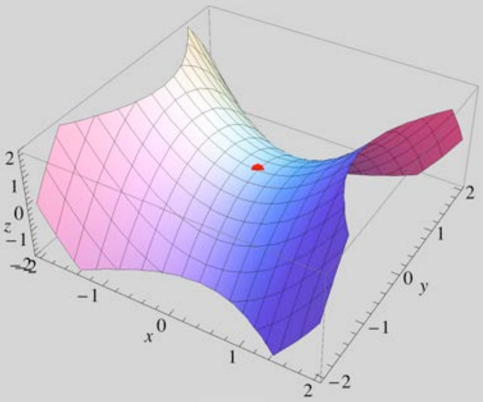
Όπως έχουμε ήδη τονίσει, κάθε κρίσιμο σημείο δεν είναι αναγκαστικά σημείο τοπικού ακροτάτου. Έτσι έχουμε τον παρακάτω ορισμό.

Θα λέμε ότι σε ένα κρίσιμο σημείο $\vec{a} = (x_0, y_0)$ *η* f *παρουσιάζει* ***σαγματικό σημείο,*** *αν σε κάθε ανοιχτό κυκλικό δίσκο με κέντρο το* $\vec{a}$ *υπάρχουν σημεία του πεδίου ορισμού της* f *όπου* $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ *και σημεία του πεδίου ορισμού όπου* $f(x, y) < f(x_0, y_0)$*. Το σημείο* $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ *ονομάζεται σαγματικό σημείο* (saddle point).

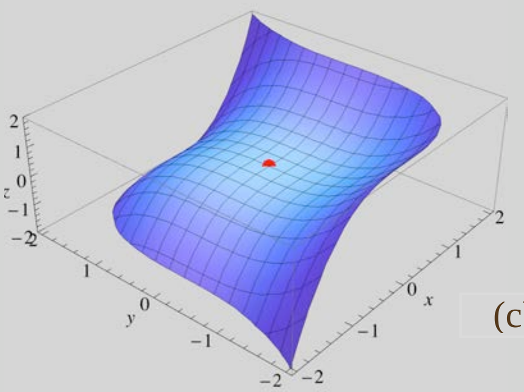
Τρεις συναρτήσεις που εμφανίζουν σαγματικά σημεία στο (0,0)*. Στο σχήμα* (a) *εμφανίζεται η συνάρτηση* $f(x, y) = -|x - y| + |x + y|$*, στο* (b) *η* $f(x, y) = x^2 - y^2$ *και στο* (c) *η* $f(x, y) = x^3/2 - y^3/4$.



(a)



(b)



(c)

13. Κριτήριο 2ης παραγώγου (Ι)

Πριν αναπτύξουμε το θεώρημα πρέπει να δώσουμε κάποιους ορισμούς που αφορούν πίνακες.

Ένας συμμετρικός πίνακας A *διαστάσεων* $N \times N$ *ονομάζεται*
θετικά ορισμένος*, όταν ισχύει* $u\,A\,u^T > 0$, *για κάθε* $u \neq 0$,
αρνητικά ορισμένος*, όταν ισχύει* $u\,A\,u^T < 0$, *για κάθε* $u \neq 0$,
αόριστος*, όταν υπάρχουν* u *και* v *τέτοια ώστε:* $u\,A\,u^T > 0$, $v\,A\,v^T < 0$.

Έστω ένας πίνακας $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. *Ισχύουν τα εξής:*

1. Ο A *είναι* ***θετικά ορισμένος****, αν και μόνο αν* $a > 0$ *και* $a\,c - b^2 > 0$.
2. Ο A *είναι* ***αρνητικά ορισμένος****, αν και μόνο αν* $a < 0$ *και* $a\,c - b^2 > 0$.

Τα παραπάνω είναι μια ειδική περίπτωση του Θεωρήματος *του* Sylvester.

