**Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών**
**Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών**
**Ανάλυση ΙΙ**
17 Σεπτεμβρίου 2020, Slot 2

**1. (2.5 μον.)** Έστω $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία $C^2$ συνάρτηση και $\varphi(r,\theta) := f(r\cos\theta, r\sin\theta)$, $r \in (0,+\infty)$, $\theta \in (0,2\pi)$. Δείξτε ότι

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}.$$

**Λύση:** Έστω $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $T(r,\theta) := (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Έστω $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία $C^1$ συνάρτηση. Τότε από τον κανόνα της αλυσίδας έχει κανείς ότι

$$J_{g\circ T}(r,\theta) = J_g(T(r,\theta))J_T(r,\theta),$$

ισοδύναμα

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial(g\circ T)}{\partial r}(r,\theta), \frac{\partial(g\circ T)}{\partial \theta}(r,\theta)\right) &= \left(\frac{\partial g}{\partial x}(T(r,\theta)), \frac{\partial g}{\partial y}(T(r,\theta))\right)\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix} \\ &= \left(\cos\theta\frac{\partial g}{\partial x}(T(r,\theta)) + \sin\theta\frac{\partial g}{\partial y}(T(r,\theta)), -r\sin\theta\frac{\partial g}{\partial x}(T(r,\theta)) + r\cos\theta\frac{\partial g}{\partial y}(T(r,\theta))\right),\end{aligned}$$

αφού

$$J_T(r,\theta) = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}(r\cos\theta) & \frac{\partial}{\partial \theta}(r\cos\theta) \\ \frac{\partial}{\partial r}(r\sin\theta) & \frac{\partial}{\partial \theta}(r\sin\theta)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix},$$

και άρα

$$\frac{\partial(g\circ T)}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\frac{\partial g}{\partial x}(T(r,\theta)) + \sin\theta\frac{\partial g}{\partial y}(T(r,\theta)) \tag{1}$$

$$\frac{\partial(g\circ T)}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta\frac{\partial g}{\partial x}(T(r,\theta)) + r\cos\theta\frac{\partial g}{\partial y}(T(r,\theta)). \tag{2}$$

Επειδή τώρα $\varphi = f\circ T$, έπεται άμεσα ότι

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial r}(r,\theta) &= \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(T(r,\theta)) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(T(r,\theta)) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(r,\theta) &= -r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}(T(r,\theta)) + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(T(r,\theta)).\end{aligned}$$

Για τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης έχει κανείς ότι

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}(r,\theta) &= \frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}(r,\theta) \\ &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(T(r,\theta)) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(T(r,\theta))\right) \\ &= \cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial x}(T(r,\theta)) + \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial f}{\partial y}(T(r,\theta)) \\ &= \cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}(T(r,\theta)) + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(T(r,\theta))\right) + \sin\theta\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(T(r,\theta)) + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}(T(r,\theta))\right) \\ &= \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(T(r,\theta)) + 2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(T(r,\theta)) + \sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(T(r,\theta)).\end{aligned}$$

Στην τέταρτη ισότητα χρησιμοποιήθηκε η (1) για $g = \partial f/\partial x$ και για $g = \partial f/\partial y$· στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι η $f$ είναι $C^2$ και άρα

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Όμοια υπολογίζει κανείς

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}(r,\theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}(r,\theta) \\
&= \frac{\partial}{\partial \theta}\left(-r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x}(T(r,\theta)) + r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y}(T(r,\theta))\right) \\
&= -r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(T(r,\theta)) - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial x}(T(r,\theta)) - r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(T(r,\theta)) + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial y}(T(r,\theta)) \\
&= -r\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(T(r,\theta)) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(T(r,\theta))\right) - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial x}(T(r,\theta)) + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\partial f}{\partial y}(T(r,\theta)) \\
&= -r\frac{\partial \varphi}{\partial r}(r,\theta) - r\sin\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}(T(r,\theta)) + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(T(r,\theta))\right) \\
&\qquad + r\cos\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(T(r,\theta)) + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}(T(r,\theta))\right) \\
&= -r\frac{\partial \varphi}{\partial r}(r,\theta) + r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(T(r,\theta)) - 2r^2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(T(r,\theta)) + r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(T(r,\theta)).
\end{aligned}$$

Έπεται τώρα ότι

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}(r,\theta) = -\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}(r,\theta) + \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(T(r,\theta)) + \left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(T(r,\theta)),$$

από όπου έπεται άμεσα η ζητούμενη σχέση.

