ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΤΜΗΜΑ

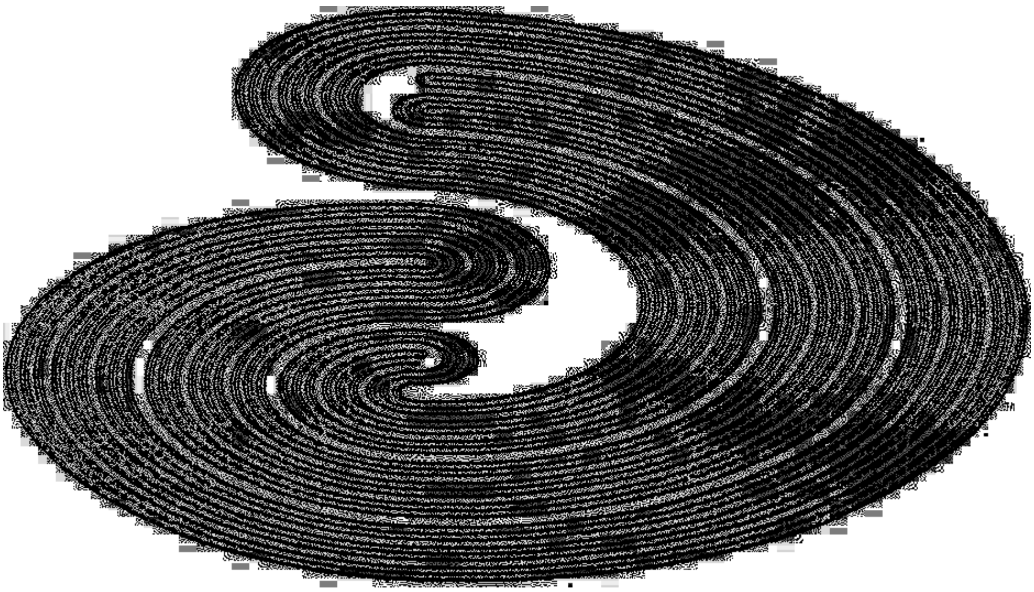
ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ-ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

(ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΠΑΡΑΔΟΣΕΩΝ)

ΠΑΝΑΓΙΩΤΗ ΣΠΥΡΟΥ

Επίκουρου Καθηγητή



ΑΘΗΝΑ 2011

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η Τοπολογία Καμπύλων είναι ένα κεφάλαιο της Γενικής Τοπολογίας με πολύ ενδιαφέρον. Η αξία του είναι οπωσδήποτε ερευνητική, αφού ένας μεγάλος αριθμός εργασιών δημοσιεύονται κάθε χρόνο, κυρίως από Αμερικανούς Πολωνούς και Ρώσσους ερευνητές. Ωστόσο, η διδακτική σημασία του κλάδου είναι, ίσως, η σημαντικότερη. Αυτό έγκειται στην δυνατότητα, που προσφέρει ώστε να πάρουν γεωμετρική υπόσταση έννοιες, που φαίνονται εντελώς αφηρημένες στην Γενική Τοπολογία και να δώσει την ευκαιρία στον μελετητή να τις εξακριβώσει μέσα σε παραδείγματα του τρισδιάστατου Ευκλειδείου χώρου. Το γεγονός αυτό έχει μια σημαντική επίδραση στην καλλιέργεια της μαθηματικής διαίσθησης και φαντασίας ενώ συγχρόνως αναδεικνύει τα όριά τους μέσα στην αυστηρή μαθηματική σκέψη. Τα παραδείγματα και τάντιπαραδείγματα που προκύπτουν φέρνουν συχνά σε αντιπαράσταση διαίσθηση και λογική και προσφέρονται στην κατανόηση της σχέσης τών δυο αυτών παραγόντων στην μαθηματική έρευνα. Η διαίσθηση ενεργεί ώς αφορμή και μας παραθέτει, σ'ενα πρώτο επίπεδο, τις παραδοχές που θα πρέπει να κάνουμε ενώ πέρα από αυτό το σημείο αρχίζει μια άλλη νοητική διεργασία που μας εκτινάσει μέσα στους διαδρόμους του απείρου και της καθαρής λογικής. Η διαίσθηση, ας μου επιτραπεί η παρομοίωση, λειτουργεί όπως οι τροχοί του αεροπλάνου και χρειάζονται μέχρι που να επιτευχθεί εκείνη η ταχύτητα που επιτρέπει να ενεργήσουν άλλες δυνάμεις, οι οποίες θα επιφέρουν τελικά την απογείωση.

Η Θεωρία των Καμπύλων απασχόλησε, ιδιαίτερα, τους μαθηματικούς την εποχή της γένννησης της Τοπολογίας, στην αρχή του 20ου αιώνα. Μία αφορμή γι αυτό στάθηκε το γνωστό παράδειγμα του Peano (1890), της καμπύλης που γεμίζει το τετράγωνο, το οποίο αποτέλεσε ένα ¨παράδειγμα¨, με την επιστημολογική σημασία του όρου. Αυτό δημιούργησε μια ανησυχία που εξανάγκασε σε μια εκ νέου έρευνα στις πρώτες έννοιες, ώστε να ξαναθεμελιωθούν πάνω σε ιδέες που να εξασφαλίζουν την συμβατότητα διαίσθησης και λογικής. Οι δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι μαθηματικοί στην αναζήτηση του νοήματος της καμπύλης αλλά και της ταξινόμησης τών καμπύλων στην συνέχεια, θυμίζουν την περιπέτεια που μας δραματοποιεί ο Ι. Λακατος στο *Proofs and Refutations* , για την εξακρίβωση του τύπου του Ευλερ. Σήμερα, στην προοπτική που ξανοίγεται εμπρός μας με την χρήση του υπολογιστή, όλα αυτά αποκτούν ένα ανανεωμένο ενδιαφέρον. Η κυριαρχία της εικόνας στην νοητική διδιεργασία στις μέρες μας αλλά κι η οπτικοποίηση τών μαθηματικών εννοιών προσφέρεται πολύ πιο εύκολα και αλλάζουν την σχέση μας ακόμη και με τα ¨καθαρά¨ μαθηματικά και βάζει εμπρός μας νέα καθήκοντα. Το σχήμα, που σε άλλες εποχές αποτελούσε ένα ταμπού για τους μαθηματικούς, καθίσταται αναγκαίο για ενδομαθηματικές αλλά κι έξωμαθηματικές εφαρμογές. Ενδεικτικά αναφέρω κλάδους όπως η ¨Οπτικοποίηση¨ ή τα γνωστά σε όλους Φρασταλς.

Τις σημειώσεις αυτές τις έγραψα στα πλαίσια του σεμιναριακού μαθήματος Ειδικά Θέματα Αλγεβρας και Γεωμετρίας. Το περιεχόμενο είναι δοκιμαστικό κι αποτελεί μια πρώτη καταγραφή όπου είναι αυτονόητα τα λάθη και οι παραλήψεις. Τα βιβλία που μου φάνηκαν χρήσιμα για να τις γράψω είναι κυρίως τα κείμενα των R. Engelking-K. Sieklucki, A. Lelek, T. Maçkowiak kai J.J. Charatonik . Ωστόσο χρήσιμα υπήρξαν και τα υπόλοιπα βιβλία ή εργασίες που παραθέτω στο τέλος. Μια τέτοια πρόταση στοχεύει στην ενημέρωση περισσότερο του φοιτητή πάνω στο θέμα κι οπωσδήποτε σε καμία περίπτωση δεν μπορεί να υποκαταστήσει ένα μάθημα τοπολογίας. Η επιλογή του τίτλου ώς ¨Τοπολογία Καμπύλων¨, δεν είναι πολύ συνηθισμένη και δεν έχω υπόψη άλλο βιβλίο από το κλασικό του K. Menger που έχει τον τίτλο *Kurventheorie* , 1932. Οι καμπύλες αποτελούν κεφάλαιο για ορισμένα εγχειρίδια, ενώ αυτό που είναι πιο συνηθισμένο είναι να υπάρχουν στοιχεία της Θεωρίας Καμπύλων σε κεφάλαια αφιερωμένα στην Συνεκτικότητα και τα Συνεχή των οποίων, οπωσδήποτε, οι καμπύλες αποτελούν μέρος. Το πρόσφατο βιβλίο του S. Nadler (*Continuum Theory* 1992) έχει τίτλο ο οποίος παραπέμπει στην έννοια του Συνεχούς που αναπόφευκτα όμως περιλαμβάνει και μέρος της θεωρίας των πολλαπλοτήτων. Ωστόσο, επειδή ο στόχος μου είναι πιο περιορισμένος ήθελα ένα τίτλο περισσότερο εντοπισμένο στις καμπυλες και συγχρόνως διακριτό. Δανείζομαι, λοιπόν, τον τίτλο που έχει προτείνει σε δυο εκτεταμένα άρθρα, ο A. Lelek (στο *Fundamanta Mathematicae* 1970).

Η κατανόηση ενός τέτοιου υλικού προυποθέτει μια καλή γνώση μετρικής τοπολογίας την οποία οι φοιτητές συνήθως έχουν από τα διάφορα μαθήματα της Ανάλυσης. Ωστόσο, θεώρησα αναγκαίο να κάνω μια σύντομη υπενθύμιση, χωρίς αποδείξεις, του υλικού αυτού, ώστε να έχω καταγραμμένες τις προτάσεις στις οποίες συχνά παρπέμπω. Παράλληλα, αξιοποιώντας το υπόδειγμα τών R. Engelking και K. Sieklucki , αναφέρω μια σειρά παραδειγμάτων κι ορισμών που οδηγούν βαθμιαία, από την γεωμετρία στην τοπολογία, ώστε η δεύτερη να κατανοηθεί ώς μια ¨ελαστική γεωμετρία¨ ή καλύτερα ως μελέτη των ¨ελαστικών παραμορφώσεων των σχημάτων¨, (έχοντας πάντα υπόψη ότι μιλάμε για την τοπολογία των Ευκλειδείων χώρων). Το κυρίως θέμα αναπτύσεται μετά το πρώτο κεφάλαιο.

Η συνεργασία με τους φοιτητές κι η συζήτηση στον πίνακα στάθηκε απαραίτητη και βοήθησε να επισημανθούν οι αδυναμίες που ανακύπτουν, τόσο μαθηματικές όσο και γλωσσικές. Μια μαθηματική συζήτηση που δεν υποστηρίζεται απαραίτητα από την ασφάλεια ενός άτεγκτου συμβολισμού έχει ανάγκη, όπως είναι φυσικό, μια σωστή χρήση της γλώσσας, όπου πίσω από την σωστή σύνταξη να ενυπάρχουν οι κατάλληλοι ποσοδείκτες ώστε να εξασφαλιστεί η μαθηματική αυστηρότητα. Μια τέτοια λειτουργία, ωστόσο, της γλώσσας εξαναγκάζει, κατά την γνώμη μου, σε μια συνειδητή ψηλάφηση τών εννοιών που υπεισέρχονται στην συζήτηση. Με αυτή την έννοια είμαι υπόχρεος προς εκείνους τους φοιτητές που συνεργάστηκαν μαζί μου στην πρώτη προσπάθεια άσκησης αυτού του προγράμματος. Επίσης ευχαριστώ τον φοιτητή Γ. Ρούσσο για την βοηθειά του στην δακτυλογράφηση ενός μέρους του κειμένου.

Ιανουάριος του 94.

Σε αυτή την δεύτερη ήλεκτρονική αναπαραγωγή των σημειώσεων έκανα μερικές διορθώσεις τυπογραφικών λαθών. Επίσης θεώρησα χρήσιμο να παραθέσω έστω και αμετάφραστα αποσπάσματα ασκήσεων από διάφορα βιβλία. Αποφασιστική υπήρξε η βοήθεια του συνεργάτη μου δόκτορα Γιώργου Κοσπεντάρη για την ένταξη των εικόνων στο κείμενο.

Οκτώβριος 2011

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

4. ΤΟΠΙΚΑ ΣΥΝΕΚΤΙΚΑ ΣΥΝΕΧΗ

5. ΚΑΜΠΥΛΕΣ

6. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗΣ

1. ΜΕΤΡΙΚΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ

§. 1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Εστω X ένα μη κενό σύνολο. Μία *μετρική* πάνω στο X είναι μία συνάρτηση d που αντιστοιχεί σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος στοιχείων του X ένα πραγματικό αριθμό και ικανοποιεί τις συνθήκες:

(Μ1) $d(x,y)=0$ αν και μόνο αν $x=y$,

(Μ2) $d(x,y)=d(y,x)$ για κάθε $x,y\in X$,

(Μ3) $d(x,z)\leq d(x,y)+d(y,z)$ για κάθε $x,y\in X$.

Το σύνολο X μαζί με την συνάρτηση d ονομάζεται *μετρικός χώρος*. Στον ίδιο χώρο X μπορούμε να ορίσουμε και άλλες μετρικές. Αν δεν υπάρχει αμφιβολία για την μετρική στην οποία αναφερόμαστε ο μετρικός χώρος (X,d) γράφεται απλά X. Τα στοιχεία του X τα ονομάζουμε *σημεία* . Εύκολα δείχνουμε το επόμενο Θεώρημα.

1.1.1 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν (X,d) είναι ένας μετρικός χώρος, τότε $d(x,y)\geq 0$ για κάθε ζεύγος σημείων $x,y\in X$.*$\square$

1.1.2 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν (X,d) είναι ένας μετρικός χώρος και $x_1,x_2,\dots,x_n\in X$, τότε*

$$d(x_1,x_n)\leq\sum_{j=1}^{n-1}d(x_j,x_{j+1}).\square$$

1.1.3 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Διακριτός μετρικός χώρος.* Αυτός αποτελείται από ένα τυχαίο μη κενό σύνολο X και μία μετρική d που ορίζεται από τον τύπο:

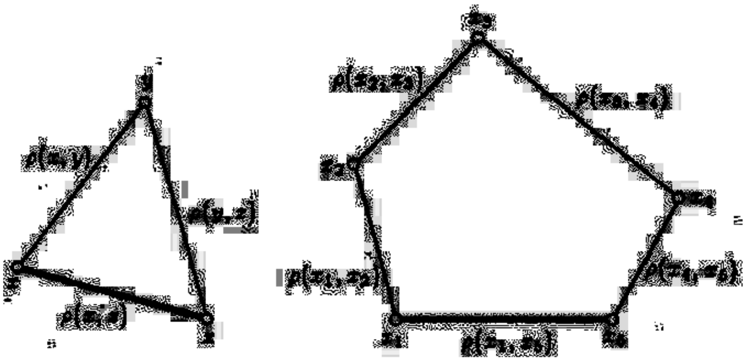
$$d(x,y)=\begin{cases}0 & \text{για } x=y\\ 1 & \text{για } x\neq y\end{cases}\quad\square$$

Τα αξιώματα (Μ1) και (Μ2) προφανώς ικανοποιούνται. Για να δείξουμε την τριγωνική ανισότητα υποθέτουμε ότι $d(x,z)>d(x,y)+d(y,z)$ για τυχαία σημεία $x, y, z \in X$. Στην περίπτωση αυτή θα είναι $d(x, z) = 1$ και $d(x, y) = d(y, z) = 0$, και άρα $x \neq z$ και $x = y = z$, που είναι άτοπο. □

1.1.4 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Η πραγματική ευθεία* $\Re$. Αυτός είναι χώρος που αποτελείται από το σύνολο $\Re$ των πραγματικών αριθμών με μετρική ορισμένη από τον τύπο $d(x, y) =| x - y |$ για $x, y \in \Re$. Τα αξίωματα (M1) και (M2) προφανώς ικανοποιούνται. Η τριγωνική ανισότητα προκύπτει από τις ιδιότητες στις απόλυτες τιμές των πραγματικών αριθμών, έτσι

$$d(x, z) =| x - z |=| (x - y) + (y - z) |\leq| x - y | + | y - z |= d(x, y) + d(y, z)$$

για οποιουσδήποτε τρείς πραγματικούς αριθμούς $x, y, z \in \Re$.□



Σχήμα 1: Η τριγωνική ανισότητα (αξίωμα (M3)) και η πολυγωνική ανισότητα (Θεώρημα 1.1.2) για $n = 5$.