◄ | ►

13. Κριτήριο 2ης παραγώγου (II)

Θεώρημα

Έστω f μια συνάρτηση δύο μεταβλητών, η οποία έχει συνεχείς μερικές παραγώγους μέχρι και 2ης τάξης σε όλο το ανοικτό πεδίο ορισμού. Έστω επίσης ένα κρίσιμο σημείο $\vec{a} = (x_0, y_0)$. Ισχύουν τα εξής:

1. Αν ο Εσσιανός πίνακας $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ είναι ***θετικά ορισμένος***, τότε η f παρουσιάζει στο $\vec{a}$ ***τοπικό ελάχιστο***.

2. Αν ο Εσσιανός πίνακας $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ είναι ***αρνητικά ορισμένος***, τότε η f παρουσιάζει στο $\vec{a}$ ***τοπικό μέγιστο***.

3. Αν ο Εσσιανός πίνακας $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ είναι ***αόριστος***, τότε η f παρουσιάζει στο $\vec{a}$ ***σαγματικό σημείο***.

4. Σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το $\vec{a}$.

Με βάση αυτά που αναφέραμε για τους συμμετρικούς πίνακες (θεώρημα Sylvester) οι παραπάνω συνθήκες μπορούν να ξαναγραφούν ως εξής:

1. Αν $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ και $f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^{\,2}(x_0, y_0) > 0$, τότε η f παρουσιάζει στο $\vec{a}$ ***τοπικό ελάχιστο***.

2. Αν $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ και $f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^{\,2}(x_0, y_0) > 0$, τότε η f παρουσιάζει στο $\vec{a}$ ***τοπικό μέγιστο***.

3. Αν $f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^{\,2}(x_0, y_0) < 0$, τότε η f παρουσιάζει στο $\vec{a}$ ***σαγματικό σημείο***.

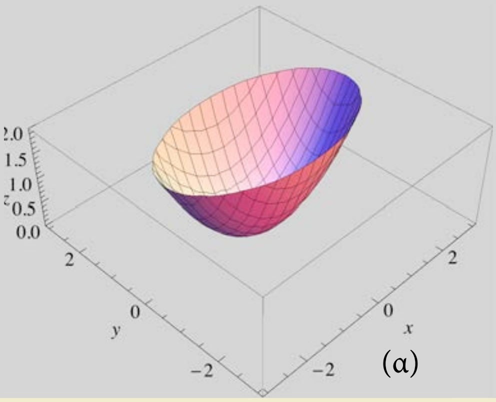
4. Αν $f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^{\,2}(x_0, y_0) = 0$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε για το $\vec{a}$.

13. Κριτήριο 2ης παραγώγου - Απόδειξη (III)

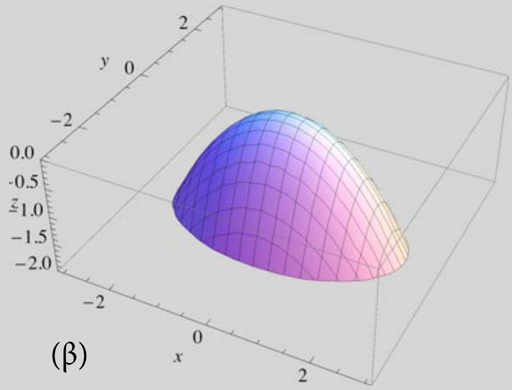
Δεν θα δώσουμε μια ολοκληρωμένη απόδειξη, αλλά θα αναφέρουμε την ***βασική ιδέα*** *της απόδειξης. Καταρχήν, πρέπει να αναφερθούμε σε μερικά στοιχεία της* ***αναλυτικής γεωμετρίας***.