**2. (2 μον.)** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

**Λύση:** Χρησιμοποιεί κανείς το θεώρημα Fubini και κάνει αλλαγή στην σειρά ολοκλήρωσης. Το χωρίο ολοκλήρωσης είναι το

$$0 \leqslant x \leqslant 2 \qquad \& \qquad 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2}$$

και το σύστημα αυτό ανισοτήτων είναι ισοδύναμο με το

$$0 \leqslant y \leqslant 2 \qquad \& \qquad 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{4-y^2}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{4-y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{4-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \mathrm{d}x \sqrt{4-y^2}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^2 \left(4-y^2\right)\,\mathrm{d}y \\
&= 8 - \tfrac{8}{3} = \tfrac{16}{3}.
\end{aligned}$$

**3. (2 μον.)** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ όπου

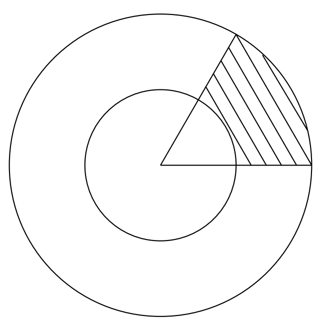
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4,\ 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{3}x\right\}.$$

**Λύση:** Πολικές συντεταγμένες. Το χωρίο ολοκλήρωσης $D$ είναι το μέρος του δακτυλίου $1 \leqslant r \leqslant 2$ που βρίσκεται στο άνω ημι-επίπεδο και κάτω (νοτιοανατολικά) από την ευθεία $y = \sqrt{3}x$· η ευθεία αυτή έχει κλίση $\sqrt{3}$, άρα η εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει με τον άξονα των $x$ είναι $\sqrt{3}$, άρα η γωνία είναι $\pi/3$. Αναλυτικά, το χωρίο ορίζεται από τις $1 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4$, που αφού $r^2 = x^2+y^2$ ισοδυναμεί με την $1 \leqslant r \leqslant 2$, και $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{3}x$, που ισοδυναμεί με τις

$$0 \leqslant r\sin\theta \leqslant \sqrt{3}r\cos\theta \quad \Leftrightarrow \quad \sin\theta \geqslant 0 \quad \& \quad \tan\theta \leqslant \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{3}.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}
\iint_D \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_1^2 \int_0^{\pi/3} \mathrm{e}^{r^2} r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \\
&= \int_1^2 \mathrm{e}^{r^2} r \int_0^{\pi/3} \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi}{3}\int_1^2 \mathrm{e}^{r^2} r\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi}{3}\left[\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{r^2}\right]_1^2 \\
&= \frac{\pi}{6}\left(\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}\right) \\
&= \frac{\pi\mathrm{e}}{6}\left(\mathrm{e}^3 - 1\right).
\end{aligned}$$



**4. (1.5 μον.)** Έστω $\gamma\colon [1,2] \to \mathbb{R}^2$ η καμπύλη που δίνεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ με

$$x(t) = \mathrm{e}^{t-1}, \qquad y(t) = \sin\frac{\pi}{t}.$$

Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_\gamma 2x\cos y\,\mathrm{d}x - x^2\sin y\mathrm{d}y.$$

**Λύση:** Έστω $f(x,y) = x^2 \cos y$. Τότε

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\cos y \qquad \text{και} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x^2 \sin y.$$

Επομένως η διαφορική μορφή $2x\cos y\,\mathrm{d}x - x^2 \sin y\,\mathrm{d}y$ είναι ακριβής. Ισοδύναμα, αν $F(x,y) = (2x\cos y, -x^2\sin y)$, τότε $F = \nabla f$, δηλαδή το διανυσματικό πεδίο $F$ είναι συντηρητικό, με δυναμικό $f$. Σε κάθε περίπτωση,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma 2x\cos y\,\mathrm{d}x - x^2\sin y\,\mathrm{d}y &= \int_\gamma F\cdot \mathrm{d}r \\
&= \int_\gamma \mathrm{d}f \\
&= f(\gamma(2)) - f(\gamma(1)) \\
&= f(\mathrm{e}, \sin(\pi/2)) - f(1, \sin\pi) \\
&= \mathrm{e}^2\cos 1 - \cos 0 \\
&= \mathrm{e}^2 \cos 1 - 1.
\end{aligned}$$

**5. (2 μον.)** Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma xy\,\mathrm{d}y - y^2\mathrm{d}x$, όπου $\gamma$ είναι το τετράγωνο που σχηματίζουν οι ευθείες $x=0$, $x=1$, $y=0$ και $y=1$, διαγραμμένο με την θετική φορά, την οποία θετική φορά να δείξετε και σε ένα σχήμα του τετραγώνου.