1.1.5 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Ο ν-διάστατος Ευκλείδιος χώρος* $\Re^n$. Αυτός είναι ο χώρος των n-ιάδων τών πραγματικών αριθμών, όπου η απόσταση τών σημείων x και y ορίζεται από τον τύπο $d(x, y) =\| x - y \|$. Με το σύμβολο $\| t \|$ εννοούμε την νόρμα (norm) του t , δηλαδή $\sqrt{t^2}$. Τα αξιώματα (M1) και (M2) προφανώς ικανοποιούνται. Για να δείξουμε την τριγωνική ανισότητα χρησιμοποιούμε την *ανισότητα* του *Minkowski* (βλέπε [16] σελ 213 και 368 και [10]).

Για δύο τυχαία στοιχεία $a, b \in \Re^n$ με $a \neq 0$. Εχουμε

$$\| a + b \|\leq\| a \| + \| b \|$$

Αντικαθιστώντας στην ανισότητα του Minkowski $a = x - y$ και $b = y - z$ επιτυγχάνουμε $a + b = x - y$ και έτσι $\| x - y \| \leq \| x - y \| + \| y - z \|$ ή $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.$\square$

1.1.6 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Ο χώρος του Hilbert* $\Re^{\omega}$ ($ή\ l^2$). Αυτός είναι ο χώρος που αποτελείται από τις άπειρες ακολουθίες πραγματικών αριθμών $x = \{x_1, x_2, \ldots\}$ για τις οποίες η $\sum_{i=1}^{\infty}(x_i)^2$ συγκλίνει και η απόσταση μεταξύ των σημείων $x = \{x_1, x_2, \ldots\}$ και $y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ ορίζεται από τον τύπο:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}(x_i - y_i)^2}$$

Αρχικά σημειώνουμε ότι οι σειρές που εμφανίζονται μέσα στην τετραγωνική ρίζα συγκλίνουν. Αυτό προκύπτει από τις ανισότητες $0 \leq (x_i - y_i)^2 = (x_i)^2 - 2x_iy_i + (y_i)^2 \leq 2((x_i)^2 + (y_i)^2)$ για $i = 1, 2, \ldots$ και το ότι οι σειρές $\sum_{i=1}^{\infty}(x_i)^2$ και $\sum_{i=1}^{\infty}(y_i)^2$ είναι συγκλίνουσες από υπόθεση.

Εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι τα αξιώματα (M1) και (M2) ισχύουν. Για να αποδείξουμε την τριγωνική ανισότητα, υποθέτουμε ότι $x = \{x_1, x_2, \ldots\}$, $y = \{y_1, y_2, \ldots\}$, $z = \{z_1, z_2, \ldots\}$ είναι από τον χώρο $\Re^{\omega}$ και για $m = 1, 2, \ldots$ παίρνουμε

$$x_m = (x_1, x_2, \ldots, x_m),\ y_m = (y_1, y_2, \ldots y_m),\ z_m = (z_1, z_2, \ldots, z_m).$$

Τότε, από την τριγωνική ανισότητα του χώρου $\Re^m$, που έχουμε εξασφαλισμένη στο Παράδειγμα 1.1.5, έχουμε ότι $d_m(x_m, z_m) \leq d_m(x_m, y_m) + d_m(y_m, z_m)$ όπου d_m συμβολίζει την μετρική του χώρου $\Re^m$ για $m = 1, 2, \ldots$. Παίρνοντας το όριο για το m έχουμε $d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, z)$.$\square$

1.1.7 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Ο χώρος συναρτήσεων* . Υποθέτουμε ότι X είναι μη κενό σύνολο και Y είναι μετρικός χώρος με την ιδιότητα ότι $sup\{d(y', y'') : y', y'' \in Y\} < +\infty$. Θεωρούμε το σύνολο $\wp$ από όλες τις συναρτήσεις $f : X \to Y$. Μέσα στο σύνολο $\wp$ ορίζουμε την απόσταση μεταξύ δύο σημείων f και g με τον τύπο :

$$d'(f, g) = sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\}.$$

Παρατηρούμε ότι από την υποθεσή μας για τον χώρο Y έπεται ότι $d'(f, g) < \infty$ για δυο οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f, g \in \wp$.

Για να ελέγξουμε αν το $(\wp, d')$ είναι μετρικός χώρος αρκεί να δείξουμε την τριγωνική ανισότητα, αφού τα αξιώματα (Μ1) και (Μ2) προφανώς ικανοποιούνται. Υποθέτουμε ως εκ τούτου ότι $f, g, h \in \wp$. Από την τριγωνική ανισότητα του χώρου U έχουμε ότι $d(f(x), h(x)) \leq d(f(x), g(x)) + d(g(x), h(x))$ για κάθε μέλος $x \in X$. Από αυτό έπεται ότι:

$$d(f(x), h(x)) \leq sup\{d(f(x), g(x)) + d(g(x), h(x)) : x \in X\}$$

$$\leq sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\} + sup\{d(g(x), h(x)) : x \in X\}$$

$$= d'(f, g) + d'(g, h)$$

για κάθε $x \in X$.

Αρα $d'(f, h) = sup\{d(f(x), h(x)) : x \in X\} \leq d'(f, g) + d'(g, h)$.□

...

Αν (X, d) είναι ένας μετρικός χώρος και $A \subset X$, τότε παίρνοντας $d_A(x, y) = d(x, y)$ για $x, y \in A$ επιτυγχάνουμε μία συνάρτηση η οποία είναι προφανώς μία μετρική στο A. Το ζεύγος (A, d_A) ονομάζεται *μετρικός υπόχωρος* από το χώρο (X, d). Δίδεται μια πεπερασμένη ακολουθία μετρικών χώρων (X_i, d_i) για $i = 1, 2, \ldots, m$. Μπορούμε να ορίσουμε μια μετρική d επί του συνόλου $X = \prod_{i=1}^{m} X_i$ μέσω του τύπου

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} d_i^2(x_i, y_i)},$$

όπου $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m), y = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in X$.

Το σύνολο X μαζί με την μετρική d που ορίσαμε ονομάζεται *μετρικό γινόμενο* των χώρων (X_i, d_i) για $i = 1, 2, \ldots, m$ και γράφουμε $(X, d) = (X_1, d_1) \times (X_2, d_2) \times \ldots \times (X_m, d_m)$, ή $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_m$ ή απλά $X = \prod_{i=1}^{m} X_i$.

1.1.8 ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν A_i είναι μετρικός υπόχωρος ενός μετρικού χώρου X_i για $i = 1, 2, \ldots, m$, τότε $\prod_{i=1}^{m} A_i$ είναι μετρικός υπόχωρος του χώρου $\prod_{i=1}^{m} X_i$.*□

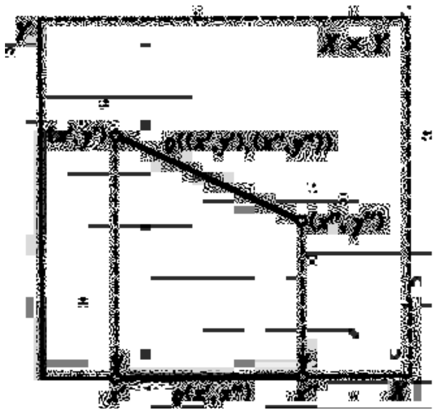
1.1.9 ΛΗΜΜΑ. *Αν $(X, d) = \prod_{i=1}^{n}(X_i, d_i), x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, τότε*

$$max\{d_i(x_i, y_i) : i = 1, 2, \ldots, n\} \leq d(x, y)\ \sqrt{n} max\{d_i^2(x_i, y_i) : i = 1, 2, \ldots, n\}.\Box$$

§.1.2. ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΣΕ ΜΕΤΡΙΚΟΥΣ ΧΩΡΟΥΣ

Υποθέτουμε ότι X και Y είναι δυο μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$. Θα συμβολίσουμε τις δύο μετρικές των χώρων X και Y με το ίδιο σύμβολο d και θα την καταλαβαίνουμε την κάθε φορά με διαφορετικό νόημα αφού για τον κάθε χώρο συσχετίζει σημεία του χώρου αυτού και μόνο.

Θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι *μη-επεκτατική* όταν $d(f(x), f(x')) \leq d(x, x')$ για κάθε ζεύγος σημείων $x, x' \in X$.



Σχήμα 2: Η προβολή του μετρικού γινομένου $X \times Y$ επί του παράγοντα X είναι μη-επεκτάσιμη (Παράδειγμα 1.2.2)

1.2.1 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Εγκλεισμός μετρικού υπόχωρου.* Εστω ότι A είναι ένας μετρικός υπόχωρος του μετρικού χώρου X. Η συνάρτηση $i_A : A \to X$ ορίζεται από τον τύπο $i_A(a) = a$ για $a \in A$ και ονομάζεται *συνάρτηση εγκλεισμού* του υπόχωρου A μέσα στον χώρο X . Προφανώς πρόκειται για συνάρτηση μη-επεκτατική.

1.2.2 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Η προβολή ενός γινομένου μετρικών χώρων σ'ενα παράγοντα του*, αποτελεί παράδειγμα μή-επεκτατικής συνάρτησης, βλέπε το Σχήμα 2.

1.2.3 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Η νόρμα (norm)* .Η συνάρτηση $\nu : \Re^m \to \Re$ ορίζεται ώς $\nu(x) = \| x \|$ είναι μη-επεκτατική. Διότι, αν $x, x' \in \Re^m$, τότε $\| x \| = \| x' + (x - x') \| \leq \| x' \| + \| x - x' \|$ και $\| x' \| = \| x + (x' - x) \| \leq \| x \| + \| x' - x \|$, άρα $| \| x \| - \| x' \| | \leq \| x - x' \|$.□

Είναι προφανές ότι η ταυτοτική συνάρτηση είναι μη-επεκτατική και ότι η σύνθεση δυο μή-επεκτατικών συναρτήσεων είναι μή-επεκτατική συνάρτηση.

Αν υπάρχει μία σταθερά $c \geq 0$ με την ιδιότητα $d(f(x), f(x')) \leq c d(x, x')$ για κάθε ζεύγος σημείων $x, x' \in X$, τότε η f ονομάζεται *συνάρτηση του Lipschitz με σταθερά* c . Προφανώς αν μία συνάρτηση είναι μή-επεκτατική τότε είναι συνάρτηση του Lipschitz με σταθερά 1. Βλέπουμε ότι οι συναρτήσεις του Lipschitz αποτελούν μία ευρύτερη κλάση από τις μή-επεκτατικές συναρτήσεις. Οι σύνθεση δυο συναρτήσεων του Lipschitz με σταθερές c, c' είναι πάλι μια συνάρτηση του Lipschitz με σταθερά cc'.

1.2.4 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Κάθε πραγματική διαφορίσιμη συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ η οποία έχει παράγωγο φραγμένη από μία σταθερά c είναι μία συνάρτηση Lipschitz με σταθερά c.*Από το Θεώρημα της Μέσης Τιμής συμπεραίνουμε ότι για δυο σημεία $x, x' \in \Re$ υπάρχει σημείο ξ τέτοιο ώστε:

$$| f(x) - f(x') | = | f'(\xi) | | x - x' | \leq c | x - x' | .\square$$

1.2.5. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Η μετρική* . Η μετρική d του μετρικού χώρου (X, d) μπορεί να θεώρηθεί ώς συνάρτηση $d : X \times X \to \Re$. Αυτή είναι μια συνάρτηση του Lipschitz με σταθερά $\sqrt{2}$. Πραγματικά, αν $x, x', y, y' \in X$ τότε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.1.2 έχουμε $d(x, x') \leq d(x, y) + d(y, y') + d(y', x')$ και $d(y, y') \leq d(y, x) + d(x, x') + d(x', y')$. Αρα

$$| d(x, x') - d(y, y') | \leq d(x, y) + d(x', y') \leq \sqrt{2} \sqrt{d^2(x, y) + d^2(x', y')}.\square$$

1.2.6 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Η πρόσθεση σημείων* . Η πράξη της πρόσθεσης σημείων στον Ευκλείδιο χώρο $\Re^n$, μπορεί να παρουσιασθεί ως μια απεικόνιση, $\Re^n \times \Re^n \to \Re^n$. Αυτή γίνεται μια συνάρτηση του Lipschitz με σταθερά

$\sqrt{2}$. Αν $x, x', y, y' \in \Re^n$, τότε

$$d(x+y, x'+y') = \| (x+y) - (x'+y') \| = \| (x-x') + (y-y') \|$$

$$\leq \| x - x' \| + \| y - y' \| \leq \sqrt{2} \sqrt{\| x - x' \|^2 + \| y - y' \|^2}.\square$$

1.2.7. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ.*Κάθε γραμμική συνάρτηση είναι συνάρτηση του Lipschitz.*

..

Τώρα θα δούμε μια κλάση συναρτήσεων μετρικών χώρων πιο γενικών από τις συναρτήσεις του Lipschitz.Θα λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι *ομοιομορφικά συνεχής* αν για κάθε θετικό αριθμό ϵ υπάρχει ένας θετικός αριθμός δ τέτοιος ώστε αν $x, x' \in X$ και $d(x, x') < \delta$, τότε $d(f(x), f(x')) < \epsilon$. Κάθε συνάρτηση του Lipschitz είναι ομοιομορφικά συνεχής, διότι αν η σταθερά της συνάρτησης είναι η $c \neq 0$, όπου αν δοθεί το $\epsilon > 0$, είναι αρκετό να πάρουμε $\delta = \epsilon/c$.

1.2.8 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Κάθε συνάρτηση f ορισμένη σ'ενα διακριτό μετρικό χώρο Ξ είναι ομοιομορφικά συνεχής.* Προφανώς, αν $\epsilon > 0$ αρκεί να πάρουμε $\delta = 1$. Αν $d(x, x') < \delta$ με $x, x' \in X$, τότε $x = x'$ και άρα $f(x) = f(x')$ και άρα $d(f(x), f(x')) = 0 < \epsilon$. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι υπάρχει μια ομοιομορφικά συνεχής συνάρτηση που δεν είναι συνάρτηση του Lipschitz για κάποια σταθερά c.

1.2.9 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Η σύνθεση δυο ομοιομορφικά συνεχών συναρτήσεων είναι ομοιομορφικά συνεχής συνάρτηση.* $\square$

...

Τώρα θα επεκτείνουμε την κλάση των ομοιορφικά συνεχών συναρτήσεων ως εξής: Θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι *συνεχής σ'ενα σημείο* $x \in X$ αν για κάθε θετικό αριθμό ϵ υπάρχει ένας θετικός αριθμός δ τέτοιος ώστε, αν $x' \in X$ και $d(x, x') < \delta$ τότε $d(f(x), f(x')) < \epsilon$. Μία συνάρτηση $f : X \to Y$ που είναι συνεχής σε κάθε σημείο του χώρου Q ονομάζεται *συνεχής* συνάρτηση. Προφανώς κάθε ομοιομορφικά συνεχής συνάρτηση είναι συνεχής.

1.2.10 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Το βαθμωτό γινόμενο με πραγματικούς* . Η πράξη του βαθμωτού γινομένου στον Ευκλείδιο χώρο $\Re^n$ με παραγματικούς αριθμούς μπορεί να παρουσιασθεί ώς συνάρτηση $\Re \times \Re^n \to \Re^n$. Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής ενώ δεν είναι ομοιομορφικά συνεχής. Παρατηρούμε ότι αν $r, r' \in \Re$ και $x, x' \in \Re^n$, τότε:

$$d(rx, r'x') = \| rx - r'x' \| = \| r(x - x') + (r - r')x - (r - r')(x - x') \|$$

$$\leq | r | \| x - x' \| + | r - r' | \| x \| + | r - r' | \| x - x' \| .$$

Αν λοιπόν έχω $\epsilon > 0$, τότε εκλέγοντας ένα δ τέτοιο ώστε $\delta(| r | + \| x \|) < \epsilon/2$ και $\delta^2 < \epsilon/2$ συμπεραίνουμε ότι αν $\sqrt{(r - r')^2 + \| x - x' \|^2} < \delta$,τότε $| r - r' | < \delta$ και $\| x - x' \| < \delta$, και άρα $d(rx, r'x') \leq \delta(| r | + \| x \|) + \delta^2 < \epsilon$. Αρα το βαθμωτό γινόμενο ώς συνάρτηση είναι συνεχής.