Η *συνάρτηση* $f(\vec{x}) = \vec{x}\, A\, \vec{x}^T$, *όπου* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ *ένας συμμετρικός* 2 *επί* 2 *πίνακας, είναι ένα πραβολοειδές που μπορεί να πάρει διάφορες μορφές. Συγκεκριμένα:*

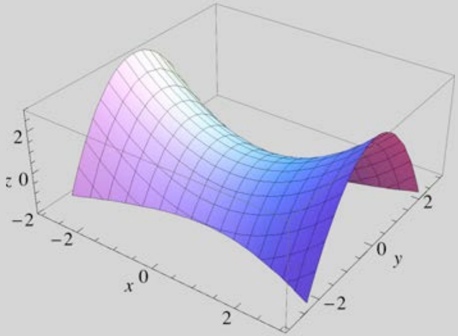
Αν ο A *είναι* ***θετικά ορισμένος***, *τότε η* f *είναι ένα* ***κυρτό ελλειπτικό παραβολοειδές*** όπως *φαίνεται στο σχήμα* (*α*).
Αν ο A *είναι* ***αρνητικά ορισμένος***, *τότε η* f *είναι ένα* ***κοίλο ελλειπτικό παραβολοειδές*** όπως *φαίνεται στο σχήμα* (*β*).
Αν ο A *είναι ικανοποιεί την* $a\,c - b^2 < 0$, *τότε η* f *είναι ένα* ***υπερβολικό παραβολοειδές*** όπως *φαίνεται στο σχήμα* (*γ*).



(α)



(β)



(γ)

◀ | ▶

13. Κριτήριο 2ης παραγώγου - Απόδειξη (IV)

Ας θυμηθούμε τώρα την προσέγγιση κατά **Taylor** *της συνάρτησης* f *στο σημείο* $\vec{a} = (x_0, y_0)$, *μέχρι και τον* ***δεύτερο όρο***.

$$f(\vec{x}) \cong f(\vec{a}) + \vec{\nabla} f^T(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) + \frac{1}{2!}\left(\vec{x} - \vec{a}\right) \cdot \nabla^2 f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})^T.$$

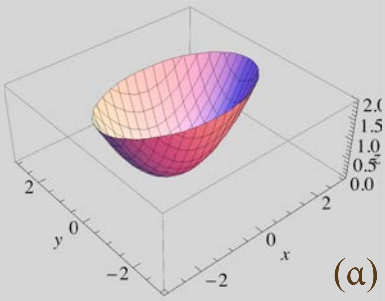
Επειδή *στο σημείο* $\vec{a} = (x_0, y_0)$ *έχουμε τοπικό ακρότατο θα ισχύει το κριτήριο* 1*ης τάξης* (Fermat), *δηλαδή* $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \vec{0}$. Επομένως *η συνάρτηση* f *μπορεί να προσεγγισθεί (κοντά στο* $\vec{a}$*) από μια τετραγωνική μορφή*:

$$f(\vec{x}) \cong f(\vec{a}) + \frac{1}{2!}\left(\vec{x} - \vec{a}\right) \cdot \nabla^2 f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a})^T.$$ Επομένως:

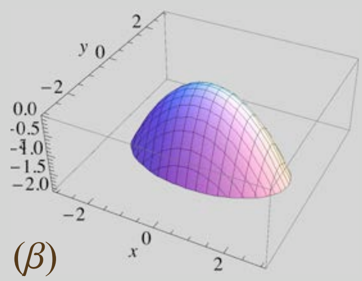
1. Αν $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ *και* $f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}{}^2(x_0, y_0) > 0$, *τότε ο πίνακας* $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ *(δηλαδή η* Εσσιανή *της* f*) είναι θετικά ορισμένος και επομένως η* f *προσεγγίζεται κοντά στο* $\vec{a}$ *με ένα* ***κυρτό ελλειπτικό παραβολοειδές.*** *Άρα η* f *παρουσιάζει στο* $\vec{a}$ ***τοπικό ελάχιστο.***