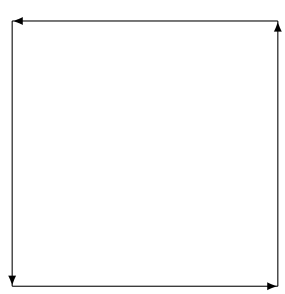
**Λύση:** Έστω $P(x,y) = -y^2$ και $Q(x,y) = xy$, για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ και θεωρούμε την διαφορική μορφή $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = -y^2\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y$. Η καμπύλη που δίνεται είναι κατά τμήματα ομαλή αφού αποτελείται από τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα, που είναι ομαλά αφού είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη καμπύλη το καθένα. Το ίδιο και οι συναρτήσεις $P$ και $Q$ είναι ομαλές (άπειρες φορές παραγωγίσιμες ως πολυώνυμα ως προς $x$ και $y$). Επιπλέον η καμπύλη $\gamma$ είναι εξ' ορισμού κλειστή και απλή. Μπορεί λοιπόν κανείς να εφαρμόσει το Θεώρημα Green και παίρνει τότε ότι

$$\int_\gamma P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

ή ισοδύναμα

$$\int_\gamma -y^2\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y = \iint_D (y+2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1\int_0^1 3y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 3y\,\mathrm{d}y \int_0^1 \mathrm{d}x = \tfrac{3}{2},$$

όπου $D$ το χωρίο που περικλείει η καμπύλη $\gamma$, δηλαδή το δοθέν τετράγωνο. Η θετική φορά στην καμπύλη είναι αυτή που διαγράφει την καμπύλη κινούμενη αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού (όταν κινείται κανείς με αυτή την φορά έχει το εσωτερικό της πάντα στα αριστερά του).



**6. (2 μον.)** Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που φράσσεται από πάνω από την σφαίρα $x^2+y^2+z^2=16$ και από κάτω από το παραβολοειδές $6z=x^2+y^2$.

**Λύση:** Έστω $B$ το εν λόγω στερεό. Για να ανήκει ένα σημείο $(x,y,z)$ στο σύνολο $B$ πρέπει $z \leqslant \sqrt{16-x^2-y^2}$ και $z \geqslant \frac{1}{6}(x^2+y^2)$. Άρα τα ζεύγη $(x,y)$ για τα οποία υπάρχει $z$ που να ικανοποιεί αυτές τις ανισότητες είναι αυτά για τα οποία $\frac{1}{6}(x^2+y^2) \leqslant \sqrt{16-x^2-y^2}$. Θέτοντας $r=\sqrt{x^2+y^2}$ βλέπει κανείς ότι η ανισότητα αυτή ισχύει αν και μόνο αν $\frac{1}{6}r^2 \leqslant \sqrt{16-r^2}$ και $0 \leqslant r \leqslant 4$ που ισχύουν αν και μόνο αν $r^4+36r^2-36\cdot 16 \leqslant 0$ και $0 \leqslant r \leqslant 4$, ισοδύναμα αν και μόνο αν $-48 \leqslant r^2 \leqslant 12$ και $0 \leqslant r \leqslant 4$ και τελικά αν και μόνο αν $0 \leqslant r \leqslant \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Επομένως ο όγκος του $B$ είναι

$$\begin{aligned}
V(B) &= \iiint_B \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \iint_{x^2+y^2\leqslant\sqrt{12}} \int_{\frac{1}{6}(x^2+y^2)}^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{x^2+y^2\leqslant\sqrt{12}} \left(\sqrt{16-x^2-y^2}-\tfrac{1}{6}(x^2+y^2)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα τώρα υπολογίζεται σε πολικές συντεταγμένες.

$$\begin{aligned}
\iint_{x^2+y^2\leqslant\sqrt{12}} \left(\sqrt{16-x^2-y^2}-\tfrac{1}{6}(x^2+y^2)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\sqrt{12}}\int_0^{2\pi} r\left(\sqrt{16-r^2}-\tfrac{1}{6}r^2\right)\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\int_0^{\sqrt{12}} r\sqrt{16-r^2}\,\mathrm{d}r - 2\pi\int_0^{\sqrt{12}} \tfrac{1}{6}r^3\,\mathrm{d}r \\
(u=r^2) \qquad &= \pi\int_0^{12}\sqrt{16-u}\,\mathrm{d}u - \frac{\pi}{3}\frac{\sqrt{12}^4}{4} \\
(v=16-u) \qquad &= \pi\int_4^{16}\sqrt{v}\,\mathrm{d}v - 12\pi \\
&= \frac{2\pi}{3}\left(16^{3/2}-4^{3/2}\right)-12\pi \\
&= \frac{76\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Άρα $V(B)=76\pi/3$.