Ομως για κάθε θετικό αριθμό δ και ένα σταθερό σημείο $p \in \Re^n$ με $p \neq 0$ μπορούμε να πάρουμε ώς $r = 1/\delta$, $r' = 1/\delta + \delta/2$, $x = rp$, $x' = r'p$, τότε $d(rx, r'x') = \| rx - r'x' \| = (r'^2 - r^2) \| p \| = (1 + \delta^2/4) \| p \| > \| p \|$. Αρα το βαθμωτό γινόμενο ως συνάρτηση δεν είναι ομοιομορφικά συνεχής .□

1.2.11 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν μια συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι συνεχής σ'ενα σημείο $x_0 \in X$ και η συνάρτηση $g : Y \to Z$ είναι ένα σημείο $y_0 = f(x_0)$, τότε η σύνθεση $gf : X \to Z$ είναι συνεχής στο σημείο x_0.*□

...

Στη συζήτηση που προηγήθηκε αναφερθήκαμε σε συναρτήσεις όλο και περισσότερο γενικές: μή επεκτατικές, Lipschitz,ομοιομορφικά συνεχείς και συνεχείς. Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ η οποία είναι μη-επεκτατική κι έχει αντίστροφο $f^{-1} : Y \to X$ που δεν είναι μη-επεκτατική ονομάζεται *ισομετρική* συνάρτηση ή απλά *ισομετρία.* Μία ισομετρία $f : X \to Y$ είναι συνάρτηση ενός χώρου X επί ενός χώρου Y που χαρακτηρίζεται από την συνθήκη

$$d(f(x), f(x')) = d(x, x')$$

για κάθε δυο σημεία $x, x' \in X$. Οι ισομετρίες ενός συγκεκριμένου χώρου σχηματίζουν ομάδα μετασχηματισμών.

1.2.12 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ. *Οι μεταφορές κι οι στροφές στους χώρους* $\Re^n$ (βλέπε [Ξ]).

Η αντιποδική συνάρτηση. Η συνάρτηση $a : \Re^n \to \Re^n$ που αντιστοιχεί σε κάθε σημείο $x \in \Re^n$ στο αντίθετό του $a(x) = -x$ ονομάζεται *αντιποδική* συνάρτηση ή *αντιποδισμός* . Είναι προφανής η ισομετρία αφού $d(a(x), a) = \| -x + x' \| = \| x - x' \| = d(x, x')$ για $x, x' \in \Re^n$.□ ...

Δυο μετρικοί χώροι X και Y για τους οποίους υπάρχει μια ισομετρική απεικόνιση του X επί του Y λέγεται ότι είναι *ισομετρικοί* μεταξύ τους. Η κλάση των μετρικών χώρων οι οποίοι είναι ισομετρικοί προς τον χώρο X ονομάζεται η *μετρικού τύπου* του χώρου X. Η θεωρία των ισομετρικών αναλλοιώτων, που είναι η θεωρία που αφορά σε εκείνες τις ιδιότητες των μετρικών χώρων που αν ισχύουν για κάποιο χώρο ισχύουν για κάθε ισομετρικό του, ονομάζεται *μετρική γεωμετρία* ή απλά *γεωμετρία* (βλέπε [**X**]).

1.2.13 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Κάθε m-διάστατος γραμμικός υπόχωρος του $\Re^n$ είναι ισομετρικός με τον χώρο $\Re^m$.*

1.2.14 ΠΡΟΤΑΣΗ. *Εστω τυχαία οικογένεια μετρικών χώρων για κάθε ζεύγος της οποίας υπάρχει ως μέλος της οικογένειας ο χώρος του μετρικού γινομένου τους. Τότε και το μετρικό γινόμενο πεπερασμένου πλήθους μελών της οικογένειας ανήκει στην οικογένεια.* □

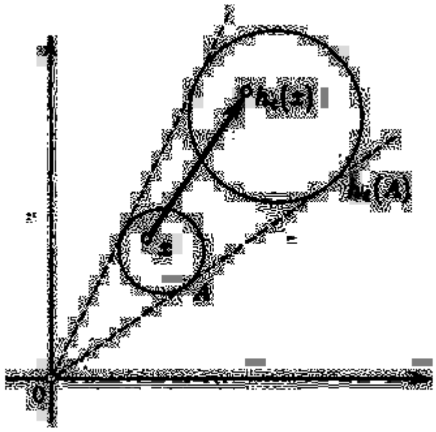
Μία συνάρτηση του Lipschitz $f : X \to Y$ που έχει σταθερά c η οποία είναι ένα προς ένα κι έχει ώς αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : Y \to X$ μια συνάρτηση του Lipschitz με σταθερά $1/c$, ονομάζεται *συνάρτηση ομοιότητας με συντελεστή c* . Μια ομοιότητα $f : X \to Y$ με συντελεστή c είναι συνάρτηση του χώρου X επί του χώρου Y που χαρακτηρίζεται από την συνθήκη

$$d(f(x), f(x')) = cd(x, x')$$

για κάθε ζεύγος σημείων $x, x' \in X$. Οι ομοιότητες δεδομένου μετρικού χώρου επί του εαυτού του αποτελούν ομάδα μετασχηματισμών.

1.2.15 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Ομοιοθεσία.* Η συνάρτηση $h_c : \Re^n \to \Re^n$ που $h_n(x) = cx$ για $x \in \Re^n$ είναι γνωστή ως *ομοιοθεσία με συντελεστή c*.

1.2.16 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Η συνάρτηση της διαγωνίου.* Εστω ότι X είναι ένας μετρικός χώρος. Θεωρούμε την δύναμη $\prod^n X = X \times X \times \ldots \times X$ όπου n είναι φυσικός αριθμός. Η συνάρτηση $k : X \to \prod^n X$ ορισμένη από τον τύπο $k(x) = (x, x, \ldots, x) \in \prod^n X$ για $x \in X$ ονομάζεται *συνάρτηση διαγωνίου.*



Σχήμα 3: Ομοιοθεσία με συντελεστή $c > 1$.

Είναι μια ομοιότητα με συντελεστή $\sqrt{n}$ του συνόλου X επί του συνόλου $\Delta = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \prod^n X : x_1 = x_2 = \ldots = x_n\}$ γνωστή ώς η *διαγώνιος* της δύναμης $\prod^n X$. Εχουμε

$$d((x, x, \ldots), (x', x', \ldots, x')) = \sqrt{nd^2(x, x')} = \sqrt{n}d(x, x')$$

για κάθε $x, x' \in X$.

...

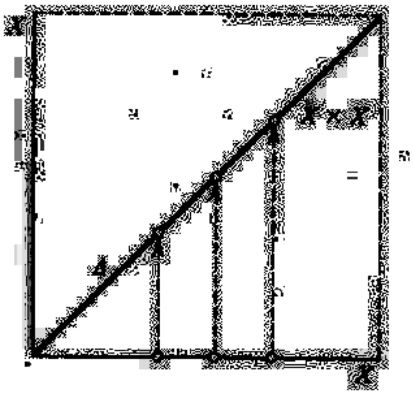
Δυο μετρικοί χώροι X και Y για τους οποίους υπάρχει μια συνάρτηση ομοιότητας από τον X στον Y ονομάζονται *όμοιοι*.

1.2.17 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Όλα τα μη τετριμμένα κλειστά διαστήματα της πραγματικής ευθείας είναι όμοια.*

Η θεωρία των αναλλοιώτων ομοιότητας, που ασχολείται με τις ιδιότητες των μετρικών χώρων οι οποίες αν ισχύουν για κάποιο χώρο ισχύουν και για κάθε χώρο όμοιο προς αυτόν ονομάζεται *γεωμετρία ομοιότητας*.

...

Μια ομοιομορφικά συνεχής συνάρτηση (αντίστοιχα, συνεχής συνάρτηση) $f : X \to Y$ η οποία είναι ένα προς ένα κι έχει αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : Y \to X$ μια συνάρτηση η οποία είναι επίσης ομοιομορφικά συνεχής (αντίστοιχα, συνεχής) ονομάζεται *ομοιομορφικός ομοιομορφισμός* είτε καλύτερα *ομαλός ομοιομορφισμός* (αντίστοιχα, *ομοιομορφισμός*). Οι ομαλοί ομοιομορφισμοί (αντίστοιχα, οι ομοιομορφισμοί) συγκεκριμένου χώρου επί



Σχήμα 4: Η διαγώνιος συνάρτηση $d : X \to \Delta \subset X \times X$ είναι ομοιότητα (Παράδειγμα 1.2.16).

του εαυτού του αποτελούν ομάδα μετασχηματισμών. Δυο μετρικοί χώροι X και Y για τους οποίους υπάρχει ένας ομαλός ομοιομορφισμός (αντίστοιχα, ένας ομοιομορφισμός) ο οποίος να απεικονίζει τον X επί του Y ονομάζονται *ομοιομορφικά* είτε *ομαλά ομοιομορφικοί* (αντίστοιχα, *ομοιομορφικοί*).

1.2.18 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ας συμβολίσουμε με X την πραγματική ευθεία με την διακριτή τοπολογία και με Y το ίδιο σύνολο με την συνηθισμένη μετρική της πραγματικής ευθείας. Η συνάρτηση $id : X \to Y$ είναι συνεχής (ακόμη και ομαλά συνεχής, βλ. Παράδειγμα 2.8) και ένα προς ένα, αλλά δεν είναι ομοιομορφισμός, αφού η αντίστροφη συνάρτηση δεν είναι συνεχής. Ετσι μπορεί να δειχθεί ότι οι δυο χώροι X και Y δεν είναι ομοιομορφικοί .□

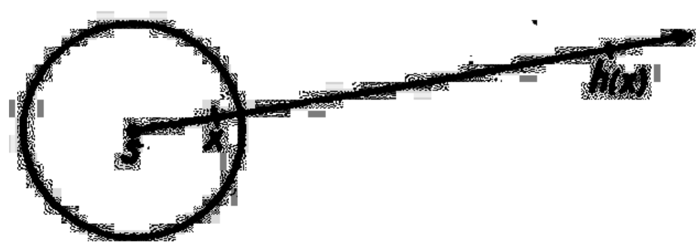
1.2.19 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Ενα μη-κενό ανοικτό διάστημα και η ευθεία των πραγματικών αριθμών είναι ομοιομορφικοί χώροι* Από την ιδιότητα που υποδεικνύει το Παραδείγμα 1.2.17 μπορούμε να θεωρήσουμε το διάστημα $(-\pi, \pi)$. Τότε η συνάρτηση $f : (-\pi, \pi) \to \Re$ ορίζεται από τον τύπο $f(x) =$εφx όπου $x \in (-\pi, \pi)$ είναι συνεχής και ένα προς ένα ενώ η αντιστροφή συνάρτηση $f^{-1}(x) =$τοξ$_o$εφx είναι επίσης συνεχής. Ο ομοιομορφισμός f δεν είναι, βέβαια, ομαλός αφού η συνάρτηση f δεν είναι ομαλά συνεχής. Επιπλέον μπορούμε νάποδείξουμε ότι το διάστημα $(-\pi, \pi)$ (ή οποιοδήποτε άλλο ανοικτό διάστημα) και η πραγματική ευθεία $\Re$ δεν είναι ομοιομορφικά συνεχείς χώροι.

Ομοιομορφισμός μπορεί να κατασκευαστεί μεταξύ του $\Re^n$ και οποιασδήποτε ανοικτής σφαίρας $B(s, \varepsilon)$, με κέντρο s και ακτίνα ε. Θέτουμε $h(s) = s$ και αν x σημείο της σφαίρας διάφορο του s θεωρούμε ακτίνα της σφαίρας που περνάει από το x. Την τιμή του $h(x)$ την ορίζουμε πάνω στην ίδια ακτίνα με απόσταση

$$d(s, h(x)) = \varepsilon\varphi(\frac{\pi}{2\varepsilon}d(s, x))$$

δηλαδή ορίζουμε τον ομοιομορφισμό.

$$h : B(s, \varepsilon) \to \Re^n$$

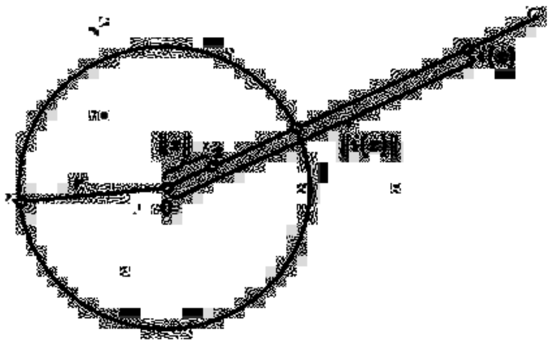


Σχήμα 5: Ομοιομορφική απεικόνιση του ανοικτού δίσκου στον $\Re^2$.

1.2.20 ΠΡΟΤΑΣΗ.*Κάθε γραμμικός ισομορφισμός είναι ομαλός ομοιομορφισμός.*□

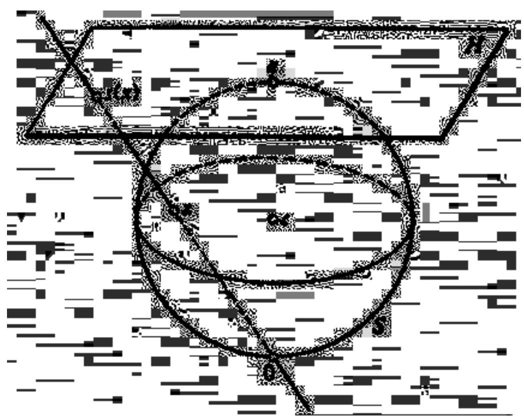
1.2.21 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Αντιστροφή.* Παρατηρούμε ότι αν r είναι ένας δεδομένος θετικός αριθμός, τότε για κάθε σημείο $x \in \Re^n \backslash \{0\}$ αντιστοιχεί ένα ακριβώς σημείο $i(x)$ που βρίσκεται επί της ημιευθείας η οποία έχει το τελικό της σημείο στην αρχή των αξόνων και διέρχεται από το σημείο x, έτσι ώστε $\| i(x) \| \| x \| = r^2$. Πραγματικά, αν $i(x) = (1 - t)0 + tx = tx$, όπου $t \in \Re_+$, , τότε αφού $r^2 = \| i(x) \| \| x \| = \| tx \| \| x \| = t \| x \|^2$, έχουμε $t = r^2 / \| x \|^2$, όπου $i(x) = (r^2 / \| x \|^2)x$ για $x \in \Re^n \backslash \{0\}$.

Η συνάρτηση $i : \Re^n \backslash \{0\} \to \Re^n \backslash \{0\}$ είναι γνωστή ως *αντιστροφή* στη σφαίρα με κέντρο στο 0 κι ακτίνα r. Αυτή στέλνει την σφαιρική επιφάνεια πάνω στον εαυτό της, ενώ την ανοικτή σφαίρα με κέντρο στο σημείο 0 και με ακτίνα r τη μεταφέρει στο συμπλήρωμα της κλειστής σφαίρας με το ίδιο κέντρο και την ίδια ακτίνα.



Σχήμα 6: Η αντιστροφή i μέσα στον κύκλο με κέντρο 0 και ακτίνα r στο επίπεδο $\Re^2$, που ορίζεται από τον τύπο $\| i(x) \| \| x \| = r^2$ για $x \in \Re^2 \setminus \{0\}$.