2. Αν $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ *και* $f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}{}^2(x_0, y_0) > 0$, *τότε ο πίνακας* $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ *είναι αρνητικά ορισμένος και επομένως η* f *προσεγγίζεται κοντά στο* $\vec{a}$ *με ένα* ***κοίλο ελλειπτικό παραβολοειδές.*** *Άρα παρουσιάζει στο* $\vec{a}$ ***τοπικό μέγιστο.***

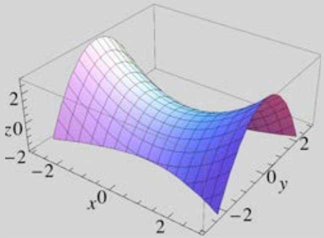
3. Αν $f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}{}^2(x_0, y_0) < 0$, *τότε ο πίνακας* $\nabla^2 f(x_0, y_0)$ *είναι αόριστος και η* f *προσεγγίζεται κοντά στο* $\vec{a}$ *με ένα* ***υπερβολικό παραβολοειδές.*** *Άρα η* f *παρουσιάζει στο* $\vec{a}$ ***σαγματικό σημείο.***



(α)



(β)



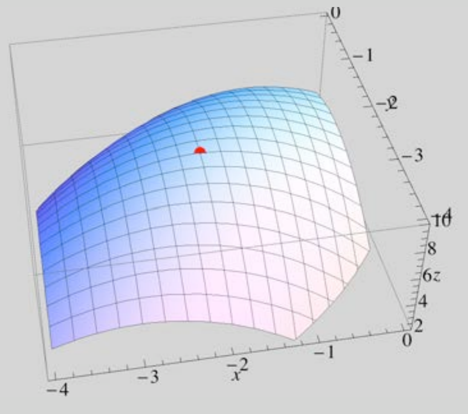
(γ)

13. Κριτήριο 2ης παραγώγου - Παραδείγματα (V)

Ας προσπαθήσουμε να βρούμε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y) = x\,y - x^2 - y^2 - 2\,x - 2\,y + 4$.

Αφού η συνάρτηση ορίζεται και είναι διαφορίσισμη για κάθε x *και* y *και το πεδίο ορισμού της δεν έχει συνοριακά σημεία, ακρότατα θα εφανίζονται μόνο σε σημεία που πληρούν το κριτήριο της* 1*ης παραγώγου:*
$\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = 0$.

Έτσι παίρνουμε δύο εξισώσεις:
$f_x(x, y) = y - 2\,x - 2 = 0$, *και* $f_y(x, y) = x - 2\,y - 2 = 0$, *από τις οποίες προκύπτει ότι* $x = y = -2$.
Συνεπώς το (-2,-2) *είναι το μοναδικό σημείο στο οποίο ενδέχεται να υπάρχει ακρότατο. Για να δούμε τί τελικά συμβαίνει υπολογίζουμε και τις παραγώγους* 2*ης τάξης:* $f_{xx}(x, y) = -2$, $f_{yy}(x, y) = -2$, $f_{xy}(x, y) = 1$.
Επομένως έχουμε $f_{xx}(-2, -2)\, f_{yy}(-2, -2) - f_{xy}{}^2(-2, -2) = 3 > 0$ *και* $f_{xx}(-2, -2) < 0$.
Αυτό σημαίνει ότι η f *παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο σημείο* (-2,-2) *με* $f(-2, -2) = 8$.



13. Κριτήριο 2ης παραγώγου - Παραδείγματα (VI)

Ας προσπαθήσουμε να βρούμε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x, y) = \text{xy}$.

Αφού η συνάρτηση ορίζεται και είναι διαφορίσιμη για κάθε x και y και το πεδίο ορισμού της δεν έχει συνοριακά σημεία, ακρότατα θα εφανίζονται μόνο σε σημεία που πληρούν το κριτήριο της 1ης παραγώγου:

$\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = 0$.