Η αντιστροφή είναι φυσικά μια ένα προς ένα συνάρτηση του συνόλου $\Re^n \setminus \{0\}$ επί του εαυτού του και όπως προκύπτει από τα Παραδείγματα 1.2.3 και 1.2.10 και είναι συνεχής. Αφού ικανοποιείται η συνθήκη $ii = id$ είναι επίσης ομοιομορφισμός του συνόλου $\Re^n \setminus \{0\}$ επί του εαυτού του. □



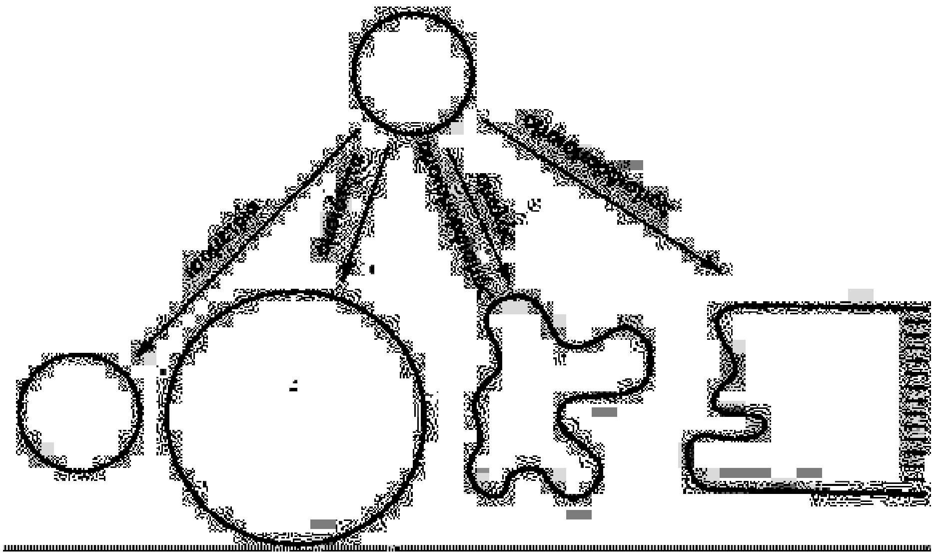
Σχήμα 7: Η στερεογραφική προβολή του χώρου S από τον πόλο 0 επί του υπερεπιπέδου H .

1.2.22 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Η Στερεογραφική προβολή* (βλέπε το Σχήμα 7). Η n-διάστατη σφαιρική επιφάνεια από την οποία έχουμε αφαιρέσει ένα σημείο και ο n-διάστατος Ευκλείδειος χώρος $\Re^n$ είναι ομοιομορφικοί χώροι.

...

Η Θεωρία των ομαλών ομοιομορφικών (αντίστοιχα, ομοιομορφικών) αναλλοιώτων, που είναι εκείνες οι ιδιότητες τών μετρικών χώρων οι οποίες αν ισχύουν σ'ενα χώρο ισχύουν και σε κάθε άλλον ομαλά ομοιομορφικό (αντίστοιχα, ομοιομορφικό) προς αυτόν, ονομάζεται *ομαλή (ομοιομορφική) τοπολογία* (αντίστοιχα, *τοπολογία*) των μετρικών χώρων. Η τάξη τών μετρικών χώρων που είναι ομοιομορφική προς ένα χώρο X ονομάζεται *τοπολογικού τύπου* του χώρου X.

Οπως είδαμε παραπάνω, οι διαφορετικές ομάδες όλο και πιο γενικών συναρτήσεων μεταξύ μετρικών χώρων αντιστοιχούν σε όλο και πιο γενικές ομάδες αναλλοιώτων. Κάθε κλάση ιδιοτήτων που είναι αναλλοίωτες μιας ευρύτερης κλάσης συναρτήσεων είναι με μια κάποια έννοια περισσότερο θεμελιώδης. Με αυτή την έννοια οι ιδιότητες που μελετώνται στην τοπολογία (*οι τοπολογικές ιδιότητες*) είναι περισσότερο γενικές από εκείνες που μελετά η μετρική γεωμετρία (*μετρικές ιδιότητες*).

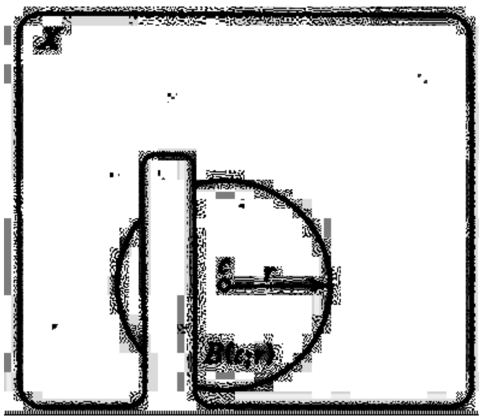


Σχήμα 8: Τί μπορούμε να πετύχουμε από τον ανοικτό δίσκο μέσω των διαφορετικών συναρτήσεων.

§.1.3. ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Σε αυτή την παράγραφο θα αναφερθούμε σε μερικές στοιχειώδεις έννοιες που ο ορισμός τους απαιτεί την έννοια της απόστασης. Πρόκειται δηλαδή, για τις μετρικές έννοιες. Επιπλέον, δίνουμε προσοχή σε έννοιες που είναι είτε αυστηρά μετρικές ή το πολύ είναι αναλλοίωτες κάτω από τις ομοιότητες.

Εστω ότι μας δίνεται ένας μετρικός χώρος (X, d). Αν $c \in X$ και r ένας πραγματικός αριθμός τότε ως *ανοιχτή σφαίρα κέντρου c και ακτίνας r* εννοούμε το σύνολο $B(c, r) = \{x \in X : d(x, c) < r\}$. Οπωσδήποτε $c \in B(c, r)$, αλλά είναι δυνατόν η ανοικτή σφαίρα να μην περιέχει άλλο σημείο εκτός του κέντρου. Π.χ στην περίπτωση του διακριτού μετρικού χώρου αν έχουμε σφαίρα με ακτίνα μικρότερη του 1. Οπωσδήποτε, σε αυτή την περίπτωση μια σφαίρα με ακτίνα μεγαλύτερη ή ίση του 1 θα περιείχε όλα τα σημεία του χώρου.



Σχήμα 9: Η ανοικτή σφαίρα $B(c, r)$ στο μετρικό χώρο X .

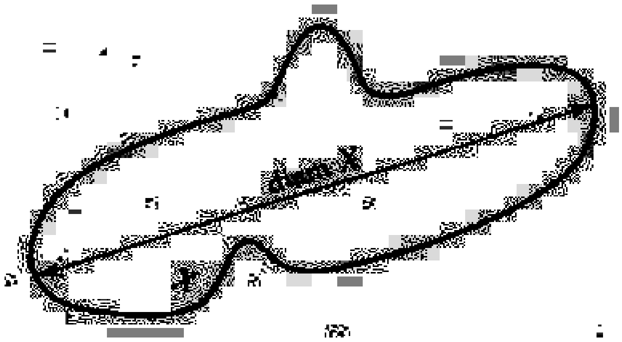
Το σύνολο $\overline{B}(c, r) = \{x \in X : d(c, x) \leq r\}$ ονομάζεται *κλειστή σφαίρα κέντρου c και ακτίνας r*.

Ο πραγματικός αριθμός (ή δυνατόν το σύμβολο ∞) που ορίζεται από

$$diamX = sup\{d(x, x') : x, x' \in X\}$$

ονομάζεται *διάμετρος* του μη-κενού μετρικού χώρου X. Συμβατικά θέτουμε $diam\emptyset = 0$.

Ενας χώρος X του οποίου η διάμετρος $diamX$ διαφέρει από το ∞ ονομάζεται *φραγμένος* χώρος. Για παράδειγμα, ένας διακριτός μετρικός χώρος



Σχήμα 10: Η διάμετρος $diamX$ του μετρικού χώρου X .

είναι φραγμένος κι έχει διάμετρο 1. Η ευθεία των πραγματικών αριθμών δεν είναι φραγμένος χώρος. Το μοναδιαίο διάστημα έχει διάμετρο 1.

Συχνά έχουμε να κάνουμε με υποσύνολα ενός δεδομένου χώρου. Αν έχουμε $A \subset X$, ορίζουμε ανάλογα με τον παραπάνω ορισμό την ένοια της διαμέτρου του A και συμβολίζουμε με $diamA$. Παραθέτουμε μερικές ιδιότητες που συνδέονται με τις παραπάνω έννοιες.

1.3.1 . ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν $B \subset A$, τότε $diamB \leq diamA$.*$\Box$

1.3.2 . ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ενα υποσύνολο ενός φραγμένου χώρου είναι φραγμένο.* $\Box$

1.3.3 .ΘΕΩΡΗΜΑ. $diam \prod_{i=1}^{n} A_i \leq \sqrt{n} max\{diamA_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$. Βλέπε το Λήμμα 1.1.9. $\Box$

1.3.4 . ΠΟΡΙΣΜΑ. *Το μετρικό γινόμενο πεπερασμένου πλήθους φραγμένων χώρων είναι φραγμένο* .$\Box$

1.3.5 . ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Κάθε n-διαστατος κύβος είναι φραγμένο σύνολο.* $\Box$

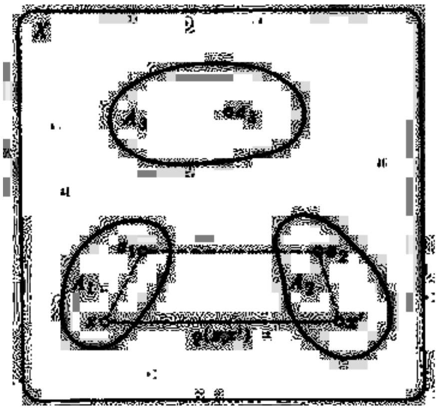
1.3.6 . ΘΕΩΡΗΜΑ. *Κάθε κλειστή σφαίρα είναι φραγμένο σύνολο και επίπλέον $diam\overline{B}(c, r) \leq 2r$.*$\Box$

1.3.7 . ΛΗΜΜΑ. *Για να είναι ένα σύνολο $A \subset X$ φραγμένο είναι αναγκαίο κι ικανό να περιέχεται σε μια ανοιχτή (ή κλειστή) σφαίρα του χώρου X.* $\Box$

1.3.8 . ΛΗΜΜΑ. *Αν το σύνολο $A_j \subset X$ είναι φραγμένο για $j = 1, 2, \ldots, n$, τότε το σύνολο $\bigcup_{j=1}^{n} A_j$ είναι φραγμένο.* $\Box$

...

Οι έννοιες της ανοικτής και της κλειστής σφαίρας και της διαμέτρου του



Σχήμα 11: Τα σύνολα A_1, A_2, A_3 είναι φραγμένα, κατά συνέπεια και η ένωσή τους. Βλ. 1.3.8.

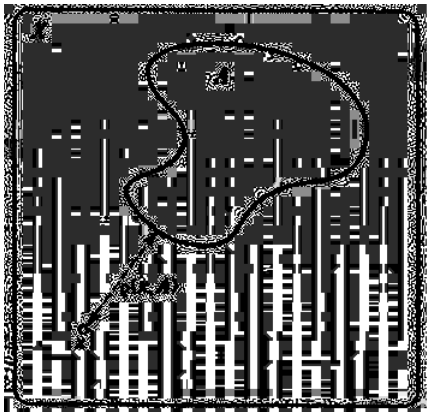
μετρικού χώρου έχουν αυστηρά μετρικό χαρακτήρα. Η έννοια του φραγμένου χώρου ανήκει στην γεωμετρία ομοιότητας, αλλά όχι στην ομοιομορφική τοπολογία. Αν τώρα με X συμβολίσουμε το σύνολο τών φυσικών αριθμών με την διακριτή τοπολογία και με Y το ίδιο σύνολο με την μετρική που έχει ως υπόχωρος των πραγματικών αριθμών, τότε η ταυτοτική απεικόνιση του X επί του Y είναι ένας ομαλός ομοιομορφισμός, αλλά ενώ το X είναι φραγμένο το Y δεν είναι.

Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ του συνόλου X εντός ενός μετρικού χώρου λέγεται ότι είναι *φραγμένη*, αν η εικόνα $f(X)$ είναι ένα σύνολο φραγμένο στο Y . Στην ειδική περίπτωση που Y είναι η πραγματική ευθεία $\Re$ τότε από την 1.3.7 προκύπτει ότι υπάρχει αριθμός M τέτοιος ώστε $| f(x) |< M$ για όλα τα $x \in X$. Τότε, προφανώς $\inf f, \sup f \in [-M, M]$.

Μια άλλη έννοια η οποία μπορεί να οριστεί στους μετρικούς χώρους είναι η απόσταση σημείου από σύνολο. Υποθέτουμε ότι $\emptyset \neq A \subset X$ και $x \in X$. Η *απόσταση του σημείου x από το σύνολο A* είναι ο αριθμός:

$$d(x, A) = inf\{d(x, a) : a \in A\}$$

Συνηθίζεται να γράφουμε $d(x, \emptyset) = 1$. Προφανώς για ένα σύνολο $\{a\}$ έχουμε ότι $d(x, \{a\}) = d(x, a)$. Επιπλέον, αν $x \in A$, τότε $d(x, A) = 0$, αλλά όχι το αντίστροφο, αφού για παράδειγμα η απόσταση του σημείου 0 από



Σχήμα 12: Η απόσταση $d(x, A)$ του σημείου x από το σύνολο A.

το ανοικτό διάστημα (0,1) επί της πραγματικής ευθείας $\Re$ είναι μηδέν. Το σύνολο $B(A, r) = \{x \in X : d(x, A) < r\}$ για $A \subset X$ και $r > 0$ ονομάζεται *γενικευμένη ανοικτή σφαίρα γύρω από το* A *και με ακτίνα* r.

1.3.9 .ΘΕΩΡΗΜΑ. *Η απεικόνιση που αντιστοιχεί ένα σημείο* $x \in X$ *στην απόστασή του από ένα δεδομένο σύνολο* $A \subset X$ *είναι μια μη-επεκτατική συνάρτηση του χώρου* X *μέσα στην πραγματική ευθεία.* □

§.1.4. ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΚΑΙ ΟΡΙΑ

Στην παράγραφο αυτή θα μιλήσουμε για την σύγκλιση των σημείων ενός τοπολογικού χώρου. Η ένοια της σύγκλισης είναι η περισσότερο σημαντική έννοια τόσο της τοπολογίας όσο και της Ανάλυσης γενικότερα. Εστω ότι μας δίνεται μετρικός χώρος (X, d) και μια ακολουθία σημείων $x_n \in X$, όπου $n = 1, 2, \ldots$, κι ένα σημείο x_0. Θα λέμε ότι η ακολουθία $\{x_n\}$ *συγκλίνει στο σημείο* x_0, συμβολικά γράφουμε $lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, αν η ακολουθία τών πραγματικών αριθμών $d(x_n, x_0)$ συγκλίνει στο μηδέν, που σημαίνει ότι για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό ϵ υπάρχει ένας δείκτης k τέτοιος ώστε $d(x_n, x_0) < \epsilon$ για κάθε $n \geq k$. Χρησιμοποιώντας την έννοια της ανοικτής σφαίρας, μπορούμε να πούμε ότι η ακολουθία $\{x_n\}$ συγκλίνει στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό ϵ υπάρχει ένας δείκτης k τέτοιος ώστε $x_n \in B(x_0, \epsilon)$ για κάθε $n \geq k$. Κάθε σημείο x_0 που ικανοποιεί την συνθήκη $lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ονομάζεται *όριο* της ακολουθίας x_n. Αναφέρουμε μερικά γνωστά Θεωρήματα.