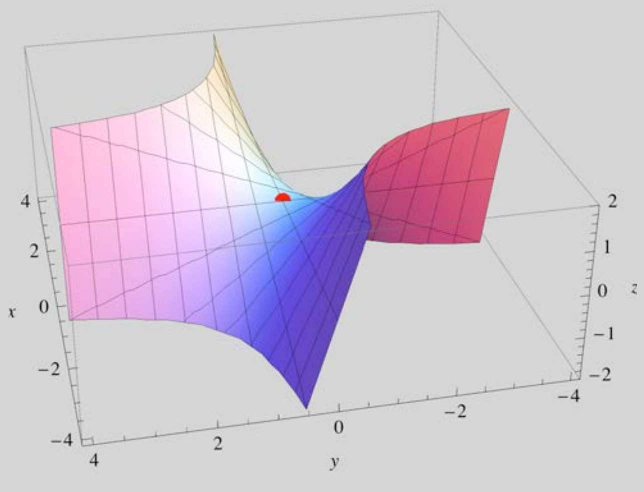
Έτσι παίρνουμε δύο εξισώσεις:

$f_x(x, y) = y = 0$, και $f_y(x, y) = x = 0$, από τις οποίες προκύπτει ότι $x = y = 0$.

Συνεπώς το (0,0) είναι το μοναδικό σημείο στο οποίο ενδέχεται να υπάρχει ακρότατο. Για να δούμε τί τελικά συμβαίνει υπολογίζουμε και τις παραγώγους 2ης τάξης: $f_{\text{xx}}(x, y) = 0$, $f_{\text{yy}}(x, y) = 0$, $f_{\text{xy}}(x, y) = 1$.

Επομένως έχουμε $f_{\text{xx}}(0, 0)\, f_{\text{yy}}(0, 0) - f_{\text{xy}}{}^2(0, 0) = -1 < 0$.

Αυτό σημαίνει ότι η f παρουσιάζει σαγματικό σημείο στο (0,0). Το σαγματικό σημείο είναι το (0,0,0).



◄ | ►

13. Κριτήριο 2ης παραγώγου - Παραδείγματα (VIIα)

Βρείτε το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο της $f(x, y) = 2 + 2x + 2y - x^2 - y^2$, *στο τριγωνικό χωρίο του πρώτου τεταρτημορίου, που περικλείεται από τις ευθείες* $x = 0$, $y = 0$, $y = 9 - x$.

Τα μόνα πιθανά σημεία τοπικών ακρότατων είναι εκείνα στο εσωτερικό του τριγώνου όπου μηδενίζονται οι μερικές παράγωγοι και τα συνοριακά σημεία.

Εσωτερικά σημεία

$f_x(x, y) = 2 - 2x = 0$, $f_y(x, y) = 2 - 2y = 0$. *Άρα ένα υποψήφιο σημείο είναι το* (1,1). Η *τιμή της* f *σε αυτό το σημείο είναι* 4. Επίσης, *έχουμε*: $f_{xx}(x, y) = -2$, $f_{yy}(x, y) = -2$, $f_{xy}(x, y) = 0$. Επομένως $f_{xx}(1, 1) = -2 < 0$ *και*

$f_{xx}(1, 1)\, f_{yy}(1, 1) - f_{xy}{}^2(1, 1) = 4 > 0$. *Άρα στο* (1,1) *έχουμε τοπικό μέγιστο.*

Συνοριακά σημεία - Ερευνούμε *μία προς μία τις πλευρές του τριγώνου.*

1. Για $y = 0$.

Η *συνάρτηση* $g_1(x) = f(x, 0) = 2 + 2x - x^2$, *μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση μιας μεταβλητής ορισμένη στο* [0,9]. Τα *ακρότατά της μπορούν να προκύψουν από τα σημεία μηδενισμού της πρώτης παραγώγου και από τα συνοριακά της σημεία*:

Για x=0 *έχουμε* $g_1(0) = f(0, 0) = 2$, *τοπικό ελάχιστο.*

Για x=9 *έχουμε* $g_1(9) = f(9, 0) = -61$, *τοπικό ελάχιστο.*

Για x=1, *έχουμε* $g_1{}'(1) = 0$, $g_1(1) = f(1, 0) = 3$, *τοπικό μέγιστο.*

13. Κριτήριο 2ης παραγώγου - Παραδείγματα (VIIβ)

2. Για x=0, *η συνάρτηση* $g_2(y) = f(0, y) = 2 + 2y - y^2$, *μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση μιας μεταβλητής ορισμένη στο* [0,9]. *Τα ακρότατά της μπορούν να προκύψουν από τα σημεία μηδενισμού της πρώτης παραγώγου και από τα συνοριακά της σημεία*:

Για y=0 *έχουμε* $g_2(0) = f(0, 0) = 2$, *τοπικό ελάχιστο.*

Για y=9 *έχουμε* $g_2(9) = f(0, 9) = -61$, *τοπικό ελάχιστο.*

Για y=1, *έχουμε* $g_2'(1) = 0$, $g_2(1) = f(0, 1) = 3$, *τοπικό μέγιστο.*

3. Για την ευθεία $y = 9 - x$, $x \in [0, 9]$, *έχουμε τη συνάρτηση* $g_3(x) = f(x, 9 - x) = -61 + 18x - 2x^2$, *μιας μεταβλητής ορισμένη στο* [0,9].

Για x=0, *έχουμε* $g_3(0) = f(0, 9) = -61$, *τοπικό ελάχιστο.*

Για x=9, *έχουμε* $g_3(9) = f(9, 0) = -61$, *τοπικό ελάχιστο.*

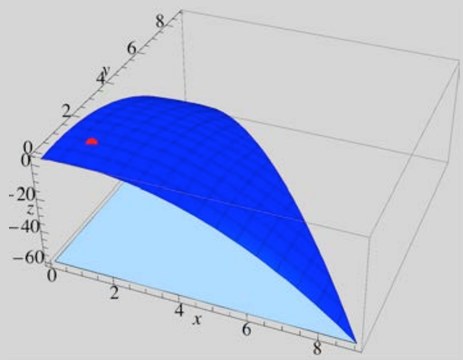
Για x=9/2, *έχουμε* $g_3'(9/2) = 0$, $g_3(9/2) = f(9/2, 9/2) = -41/2$, *τοπικό μέγιστο.*

***Συνοψίζωντας*:**

Στο (0,0) *έχουμε τοπικό ελάχιστο.*

Στο (9,0) *έχουμε τοπικό-ολικό ελάχιστο.* *Στο* (0,9) *έχουμε τοπικό-ολικό ελάχιστο.*

Στο (1,1) *έχουμε τοπικό-ολικό μέγιστο.*



◄ | ►

14. *Γενίκευση* - *Θεώρημα* Sylvester (I)

Τα θεωρήματα που αναφέραμε παραπάνω ισχύουν και για συναρτήσεις περισσοτέρων μεταβλητών. Ειδίκοτερα, *για το* ***θεώρημα της παραγώγου* 2*ης τάξης***, *δίνουμε την ακριβή διατύπωση του* Θ*εωρήματος του* Sylvester.

Έστω A ένας συμμετρικός πίνακας N *απί* N.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & \ldots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & \ldots & a_{2,N} \\ . & . & \ldots & \ldots & . \\ . & . & \ldots & \ldots & . \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \ldots & \ldots & a_{N,N} \end{pmatrix}$$

Ο*ρίζουμε ως* ***υποορίζουσα k τάξης*** *του A την ορίζουσα*

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & \ldots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & \ldots & a_{2,k} \\ . & . & \ldots & \ldots & . \\ . & . & \ldots & \ldots & . \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \ldots & \ldots & a_{k,k} \end{vmatrix}.$$

Γ*ια παράδειγμα*:

$$\Delta_1 = \left| \, a_{1,1} \, \right|, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} \end{vmatrix}, \ldots$$

14. Γενίκευση - Θεώρημα Sylvester (II)

Θεώρημα (Sylvester) Χαρακτηρισμός θετικά ορισμένων πινάκων
Έστω A ένας συμμετρικός πίνακας N επί N.

Ισχύουν τα παρακάτω:

1. Ο A είναι ***θετικά ορισμένος***, αν και μόνο αν ισχύει: $\Delta_k > 0,\ 1 \le k \le N$.

2. Ο A είναι ***αρνητικά ορισμένος***, αν και μόνο αν ισχύει: $(-1)^k \Delta_k > 0$, $1 \le k \le N$.
Δηλαδή $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, ...

3. Ο A είναι ***αόριστος*** αν και μόνο αν
είτε υπάρχει κάποιο k **άρτιο** ώστε $\Delta_k < 0$,
είτε $\Delta_k \neq 0$, $1 \le \mathrm{k} \le \mathrm{N}$ και το σύνολο $\Delta_1, \Delta_2/\Delta_1, \Delta_3/\Delta_2, \ldots, \Delta_N/\Delta_{N-1}$ περιέχει θετικά και αρνητικά στοιχεία.

◄ | ►

15. Γενίκευση - Παραδείγματα (Ι)

Βρείτε τα σημεία τοπικών ακρότατων και τα σαγματικά σημεία της συνάρτησης $f(x, y) = x^3 - 3x^2 + y^2$.

Η *συνάρτηση αυτή έχει προφανώς συνεχείς παραγώγους μέχρι και δευτέρας τάξης (και μεγαλύτερης τάξης). Έχουμε* $f_x(x, y) = 3x^2 - 6x$, $f_y(x, y) = 2y$, $f_{xx}(x, y) = 6x - 6$, $f_{xy}(x, y) = 0$, $f_{yy}(x, y) = 2$.

Από *το κριτήριο* Fermat $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = 0$, *έχουμε το σύστημα* $3x^2 - 6x = 0$, $2y = 0$, *το οποίο έχει τις λύσεις* (0,0) *και* (2,0). Μελετώντας *τις υποορίζουσες του* Εσσιανού *πίνακα έχουμε τα εξής αποτελέσματα*:

Για *το* (0,0), $\Delta_1 = -6 < 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 < 0$, *άρα το* (0,0,0) *είναι σαγματικό σημείο.*

Για *το* (2,0), $\Delta_1 = 6 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0$, *άρα το* (2,0) *είναι τοπικό ελάχιστο.*

15. Γενίκευση - Παραδείγματα (ΙΙ)

Βρείτε τα σημεία τοπικών ακρότατων και τα σαγματικά σημεία της συνάρτησης $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 - 3x$.

Η συνάρτηση αυτή έχι προφανώς συνεχείς παραγώγους μέχρι και δευτέρας τάξης (και μεγαλύτερης τάξης). Συγκεκριμένα έχουμε: $f_x(x, y, z) = 3x^2 - 3$, $f_y(x, y, z) = 2y$, $f_x(x, y, z) = 2z$, $f_{xx}(x, y, z) = 6x$, $f_{xy}(x, y, z) = 0$, $f_{xz}(x, y, z) = 0$, $f_{yz}(x, y, z) = 0$, $f_{yy}(x, y, z) = 2$, $f_{zz}(x, y, z) = 2$.

από το κριτήριο Fermat παίρνουμε το σύστημα $3x^2 - 3 = 0$, $2y = 0$, $2z = 0$, το οποίο μας δίνει τις λύσεις (1,0,0) και (-1,0,0). Έτσι λοιπόν θα έχουμε:

Για το (1,0,0) $\Delta_1 = 6 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0$,

$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 24 > 0$, άρα το (1,0,0) είναι τοπικό ελάχιστο.

για το (-1,0,0) $\Delta_1 = 6 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 < 0$,

$\Delta_3 = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -24 < 0$, άρα το (-1,0,0,2) είναι σαγματικό σημείο.