1.4.1 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Μια ακολουθία έχει ένα και μόνο όριο.* □

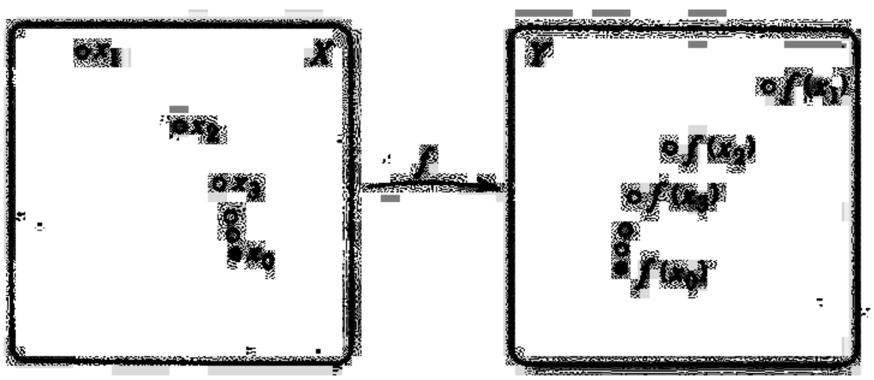
1.4.2 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Η σταθερή ακολουθία* $\{x_n\}$, *όπου* $x_n = x_0$ *για* $n = 1, 2, \ldots$, *συγκλίνει και* $lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. □

1.4.3 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Κάθε υπακολουθία μιας ακολουθίας που συγκλίνει σ'ενα σημείο* x_0, *επίσης συγκλίνει στο σημείο αυτό.* □

1.4.4 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν κάθε υπακολουθία μιας ακολουθίας* $\{x_n\}$ *περιέχει μια υπακολουθία συγκλίνουσα στο σημείο* x_0, *τότε* $lim_{n\to\infty} x_n = x_0$.□

1.4.5 ΛΗΜΜΑ. *Αν για μια ακολουθία σημείων* $x_n \in X$, *όπου* $n = 1, 2, \ldots$, *υπάρχει ένας θετικός πραγματικός αριθμός* η *τέτοιος ώστε* $d(x_n, x_k) \geq \eta$ *για όλα τα* $n \neq k$, *τότε καμιά υπακολουθία της ακολουθίας δεν συγκλίνει.* □

1.4.6 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Μια συνάρτηση* $f : X \to Y$ *είναι συνεχής στο σημείο* $x_0 \in X$ *αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία σημείων* $x_n \in X$, *για* $n = 1, 2, \ldots$, *που ικανοποιεί την εξίσωση* $lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, *ισχύει η εξίσωση* $lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.□

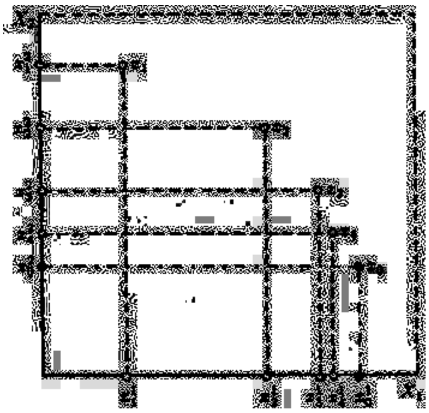


Σχήμα 13: Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 αν η συνθήκη $lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ συνεπάγεται την $lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ για κάθε ακολουθία $\{x_0\}$ (Θεώρημα 1.4.6.).

1.4.7 ΠΟΡΙΣΜΑ. *Μία συνάρτηση* f *του χώρου* X *επί του χώρου* Y *είναι ένας ομοιομορφισμός αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία σημείων* $x_n \in X$, *όπου*

$n = 1, 2, \ldots$, *οι συνθήκες* $lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ *και* $lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ *είναι ισοδύναμες.* □

1.4.8 ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν* A *είναι ένας μετρικός υπόχωρος του χώρου* X *και* $x_n \in A$ *για κάθε* $n = 1, 2, \ldots$, *τότε* $lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ *αν και μόνο αν* $lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ *στο* X. □



Σχήμα 14: Η σύγλιση σ'ενα μετρικό γινόμενο είναι ισοδύναμη προς την κατά συντεταγμένες σύγκλιση (Θεώρημα 1.4.9).

1.4.9 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν* $(X, d) = \prod_{i=1}^{m} (X_i, d_i)$ *και* $x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^m) \in X$ *για* $n = 0, 1, 2, \ldots$, *τότε* $lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ *στο χώρο* X *αν και μόνο αν* $lim_{n\to\infty} x_n^i = x_0^i$ *σε καθ'ενα από τους χώρους* X_i *για* $i = 1, 2, \ldots, m$.□

...

Θα αναφερθούμε τώρα στην έννοια του ορίου για μια ακολουθία συναρτήσεων. Ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται μια ακουλουθία συναρτήσεων $f_n : X \to Y$ για $n = 1, 2, \ldots$ και μια συνάρτηση $f_0 : X \to Y$. Λέμε ότι η ακολουθία $\{f_n\}$ είναι *κατά σημεία συγκλίνουσα* προς την συνάρτηση f_0 (που ονομάζεται *όριο* της ακολουθίας) αν $lim_{n\to\infty} f_n(x) = f_0(x)$ για κάθε $x \in X$.

1.4.10 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Παίρνοντας $f_n(x) = x^n$ για $x \in I$, $n = 1, 2, \ldots$, όπου x^n συμβολίζει την n-ιοστή δύναμη του αριθμού x , επιτυγχάνουμε μια ακολουθία συναρτήσεων $f_n : I \to I$ κατά σημεία συγκλινουσών προς την συνάρτηση $f_0 : I \to I$ που ορίζεται από τον τύπο:

$$f_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } 0 \le x < 1, \\ 1, & \text{αν } q = 1. \end{cases} \quad \square$$

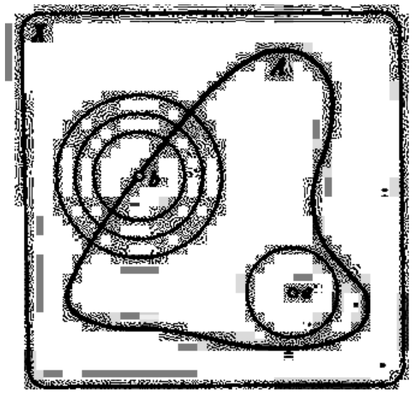
Αυτό το παράδειγμα καταδεικνύει ότι *το όριο της κατά σημεία σύγκλισης συνεχών συναρτήσεων δεν είναι απαραίτητο να είναι συνεχής συνάρτηση.* Αυτή η ιδιαιτερότητα δεν προκύπτει αν θέσουμε ισχυρότερες συνθήκες για την σύγκλιση: λέμε ότι μια ακολουθία $\{f_n\}$ *ομαλά (ομοιομορφικά) συγκλίνουσα* προς το f_0 (το οποίο επίσης καλείται *όριο*) αν για κάθε θετικό αριθμό ϵ υπάρχει ένας δείκτης k τέτοιος ώστε $d(f_n(x), f_0(x)) < \epsilon$ για κάθε $n \geq k$ και κάθε σημείο $x \in X$. Προφανώς, κάθε ομαλά συγκλίνουσα ακολουθία συναρτήσεων είναι κατά σημεία συγκλίνουσα. Εξάλλου, μπορεί κανείς να δει από το Παράδειγμα 1.4.10 και το Θεώρημα 1.4.11 ότι το αντίστροφο δεν είναι πάντα αληθές.

1.4.11 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Το όριο μιας ομοιομορφικά συνεχούς συγκλίνουσας ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων είναι συνεχής συνάρτηση.* □

§.1.5 ΑΝΟΙΚΤΑ ΚΑΙ ΚΛΕΙΣΤΑ ΣΥΝΟΛΑ

Εστω ότι A είναι υποσύνολο ενός μετρικού χώρου X . Για κάθε σημείο $a \in X$ υπάρχουν δυο δυνατότητες: είτε υπάρχει ανοικτή σφαίρα που έχει κέντρο το a και περιέχεται εξολοκλήρου στο A ή κάθε ανοικτή σφαίρα επί του a τέμνει το συμπλήρωμα $X \backslash A$. Στην πρώτη περίπτωση θα λέμε ότι το a είναι *εσωτερικό* σημείο του συνόλου A μέσα στον χώρο X , ενώ στην δεύτερη περίπτωση λέμε ότι το a είναι *συνοριακό* σημείο του συνόλου A στον χώρο X .

Για παράδειγμα, οι αριθμοί 0 και 1 είναι συνοριακά σημεία του μοναδιαίου διαστήματος I στον χώρο των πραγματικών αριθμών $\Re$, ενώ όλα τα υπόλοιπα σημεία του διαστήματος είναι εσωτερικά σημεία. Βέβαια, αν δούμε το ίδιο μοναδιαίο διάστημα I ώς υποσύνολο του χώρου των μή αρνητικών πραγματικών αριθμών $\Re_+$, τότε ο αριθμός 0 γίνεται ένα σημείο εσωτερικό και μόνο ο αριθμός 1 είναι ένα συνοριακό σημείο του I . Ετσι, βλέπουμε ότι η ιδιότητα του εσωτερικού και συνοριακού σημείου εξαρτάται



Σχήμα 15: Ενα εσωτερικό σημείο a κι ένα συνοριακό σημείο b του χώρου X .

κι από τον χώρο μέσα στον οποίο βρίσκεται το συγκεκριμένο σύνολο.

Το σύνολο των εσωτερικών σημείων ενός συνόλου A μέσα σ'ενα χώρο X καλείται *εσωτερικό* του A στον χώρο X και συμβολίζεται με $intA$. Ενα σύνολο A του οποίου όλα τα σημεία είναι εσωτερικά σε σχέση μ'ενα χώρο X ονομάζεται *ανοικτό* σύνολο του χώρου X. Ενα σύνολο B του οποίου όλα τα σημεία είναι συνοριακά μέσα στο χώρο X ονομάζεται *συνοριακό* σύνολο του χώρου ή ακόμη και *σύνολο με κενό εσωτερικό*. Τα ανοικτά σύνολα A χαρακτηρίζονται από την εξίσωση $intA = A$ και τα συνοριακά σύνολα $intA = \emptyset$.

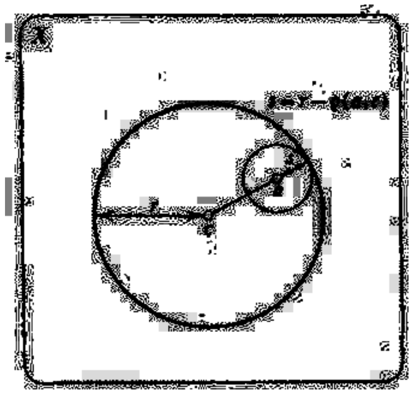
Για παράδειγμα το κενό σύνολο κι όλος ο χώρος είναι ανοικτά σύνολα στο X . Κάθε σύνολο στο διακριτό μετρικό χώρο είναι ανοικτό. Το σύνολο $\{x^2 = (x^1, x^2) \in \Re^2 : x^2 = 0\}$ είναι ένα συνοριακό σύνολο (δηλαδή ένα σύνολο με κενό εσωτερικό) στον Ευκλείδιο χώρο $\Re^2$.

1.5.1 ΛΗΜΜΑ. *Το ανοικτό σύνολο $B(c, r)$ για $c \in X$ και $r > 0$ είναι ανοικτό σύνολο στο X.*□

1.5.2 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Το εσωτερικό ενός συνόλου είναι ανοικτό σύνολο.* □

1.5.3 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Η ένωση τυχαίας συλλογής ανοικτών συνόλων σε ένα μετρικό χώρο είναι ανοικτό σύνολο.* □

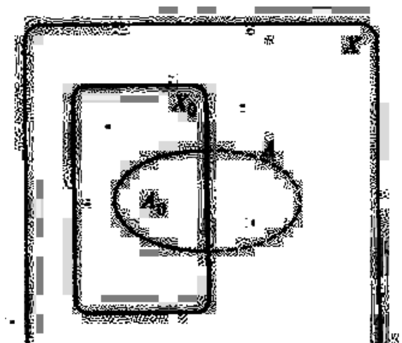
1.5.4 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Η τομή πεπερασμένου αριθμού ανοικτών συνόλων, σε ενα μετρικό χώρο, είναι ανοικτό σύνολο του χώρου.* □



Σχήμα 16: Η ανοικτή σφαίρα $B(c, r)$ είναι ένα ανοικτό σύνολο στον χώρο X (Λήμα 1.5.1).

Αν επί της πραγματικής ευθείας $\Re$ ορίσω $A_j = B(0, 1/j)$ για $j = 1, 2, \ldots$, επιτυγχάνουμε μια άπειρη ακολουθία συνόλων της οποίας η τομή $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \{0\}$ δεν είναι ανοικτό σύνολο στο $\Re$. Από αυτό φαίνεται ότι το Θεώρημα δεν γενικεύεται και για την περίπτωση του απείρου αριθμού ανοικτών συνόλων.

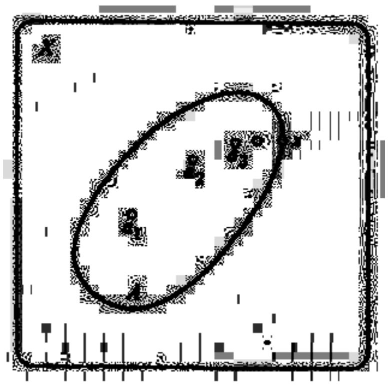
1.5.5 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν X_0 είναι ένας μετρικός υπόχωρος ενός χώρου X, τότε ένα σύνολο $A_0 \subset X_0$ είναι ανοικτό στο X_0 αν και μόνο αν $A_0 = A \bigcap X_0$ για κάποιο σύνολο A το οποίο είναι ανοικτό στο X .* □



Σχήμα 17: Το ανοικτό σύνολο A_0 είναι ανοικτό (κλειστό) στον υπόχωρο X_0 αν είναι της μορφής $A \bigcap X_0$ όπου το σύνολο A είναι ανοικτό (κλειστό) στον X (Θεώρημα 1.5.5. και 1.5.18).

1.5.6 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν A_i για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του χώρου (X_i, d_i), τότε το μετρικό γινόμενο $\prod_{i=1}^{m} A_i$ είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του μετρικού γινομένου $\prod_{i=1}^{m}(X_i, d_i)$.* $\square$

Θα ορίσουμε μια άλλη κλαση συνόλων τα οποία είναι κατά μια έννοια δυικά προς την κλάση τών ανοικτών συνόλων και των συνοριακών συνόλων. Υποθέτουμε ότι δίδεται ένας μετρικός χώρος X κι ότι $A \subset X$. Θα λέμε ότι ένα σημείο $x \in X$ είναι *οριακό σημείο* του συνόλου A μέσα στον χώρο X αν υπάρχει μια ακολουθία σημείων $a_n \in A$ για $n = 1, 2, \ldots$ τέτοια ώστε $lim_{n\to\infty} a_n = x$. Προφανώς, κάθε σημείο του συνόλου A είναι οριακό σημείο του αλλά όχι το αντίστροφο. Για παράδειγμα αν $X = \Re$ και A είναι το διάστημα (0,1) τότε όχι μόνο τα σημεία του συνόλου A αλλά επίσης οι αριθμοί 0 και 1 είναι οριακά σημεία του A μέσα στον χώρο των πραγματικών αριθμών $\Re$.



Σχήμα 18: Ένα οριακό σημείο x του συνόλου A στον χώρο X.

Το σύνολο των οριακών σημείων του συνόλου A στον χώρο X ονομάζεται η *θήκη* του στο χώρο X και συμβολίζεται με clA. Αν το σύνολο A περιέχει όλα τα οριακά σημεία του μέσα στον χώρο X, τότε θα λέμε ότι το σύνολο είναι *κλειστό* μέσα στον χώρο. Αν κάθε σημείο του χώρου X είναι οριακό σημείο του συνόλου A, τότε θα λέμε ότι το σύνολο A είναι *πυκνό* μέσα στον χώρο X. Ετσι ένα κλειστό σύνολο A χαρακτηρίζεται από την εξίσωση $clA = A$ κι ένα πυκνό σύνολο A από την $clA = X$.

Για παράδειγμα, το κενό σύνολο $\emptyset$ κι ολόκληρος ο χώρος X είναι κλειστά σύνολα στο X . Σ'ενα μετρικό χώρο κάθε μονοσύνολο είναι κλειστό σύνολο. Το μοναδιαίο διάστημα είναι κλειστό στην ευθεία τών πραγματικών $\Re$. Το σύνολο τών ρητών αριθμών X είναι πυκνό μέσα στην πραγματική $\Re$.

Τα οριακά σημεία ενός συνόλου σ'ενα μετρικό χώρο μπορούν να χαρακτηριστούν από την απόστασή τους ως προς το σύνολο.

1.5.7 ΠΡΟΤΑΣΗ. *Οι συνθήκες* $x \in clA$ *και* $d(x, A) = 0$ *είναι ισοδύναμες.* □

1.5.8 ΠΡΟΤΑΣΗ *Για κάθε σύνολο* $A \subset X$ *έχουμε την εξίσωση* $diamclA = diamA$.□

1.5.9 ΛΗΜΜΑ. *Η κλειστή σφαίρα* $\overline{B}(c, r)$ *για* $c \in X$ *και* $r > 0$ *είναι ένα κλειστό σύνολο του* X.□

...

Υπάρχουν σύνολα τα οποία είναι συγχρόνως κλειστά κι ανοικτά στον χώρο X, για παράδειγμα το κενό σύνολο $\emptyset$ και όλος ο χώρος X . Ενα τέτοιο σύνολο ονομάζεται *ανοικτό και κλειστό* σύνολο στο X .

Δια μέσου ενός ομοιομορφισμού h του χώρου X επί του χώρου Y τα οριακά σημεία του συνόλου $A \subset X$ αποδίδονται σε οριακά σημεία της εικόνας $h(A) \subset Y$ κι αντίστροφως. Τα κλειστά σύνολα του X δια μέσου τών ομοιομορφισμών αποδίδονται σε κλειστά σύνολα του Y και τα πυκνά σύνολα του X σε πυκνά σύνολα του Y.

1.5.10 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ενα σημείο* $x \in X$ *είναι οριακό σημείο του συνόλου* A *στον χώρο* X *αν και μόνο αν δεν είναι εσωτερικό σημείο του συμπληρώματος* $X \backslash A$ *στον χώρο* X.□

1.5.11 ΠΟΡΙΣΜΑ. *Για κάθε σύνολο* $A \subset X$ *ισχύουν οι εξισώσεις* $X \backslash clA = int(X \backslash A)$ *και* $X \backslash intA = cl(X \backslash A)$.□

1.5.12 ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ενα σύνολο* A *είναι κλειστό (αντίστοιχα, πυκνό) στον χώρο* X *αν και μόνο αν το συμπλήρωμα* $X \backslash A$ *είναι ανοικτό (αντίστοιχα, έχει κενό εσωτερικό) στον χώρο* X . *Ενα σύνολο* A *είναι ανοικτό (αντίστοιχα, έχει κενό εσωτερικό) αν και μόνο αν το συμπλήρωμα* $X \backslash A$ *είναι κλειστό (αντίστοιχα, πυκνό) στον χώρο* X.□

1.5.13 ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ενα σύνολο είναι συνοριακό στον χώρο* X *αν και μόνο αν το μοναδικό ανοικτό υποσύνολο του στο* X *είναι το κενό σύνολο. Ενα σύνολο είναι* *πυκνό στο X αν και μόνο αν έχει μη-κενή τομή με κάθε μη-κενό ανοικτό σύνολο του χώρου X.*□

...

Καθώς προκύπτει από το Πόρισμα 1.5.1, δια μέσου ενός ομοιομορφισμού h ενός χώρου X επί ενός χώρου Y τα εσωτερικά σημεία ενός συνόλου $A \subset X$ αποδίδονται σε εσωτερικά σημεία της εικόνας $h(A) \subset Y$ και αντιστρόφως. Επίσης προκύπτει ότι δια μέσου τών ομοιομορφισμών τα ανοικτά σύνολα του χώρου αποδίδονται σε ανοικτά σύνολα του χώρου Y, ενώ τα συνοριακά σύνολα του χώρου αποδίδονται σε συνοριακά σύνολα του Y.

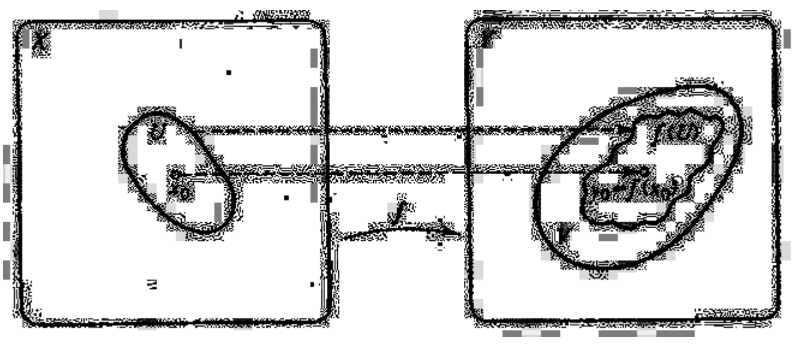
1.5.14 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Κάθε m-διάστατος γραμμικός χώρος του χώρου $\Re^n$ είναι κλειστό σύνολο κι αν $m < n$ τότε έχει κενό εσωτερικό.* □

1.5.15 .ΘΕΩΡΗΜΑ. *Η θήκη ενός συνόλου είναι κλειστό σύνολο* □

1.5.16 .ΘΕΩΡΗΜΑ. *Η τομή τυχαίας συλλογής κλειστών συνόλων σ'ενα μετρικό χώρο είναι κλειστό σύνολο.* □

1.5.17 .ΘΕΩΡΗΜΑ. *Η ένωση ενός πεπερασμένου αριθμού κλειστών συνόλων σ'ενα μετρικό χώρο είναι κλειστό σύνολο του χώρου* □

1.5.18 .ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν X_0 είναι ένας μετρικός υπόχωρος του χώρου X , τότε ένα σύνολο $A_0 \subset X_0$ είναι κλειστό στον X_0 αν και μόνο αν $A_0 = A \cap X_0$ για κάποιο σύνολο το οποίο είναι κλειστό στον X.*□



Σχήμα 19: Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 αν για κάθε περιοχή V του σημείου $y_0 = f(x_0)$ υπάρχει περιοχή U του σημείου x_0 τέτοια ώστε $f(U) \subset V$ (Θεώρημα 1.5.21).

1.5.19 .ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν* A_i, *για κάθε* $i = 1, 2, \ldots, n$ *είναι ένα κλειστό υποσύνολο του μετρικού χώρου* (X_i, d_i) , *τότε το μετρικό γινόμενο* $\prod_{i=1}^{n} A_i$ *είναι ένα κλειστό υποσύνολο του μετρικού γινομένου* $\prod_{i=1}^{n}(X_i, d_i)$.□

1.5.20 .ΛΗΜΜΑ. *Αν ένα μη-κενό σύνολο* $A \subset \Re$ *είναι κλειστό στο* $\Re$ *και το* $supA$ *(αντίστοιχα,* $infA$ *) είναι πεπερασμένο, τότε* $supA \in A$ *(αντίστοιχα,* $infA \in A$*).* □

...

Μας δίνεται ένας μετρικός χώρος X κι ένα σημείο $x \in X$. Κάθε ανοικτό σύνολο του X το οποίο περιέχει το σημείο x ονομάζεται *περιοχή* του σημείου x στον χώρο X . Για παράδειγμα, σ'ενα μετρικό χώρο η ανοικτή σφαίρα $B(c, r)$ αποτελεί μια περιοχή του σημείου c . Χρησιμοποιώντας την έννοια της περιοχής μπορούμε να δώσουμε τον επόμενο χαρακτηρισμό των συνεχών συναρτήσεων.

1.5.21 .ΘΕΩΡΗΜΑ. *Εστω μια συνάρτηση* $f : X \to Y$ *μεταξύ μετρικών χώρων και έστω* $y_0 = f(x_0)$, *όπου* $x_0 \in X$. *Για να είναι η συνάρτηση* f *συνεχής στο σημείο* x_0 *πρέπει κι αρκεί για κάθε περιοχή* V *του σημείου* y_0 *να υπάρχει περιοχή* U *του σημείου* x_0 *τέτοια ώστε* $f(U) \subset V$.□

1.5.22 .ΘΕΩΡΗΜΑ. *Για να είναι μια συνάρτηση* $f : X \to Y$ *μεταξύ μετρικών χώρων συνεχής είναι αναγκαίο κι ικανό για κάθε ανοικτό (αντίστοιχα, κλειστό) σύνολο* B *του χώρου* Y *η αντίστροφη εικόνα* $f^{-1}(B)$ *να είναι ανοικτό (αντίστοιχα, κλειστό) σύνολο στον* X.□

1.5.23 .ΠΟΡΙΣΜΑ. *Κάθε κλειστός (αντίστοιχα, ανοικτός) υπόχωρος του Ευκλειδείου χώρου* $\Re^n$ *είναι κλειστό (αντίστοιχα, ανοικτό) σύνολο του* $\Re^n$.□

1.5.24 .ΛΗΜΜΑ. *Για κάθε δυο κλειστά και ξένα μεταξύ τους σύνολα* $A, B \subset X$ *υπάρχει συνεχής συνάρτηση* $f : X \to I$ *τέτοια ώστε* $f(x) = 0$ *για* $x \in A$ *και* $f(x) = 1$ *για* $x \in B$.□

1.5.25 .ΘΕΩΡΗΜΑ. *Για κάθε δυο κλειστά σύνολα, ξένα μεταξύ τους* $A, B \subset X$ *υπάρχουν επίσης ξένα μεταξύ τους ανοικτά σύνολα* $U, V \subset X$ *που ικανοποιούν τις σχέσεις* $A \subset U, B \subset V$.□

1.5.26 .ΘΕΩΡΗΜΑ. *Εστω ότι* A_1 *και* A_2 *είναι δυο κλειστά σύνολα σ'ενα μετρικό χώρο* X *και υποθέτουμε ότι* $A_1 \cup A_2 = X$. *Αν* $f : X \to Y$ *και* $f \mid A_1$ *και*

$f \mid A_2$ είναι συνεχείς,τότε η συνάρτηση f είναι συνεχής. □

1.5.27 .ΠΟΡΙΣΜΑ. *Εστω ότι τα A_1, A_2 είναι κλειστά υποσύνολα του μετρικού χώρου X και υποθέτουμε ότι $A_1 \cup A_2 = X$. Αν οι συνεχείς συναρτήσεις $f_1 : A_1 \to Y$ και $f_2 : A_2 \to Y$ ικανοποιεί την συνθήκη $f_1 \mid A_1 \cap A_2 = f_2 \mid A_1 \cap A_2$, τότε η συνάρτηση $f : X \to Y$ που ορίζεται από τον τύπο:*

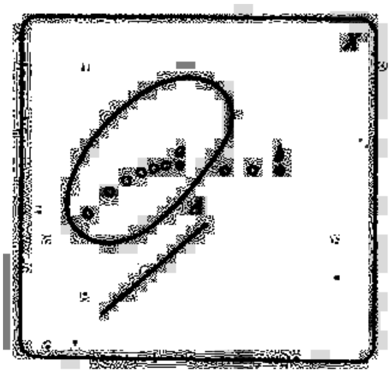
$$f(x) = \begin{cases} f(x_1), & \text{αν } x \in A_1, \\ f(x_2), & \text{αν } x \in A_2, \end{cases}$$

είναι συνεχής. □

Από το Θεώρημα 1.5.22 και το Θεώρημα 1.3.9 προκύπτει η επόμενη γενίκευση του Λήμματος 1.5.1.

1.5.28 .ΠΡΟΤΑΣΗ *Για κάθε σύνολο $A \subset X$ και $r > 0$ η γενικευμένη σφαίρα $B(A, r)$ είναι ένα ανοικτό σύνολο του X.*□

...

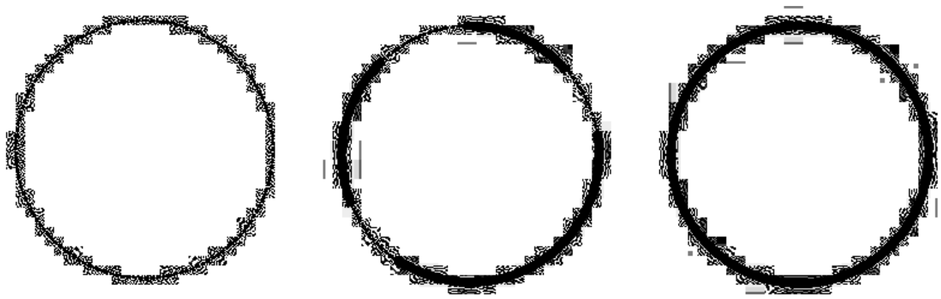


Σχήμα 20: Ένα σημείο συσσώρευσης a κι ένα απομονωμένο σημείο b ενός συνόλου A στον X.

Δίδεται ένα σύνολο $A \subset X$. Θα λέμε ότι ένα σημείο $x \in X$ είναι ένα σημείο *συσσώρευσης* του συνόλου A αν $x \in cl(A \setminus \{x\})$. Με άλλα λόγια, x είναι ένα σημείο συσσώρευσης ενός σημείου του συνόλου A αν υπάρχει μια ακολουθία σημείων $a_n \in A$ τέτοια ώστε $a_n \neq x$ για $n = 1, 2, \ldots$, και $lim_{n\to\infty} a_n = x$. Ενα σημείο του συνόλου A το οποίο δεν είναι σημείο συσσώρευσης του A ονομάζεται *απομονωμένο* σημείο του συνόλου.

Αρα για να είναι ένα σημείο x απομονωμένο μέσα στο χώρο X πρέπει και αρκεί το $X\backslash\{x\}$ να είναι κλειστό στον X. Από το Πόρισμα 1.5.12 αυτό ισοδυναμεί με το να πούμε ότι το μονοσύνολο $\{x\}$ είναι ανοικτό στον χώρο. Για παράδειγμα, σ'ενα διακριτό μετρικό χώρο κάθε σημείο είναι απομονωμένο. Ενώ κάθε σημείο της πραγματικής ευθείας είναι σημείο συσσώρευσης.

Η τομή της θήκης ενός συνόλου A σ'ενα χώρο X με την θήκη του συμπληρώματος του $X\backslash A$ ονομάζεται *σύνορο* του συνόλου A στον χώρο X και συμβολίζεται με το σύμβολο bdA . Τώρα, από το Πόρισμα 1.5.11 η εξίσωση $clA\bigcap cl(X\backslash A) = X\backslash(intA\bigcup int(X\backslash A))$ κι επίσης ισχύει $X\backslash(intA\bigcup int(X\backslash A)) = (A\backslash intA)\bigcup((X\backslash A)\backslash int(X\backslash A))$. Αρα το σύνορο bdA του συνόλου A αποτελείται από σημεία του συνόλου A και συνοριακά σημεία του συμπληρώματος του. Εχουμε την επόμενη Πρόταση.



Σχήμα 21: Ο ανοικτός δίσκος, ο δίσκος με ένα μέρος από το σύνορό του και ο δίσκος με πλήρες σύνορο. Τα σύνορα και των τριών δίσκων στο επίπεδο ταυτίζονται.

1.5.29 .ΠΡΟΤΑΣΗ. *Ενα σύνολο A είναι συγχρόνως ανοικτό και κλειστό στο X αν και μόνο αν $bdA = \emptyset$.*$\square$

§.1.6. ΣΥΜΠΑΓΕΙΣ ΧΩΡΟΙ

1.6.1 .ΘΕΩΡΗΜΑ. (Bolzano, Weierstrass)*Για κάθε ακολουθία αριθμών $x_n \in$*

I όπου $n = 1, 2, \ldots$ υπάρχει υπακολουθία συγκλίνουσα στο I.$\square$

...

Η ιδιότητα του μοναδιαίου διαστήματος I , η οποία εξασφαλίζεται στο προηγούμενο Θεώρημα, ισχύει επίσης και για κάθε φραγμένο διάστημα, το οποίο είναι ένα σύνολο όμοιο προς το μοναδιαίο διάστημα. Οπωσδήποτε αυτό δεν είναι μια ιδιότητα όλων τών μετρικών χώρων ούτε ακόμη υποχώρων της πραγματικής ευθείας $\Re$. Για παράδειγμα επί της πραγματικής ευθείας $\Re$ η ακολουθία $x_n = n$ για $n = 1, 2, \ldots$ δεν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, βλέπε Λήμμα 1.4.5.

Ενας μετρικός χώρος X λέγεται ότι είναι *συμπαγής* χώρος, αν κάθε ακολουθία σημείων του χώρου έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία. Αρα το μοναδιαίο διάστημα είναι συμπαγής χώρος ενώ η πραγματική ευθεία $\Re$ δεν είναι. Ο διακριτός μετρικός χώρος είναι συμπαγής αν και μόνο αν έχει πεπερασμένου πλήθους στοιχεία.

1.6.2 .ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν f είναι συνεχής συνάρτηση του συμπαγούς χώρου X επί του χώρου Y, τότε ο Y είναι επίσης συμπαγής.* $\square$

1.6.3 .ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν X είναι συμπαγής χώρος και A είναι κλειστό υποσύνολο του X , τότε ο υπόχωρος A είναι επίσης συμπαγής* $\square$

1.6.4 .ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν $A \subset X$ και A είναι ένας συμπαγής υπόχωρος, τότε το A είναι κλειστό υποσύνολο του X.*$\square$

1.6.5 .ΘΕΩΡΗΜΑ. *Το μετρικό γινόμενο ενός πεπερασμένου αριθμού συμπαγών χώρων είναι συμπαγής χώρος.* $\square$

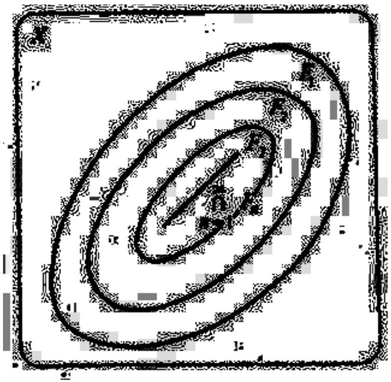
1.6.6 .ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ο μοναδιαίος κύβος I^n είναι ένας συμπαγής χώρος.* $\square$

1.6.7 .ΠΟΡΙΣΜΑ. *Η κλειστή μοναδιαία σφαίρα B^n κι η επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας S^{n-1} είναι συμπαγείς για κάθε n.*$\square$

1.6.8 .ΘΕΩΡΗΜΑ. (Cantor). *Αν X είναι συμπαγής χώρος και $X \supset F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ όπου $\emptyset \neq F_n = clF_n$ για $n = 1, 2, \ldots$, τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.*$\square$

...

Μια οικογένεια $\{U_t\}_{t\in T}$ υποσυνόλων ενός συνόλου X ονομάζεται κάλυψη του συνόλου, αν $X = \bigcup_{t\in T} U_t$. Αν X είναι ένας μετρικός χώρος και τα σύνολα U_t για $t \in T$ είναι ανοικτά στο X, τότε η κάλυψη $\{U_t\}_{t\in T}$ ονομάζεται



Σχήμα 22: Η τομή μιας φθίνουσας ακολουθίας από μη κενά κλειστά σύνολα σε ένα συμπαγή χώρο είναι μη κενό σύνολο, Θεώρημα 1.6.8.

ανοικτή. □

1.6.9 .ΛΗΜΜΑ. *Αν ένας χώρος X είναι συμπαγής, τότε για κάθε θετικό αριθμό ϵ υπάρχει μια πεπερασμένη κάλυψη του χώρου X με ανοικτές σφαίρες ακτίνας ϵ.*□

1.6.10 .ΠΟΡΙΣΜΑ. *Κάθε συμπαγής χώρος είναι φραγμένος.* □

1.6.11 .ΘΕΩΡΗΜΑ (Borel, Lebesgue). *Κάθε ανοικτή κάλυψη ενός συμπαγούς χώρου περιέχει μια πεπερασμένη υποκάλυψη.* □

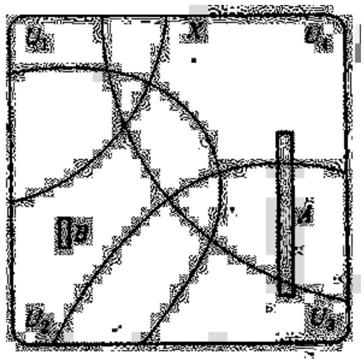
1.6.12 .ΛΗΜΜΑ (Lebesgue).*Για κάθε ανοικτή κάλυψη $\mathcal{U}$ ενός συμπαγούς χώρου X υπάρχει ένας θετικός πραγματικός αριθμός λ με την ιδιότητα, κάθε υποσύνολο του χώρου X με διάμετρο μικρότερη από λ να περιέχεται σε ένα μέλος της $\mathcal{U}$.*□

...

Κάθε αριθμός λ ο οποίος έχει την ιδιότητα που αναφέρεται στο Λήμμα του Lebesgue ονομάζεται *αριθμός Lebesgue* της κάλυψης $\mathcal{U}$. Είναι προφανές ότι δεν καθορίζεται από την κάλυψη κατά μοναδικό τρόπο.

1.6.13 .ΘΕΩΡΗΜΑ. (Heine) *Κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη επί ενός συμπαγούς χώρου είναι ομοιομορφικά συνεχής.* □

1.6.14 .ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν η f είναι συνεχής και ένα προς ένα συνάρτηση του συμπαγούς χώρου X επί του χώρου Y, τότε η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής.* □



Σχήμα 23: Το σύνολο A δεν περιέχεται σε κανένα μέλος της κάλυψης του χώρου X, είναι μεγαλύτερο από τον αριθμό Lebesgue της κάλυψης. Το σύνολο B έχει διάμετρο μικρότερη από τον αριθμό και περιέχεται στο U_2.

1.6.15 .ΘΕΩΡΗΜΑ (Weierstrass). *Κάθε πραγματική συνεχής συνάρτηση ορισμένη σ'ενα συμπαγή χώρο είναι φραγμένη και λαμβάνει το ανώτερο και το κατώτερο πέρας.* □

§.1.7 ΔΙΑΧΩΡΙΣΙΜΟΙ ΧΩΡΟΙ

Ενας μετρικός χώρος X ονομάζεται *διαχωρίσιμος* αν περιέχει ένα αριθμήσιμο πυκνό σύνολο A, δηλαδή αν $A \subset X$ με $cardA \leq \aleph_0$ τέτοια ώστε $clA = X$. Αρα η πραγματική ευθεία $\Re$ και το μοναδιαίο διαστημα I είναι διαχωρίσιμοι χώροι, αφού το σύνολο των ρητών αριθμών Q και το σύνολο $Q \bigcap I$ είναι πυκνό στο $\Re$ και I αντίστοιχα. Ενας διακριτός χώρος είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν είναι αριθμήσιμος. Τούτο συμβαίνει γιατί τα γνήσια υποσύνολα ένος διακριτού χώρου δεν μπορεί να είναι πυκνά. Ιδιαίτερα το σύνολο των πραγματικών αριθμών με την διακριτή τοπολογία δεν είναι διαχωρίσιμος χώρος.

Θυμίζουμε εδώ τον ορισμό της βάσης ενός χώρου. Μια οικογένεια $\mathcal{B} = \{V_s\}_{s\in S}$ που αποτελείται από ανοικτά σύνολα ενός μετρικού χώρου X θα ονομάζεται *βάση του χώρου* X, αν κάθε μή κενό ανοικτό σύνολο $U \subset X$ μπορεί να εκφραστεί ως ένωση από στοιχεία της B, δηλαδή υπάρχει ένα σύνολο $S(U) \subset S$ τέτοιο ώστε $U = \bigcup_{s \in S(U))} V_s$.

1.7.1 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν f είναι συνεχής συνάρτηση διαχωρίσιμου χώρου επί ενός χώρου Y, τότε ο Y είναι επίσης διαχωρίσιμος.* □

1.7.2 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν, για $n = 1, 2, \ldots$, $\mathcal{B}_n$ είναι μια ανοικτή κάλυψη του χώρου X με σύνολα διαμέτρου μικρότερης από $1/n$, τότε η οικογένεια $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ είναι μια βάση του χώρου X.*□

1.7.3 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Για κάθε μετρικό χώρο X οι επόμενες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

1. *Ο X είναι διαχωρίσιμος,*
2. *Ο X έχει μια αριθμήσιμη βάση,*
3. *Κάθε ανοικτή κάλυψη του χώρου X έχει μια αριθμήσιμη υποοικογένεια η οποία αποτελεί κάλυψη του χώρου X.*□

...

Από το Θεώρημα 1.6.11 και από την ισοδυναμία των συνθηκών (1) και (3) του Θεωρήματος 1.7.3 προκύπτει ότι.

1.7.4 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Κάθε συμπαγής μετρικός χώρος είναι διαχωρίσιμος.* □

1.7.5 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν X είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος και A είναι υποσύνολο του X, τότε ο υπόχωρος A είναι διαχωρίσμος.* □

1.7.6 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Το μετρικό γινόμενο πεπερασμένου αριθμού διαχωρίσιμων μετρικών χώρων και επίσης το μετρικό και το τοπολογικό γινόμενο μιας άπειρης ακολουθίας διαχωρίσιμων μετρικών χώρων είναι διαχωρίσιμοι.* □

1.7.7 ΘΕΩΡΗΜΑ (Urysohn).*Κάθε διαχωρίσιμος μετρικός χώρος είναι ομοιομορφικός προς ένα υπόχωρο του κύβου του Hilbert* $I^{\aleph_0}$.□

1.7.8 ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ενας μετρικός χώρος X είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν είναι ομοιομορφικός προς ενα υπόχωρο ενός συμπαγούς μετρικού χώρου.* □

1.7.9 ΠΟΡΙΣΜΑ. *Για κάθε διαχωρίσιμο μετρικό χώρο X υπάρχει συνεχής συνάρτηση από ένα υποσύνολο A του συνόλου του Cantor σ'ενα χώρο X. Αν* *ο χώρος X είναι συμπαγής, τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση από ένα κλειστό υποσύνολο του συνόλου Cantor επί του χώρου X.*□

§.1.8 ΠΛΗΡΕΙΣ ΧΩΡΟΙ

Μια ακολουθία $\{x_n\}$, όπου $x_n \in X$ για $n = 1, 2, \dots$ λέγεται ότι ικανοποιεί την *συνθήκη του Cauchy* (ή ότι είναι μια *ακολουθία Cauchy* αν, για κάθε πραγματικό θετικό αριθμό ϵ, υπάρχει ένας δείκτης k τέτοιος ώστε $d(x_n, x_{n'}) < \epsilon$, για όλα τα $n, n' \geq k$. Για παράδειγμα, σ'ενα διακριτό μετρικό χώρο οι μόνες ακολουθίες που ικανοποιούν την συνθήκη του Cauchy είναι είναι εκείνες που είναι σχεδόν (εκτός πεπερασμένου αριθμού όρων) σταθερές.

1.8.1 .ΘΕΩΡΗΜΑ. *Οι όροι μιας ακολουθίας του Cauchy σχηματίζουν ένα σύνολο φραγμένο.* □

1.8.2 .ΘΕΩΡΗΜΑ. *Κάθε συγλίνουσα ακολουθία ικανοποιεί την συνθήκη του Cauchy.*□

1.8.3 .ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν μια ακολουθία του Cauchy περιέχει συγκίνουσα υπακολουθία, τότε κι η ίδια η ακολουθία είναι συγκλίνουσα.* □

1.8.4 .ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν ένας μετρικός χώρος X έχει την ιδιότητα, κάθε φραγμένο υποσύνολο να περιέχεται σ'ενα φραγμένο υπόχωρο, τότε κάθε ακολουθία Cauchy στο X είναι συγκλίνουσα.* □

1.8.5 .ΘΕΩΡΗΜΑ (Cauchy). *Στην πραγματική ευθεία $\Re$ κάθε ακολουθία του Cauchy είναι συγκλίνουσα.* □

1.8.6 .ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν $f : X \to Y$ είναι ομοιομορφικά συνεχής συνάρτηση κι η ακολουθία $\{x_n\}$, όπου $x_n \in X$ για $n = 1, 2, \dots$, ικανοποιεί την συνθήκη του Cauchy στον χώρο X, τότε η ακολουθία $\{f(x_n)\}$ ικανοποιεί την συνθήκη του Cauchy στον χώρο Y.*□

...

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν ομοιομορφισμοί μεταξύ μετρικών χώρων που στέλνουν τις ακουθίες Cauchy επί ακολουθιών που δεν ικανοποιούν την συνθήκη Cauchy. Αυτό σημαίνει ότι η παραπάνω συνθήκη για τις ακολουθίες δεν είναι τοπολογικά αναλλοίωτος.

1.8.7 .ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ο ομοιομορφισμός h που ορίζεται από τον τύπο $h(1/n) = n$ για $n = 1, 2, \ldots$ παίρνει τον χώρο $X = \{1/n : n = 1, 2, \ldots\}$ με την σχετική τοπολογία της πραγματικής ευθείας $\Re$ επί του χώρου $Y = \{n : n = 1, 2, \ldots\}$ με την ανάλογη μετρική. Κάτω από τον συγκεκριμένο ομοιομορφισμό η ακολουθία Cauchy $x_n = 1/n \in X$ για $n = 1, 2, \ldots$ απεικονίζεται στην ακολουθία $h(x_n) = n \in Y$ που δεν ικανοποιεί την συνθήκη του Cauchy.

1.8.8 .ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν* $(X, d) = \prod_{i=1}^{m}(X_i, d_i)$ *, τότε η ακολουθία* $(x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^m) \in X$ *για* $n = 1, 2, \ldots$ *ικανοποιεί την συνθήκη του Cauchy στον χώρο* X *αν και μόνο αν κάθε μια από τις ακολουθίες* $\{x_n^i\}$ *ικανοποιεί την συνθήκη του Cauchy στον χώρο* X_i *για* $i = 1, 2, \ldots, m$.□

...

Κάθε μετρικός χώρος δεν έχει την ιδιότητα της πραγματικής ευθείας $\Re$ στην οποία κάθε ακολουθία του Cauchy συγκλίνει. Για παράδειγμα, ο χώρος τών ρητών αριθμών Q (αν τον δούμε ως μετρικό υπόχωρο της πραγματικής ευθείας) περιέχει ακολουθίες Cauchy που δεν συγκλίνουν, όπως είναι κάθε ακολουθία δεκαδικών προσεγγίσεων που συγκλίνει σε άρρητο αριθμό.

Θα λέμε ότι ένας χώρος είναι *πλήρης* αν κάθε ακολουθία Cauchy του χώρου συγκλίνει μέσα στον χώρο αυτό. Η πραγματική ευθεία είναι πλήρης χώρος, ενώ αυτό δεν συμβαίνει για το σύνολο τών ρητών. Ενας διακριτός χώρος είναι πάντα πλήρης.

Αποτέλεσμα του Θεωρήματος .6. και του 1.4.6 είναι:

1.8.9 .ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν* f *είναι ομαλός ομοιομορφισμός ενός πλήρους χώρου* X *επί ενός χώρου* Y*, τότε ο χώρος* Y *είναι επίσης πλήρης.* □

1.8.10 .ΠΟΡΙΣΜΑ. *Η πραγματική ευθεία* $\Re$ *κι ένα ανοικτό διάστημα δεν είναι ποτέ ομαλά ομοιομορφικοί χώροι .* □

1.8.11 .ΘΕΩΡΗΜΑ. *Κάθε συμπαγής χώρος είναι πλήρης.* □

Η πραγματική ευθεία είναι ένα παράδειγμα που δείχνει ότι δεν ισχύει το αντίστροφο του προηγούμενου Θεωρήματος.

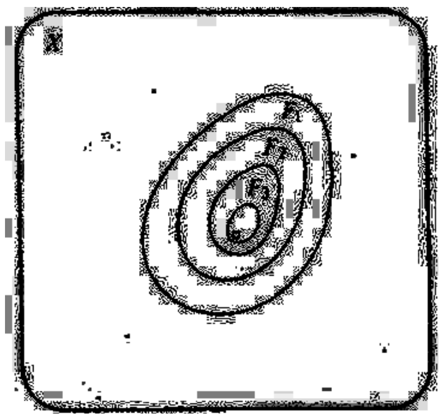
1.8.12 .ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν X είναι ένας πλήρης χώρος και A είναι ένα κλειστό υποσύνολο του X, τότε ο υπόχωρος A είναι πλήρης.* □

1.8.13 .ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν $A \subset X$ και A είναι πλήρης υπόχωρος, τότε το A είναι ένα κλειστό υποσύνολο του X.*□

1.8.14 .ΘΕΩΡΗΜΑ. *Το μετρικό γινόμενο ενός πεπερασμένου αριθμού πλήρων χώρων είναι πλήρης χώρος.* □

1.8.15 .ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ο Ευκλείδειος n-διάστατος χώρος $\Re^n$ είναι πλήρης, για κάθε n.*□

Μία παραλλαγή του Θεωρήματος του Cantor 1.6.8 αποτελεί το επόμενο.

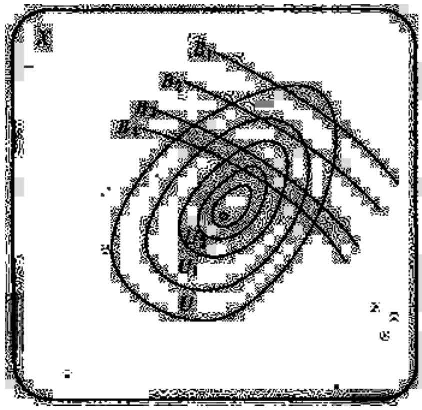


Σχήμα 24: Σε ένα πλήρη χώρο κάθε φθίνουσα ακολουθία από μή κενά κλειστά σύνολα, με διαμέτρους να τείνουν στο μηδέν, έχει τομή ένα σημείο (Θεώρημα 1.8.16).

1.8.16 ΘΕΩΡΗΜΑ (Cantor). *Αν X είναι ένας πλήρης χώρος και $X \supset F_1 \supset F_2 \supset \ldots$, όπου $\emptyset \neq F_n = clF_n$ για $n = 1, 2, \ldots$ και $lim_{n\to\infty} diamF_n = 0$, τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.*□

1.8.17 ΘΕΩΡΗΜΑ (Baire). *Αν X είναι ένας πλήρης χώρος και τα σύνολα $B_1, B_2, \ldots$ είναι κλειστά στον X και δεν έχουν εσωτερικά σημεία τότε η ένωση $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ δεν έχει εσωτερικά σημεία.* □

1.8.18 ΠΟΡΙΣΜΑ. *Αν X είναι ένας πλήρης χώρος και τα σύνολα $G_1, G_2, \ldots$ είναι ανοικτά και πυκνά στον χώρο X, τότε η τομή $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ είναι ένα πυκνό σύνολο.* □



Σχήμα 25: Σε ένα πλήρη μετρικό χώρο η ένωση ενός αριθμήσιμου πλήθους κλειστών συνόλων δίχως εσωτερικά σημεία (Θεώρημα 1.8.17).

2. ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

§.2.1 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΟΥ PEANO

Στα 1890 ο Peano έδωσε το παράδειγμα της καμπύλης που γεμίζει το επίπεδο το και δημιούργησε αναταραχή στους μαθηματικούς που αναγκάστηκαν να μελετήσουν την διαίσθηση, στα θεμέλια της έννοιας της καμπύλης. Μέχρι τότε καμπύλη ονόμαζαν, σύμφωνα με τον ορισμό του Jordan (1893), τον δρόμο που διαγράφει μια κίνηση ενός σημείου. Για την ακρίβεια καμπύλη στο επίπεδο ορίζεται με ένα σύστημα εξισώσεων $x = f(t), y = f(t)$ όπου f και f είναι συνεχείς συναρτήσεις της πραγματικής μεταβλητής t. Κάπως πρόχειρα χρησιμοποιούμε τον ορισμό αυτό και σήμερα στην αναλυτική γεωμετρία ή την κλασσική διαφορική όπου ως καμπύλη δίνεται το σύνολο:

$$\Gamma := r(t) = \{x(t), y(t) : t \in I\} \subset \Re^2$$

με διανυσματική εξίσωση: $r = r(t) = (x(t), y(t)), t \in I$ και με συντεταγμένες τις παραμετρικές εξισώσεις $x = x(t), y = y(t), t \in I$ (βλέπε, [Ξ]). Το παράδειγμα του Πεανο ήταν το εξής:

2.1.1 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Η συνάρτηση του Peano gt.* Θα κατασκευάσουμε μια συνεχή συνάρτηση f του μοναδιαίου διαστήματος I επί του τετραγώνου I^2. Η συνάρτηση αυτή θα προκύψει ως όριο μιας ακολουθίας συναρτήσεων $f_n : I \to I^2$, ως εξής:

Με P_1 θα συμβολίσουμε την διαίρεση του διαστήματος I σε 9 ίσα τμήματα μήκους $\frac{1}{9}$ και με Z_1 θα συμβολίζουμε την διαίρεση του τετραγώνου I^2 σε 9 ίσα τετράγωνα που το μήκος της κάθε ακμής τους είναι 1/3. Ορίζουμε την συνάρτηση $g : I \to I^2$ από τους τύπους:

$$\begin{array}{lll} g(0) = (0,0), & g(1/9) = (1/3,1/3), & g(2/9) = (0,2/3) \\ g(1/3) = (1/3,1), & g(4/9) = (2/3,2/3), & g(5/9) = (1/3,1/3) \\ g(2/3) = (2/3,0), & g(7/9) = (1/3,1/3), & g(8/9) = (2/3,2/3) \\ g(1) = (1,1) & & \end{array}$$

Στην συνέχεια επεκτείνουμε γραμμικά κατά τμήματα σε όλο το μοναδιαίο διάστημα I και η συνάρτηση g αποκτά τα εξής χαρακτηριστικά ώστε:

1. Κάθε τμήμα της υποδιαίρεσης P_1 γίνεται διαγώνιος σε κάποια τετραγωνική υποδιαίρεση της Z_1.

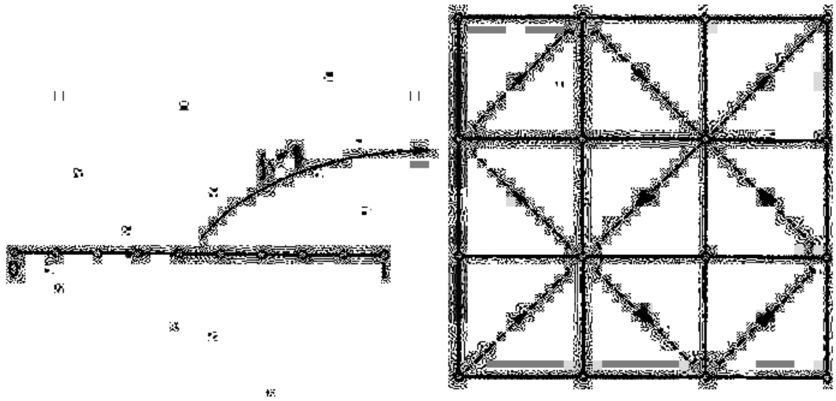
2. Κάθε τετραγωνική υποδιαίρεση της Z_1 έχει διαγώνιο που είναι εικόνα ενός τμήματος της υποδιαίρεσης P_1.

Ορίζουμε $f_1 = g$. Δεχόμαστε ότι μας δίνονται η υποδιαίρεση P_n του μοναδιαίου διαστήματος I σε 9^n ίσα τμήματα με μήκος το καθένα 9^{-n}, η υποδιαίρεση Z_n του τετραγώνου I^2 σε 9^n ίσα τετράγωνα πλευράς 3^{-n} κι οι συνεχείς συναρτήσεις (μετασχηματισμοί) $f_n : I \to I^2$ που έχουν τις εξής ιδιότητες:

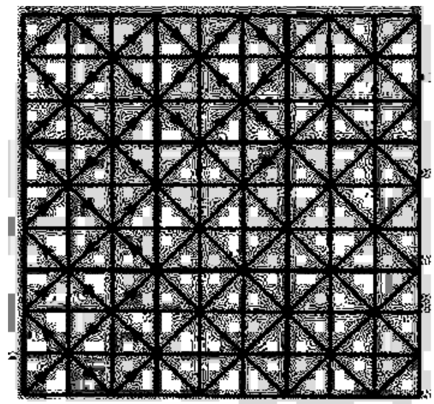
3. Κάθε τμήμα της υποδιαίρεσης P_n γίνεται διαγώνιος σε κάποια τετραγωνική υποδιαίρεση της Z_n.

...

4. Κάθε τετραγωνική υποδιαίρεση της Z_n έχει διαγώνιο που είναι εικόνα ενός τμήματος της υποδιαίρεσης P_n.



Σχήμα 26: Το πρώτο βήμα στην κατασκευή του Peano .



Σχήμα 27: Το δεύτερο βήμα της κατασκευής του Peano.

...

Θεωρούμε ένα τμήμα $[a, b]$ της υποδιαίρεσης P_n κι έστω ότι: $f_n(a) = (x_1, x_2)$, $f_n(b) = (y_1, y_2)$. Συμβολίζουμε με g_j την σύνθεση της συνάρτησης g με την στροφή του τετραγώνου I^2 γύρω από το κέντρο του κατά γωνία $\frac{1}{2}pj$, όπου το $j = 0, 1, 2, 3$. Για κάθε αριθμό r όπου $a \leq r \leq 1$, εκφράζεται:

$$f_{n+1}(r) = \begin{cases} (x^1, x^2) + 3^{-n}g_0(r), & an\, x^1 < y^1, \quad x^2 < y^2, \\ (y^1, x^2) + 3^{-n}g_1(r), & an\, y^1 < x^1, \quad x^2 < y^2, \\ (y^1, y^2) + 3^{-n}g_2(r), & an\, y^1 < x^1, \quad y^2 < x^2, \\ (x^1, y^2) + 3^{-n}g_3(r), & an\, x^1 < y^1, \quad y^2 < x^2, \end{cases}$$

Είναι τώρα εύκολο να αποδειχτεί ότι ο μετασχηματισμός $f_{n+1} : I \to I^2$, πληρεί τις συνθήκες 3. και 4. και είναι συνεχής. Από την κατασκευή της ακολουθίας των μετασχηματισμών προκύπτει ότι:

$$d(f_n(r), f_k(r)) \leq \frac{\sqrt{2}}{3^{n-1}} \tag{1}$$

για $k > n$ και $r \in I$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε αριθμό $r \in I$ η ακολουθία $\{f_n(r)\}$ πληρεί την συνθήκη Cauchy και συνεπώς συγκλίνει σε κάποιο σημείο του τετραγώνου I^2 (ο χώρος είναι πλήρης). Παίρνουμε $f(r) = lim_{n\to\infty} f_n(r)$.

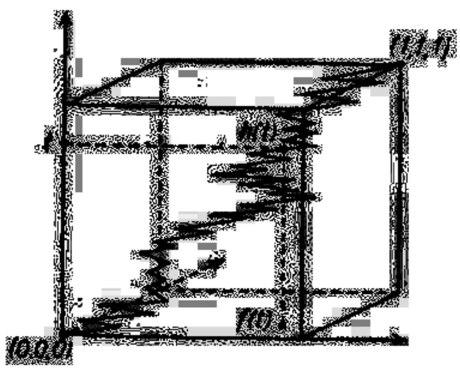
Εξ΄ αιτίας του ότι $d(f_n(r), f(r)) \leq 3^{-(n-1)}\sqrt{2}$ για $n = 1, 2, \ldots$ και $r \in I$ έχουμε ότι η ακολουθία των συναρτήσεων $\{f_n\}$ συγκλίνει στην f, δηλαδή για $r \in I, f(r) = lim_{n\to\infty} f_n(r)$ και η $f(r) : I \to I^2$ ονομάζεται *συνάρτηση ή μετασχηματισμός του Peano* . Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής ενώ οι προσεγγίσεις της από τις $\{f_n\}$ για $n = 1, 2, \ldots$ είναι όλο και πυκνότερες στο τετράγωνο I^2. Εξάλλου αφού ο χώρος I είναι συμπαγής θα είναι συμπαγής και ο $f(I)$, άρα: $f(I) = I^2$.

...

Μια ομοιομορφική εικόνα του μοναδιαίου διαστήματος $I = [0, 1]$ ονομάζεται *τόξο*.

...

2.1.2 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Με την βοήθεια της συνάρτησης του Peano μπορούμε να ορίσουμε ένα τόξο, που περιέχεται στον κύβο I^3 κι ενώνει τα σημεία $(0, 0, 0)$ και $(1, 1, 1)$, τέτοιο ώστε η προβολή του στη βάση του κύβου να είναι ολόκληρη η βάση (βλέπε Σχήμα 28). Πραγματικά,



Σχήμα 28: Το τόξο του παραδείγματος 2.1.2

βάση του I^3 είναι το τετράγωνο I^2 και $I^3 = I^2 \times I$ διότι ο n-διάστατος κύβος I^n ταυτίζεται με την n-στη καρτεσιανή δύναμη του διαστήματος I. Εστω,

$$h(t) = (f(t), t) \tag{2}$$

για $t \in I$. Εχουμε λοιπόν μια συνάρτηση $h : I \to I^3$, η οποία είναι 1-προς-1, δηλαδή διαφορετικά στοιχεία του πεδίου ορισμού απεικονίζονται σε σημεία σε διαφορετικές συντεταγμένες.

Η εικόνα $h(I)$ του διαστήματος I είναι το τόξο, το οποίο θέλουμε. Πραγματικά η ορθή προβολή του σημείου $h(t)$ στη βάση I^2 είναι το σημείο $f(t)$,άρα η προβολή του συνόλου $h(I)$ είναι το σύνολο $f(I) = I^2$. Για νάποδείξουμε ότι το $h(I)$ είναι τόξο αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $h : I \to h(I)$ είναι ομοιομορφισμός.

Ξέρουμε ότι είναι 1-προς-1 και πρέπει να δείξουμε ότι η συνάρτηση h και η αντίστροφη της h^{-1} είναι συνεχής. Αυτό προϋποθέτει ότι για κάθε ακολουθία t_0, t_1, t_2 ,..., t_n αριθμών του διαστήματος I η συνθήκη:

$$lim_{n\to\infty} t_n = t_0 \tag{3}$$

είναι ισοδύναμη με την συνθήκη:

$$lim_{n\to\infty} h(t_n) = h(t_0) \tag{4}$$

Ξέρουμε, ότι μια ακολουθία σημείων στο καρτεσιανό γινόμενο συγκλίνει αν και μόνο αν συγκλίνουν οι ακολουθίες των συντεταγμένων. Από τον ορισμό (2) η συνθήκη (4) ισχύει αν και μόνο αν:

$$lim_{n\to\infty} f(t_n) = f(t_0) \; kai \; lim_{n\to\infty} t_n = t_0 \tag{5}$$

Η πρώτη από τις δυο ισότητες είναι συνέπεια της δεύτερης, αφού η συνάρτηση f του Peano είναι συνεχής. Αρα, οι δυο ισότητες αληθεύουν αν και μόνο αν είναι αληθής η δεύτερη, δηλαδή ισχύει η (3). Επεται λοιπόν ότι οι συνθήκες (3) και (4) είναι ισοδύναμες.

§. 2.2 ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ ΤΟΥ CANTOR

2.2.1 *Γεωμετρική κατασκευή του συνόλου του Cantor* . Εστω ότι το I είναι το μοναδιαίο διάστημα του συνόλου των πραγματικών αριθμών που ορίζεται από την ισότητα:

$$I = \{x \in \Re : 0 \leq x \leq 1\}$$

Ας χωρίσουμε το διάστημα I σε 3 ίσα κομμάτια και ας αφαιρέσουμε το μεσαίο από αυτά, δηλαδή το διάστημα:

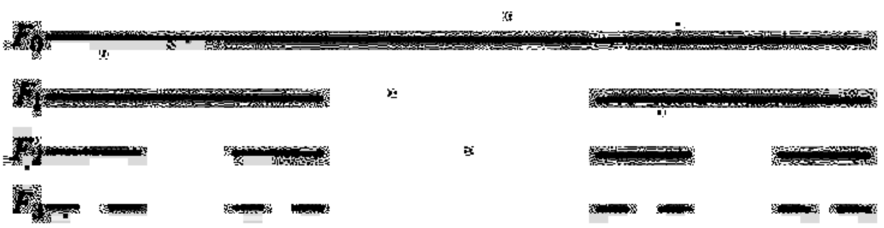
$$D_1 = \{x : \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}\}$$

Από το διάστημα I, θα μας μείνει ένα σύνολο, που είναι δύο νέων διαστημάτων με μήκος $\frac{1}{3}$ το καθένα:

$$\{x : 0 \leq x \leq \frac{1}{3}\}, \{x : \frac{2}{3} \leq x \leq 1\}$$

Με καθένα από τα διαστήματα αυτά κάνουμε το ίδιο που κάναμε και πιο πάνω με το I, δηλαδή το μοιράζουμε σε 3 ίσα κομμάτια και αφαιρούμε το μεσαίο (Σχήμα 29). Αφαιρέθηκε δηλαδή ένα υποσύνολο D_2 του διαστήματος I, που είναι ένωση δύο ξένων διαστημάτων με μήκος 1/3 το κάθε ένα:

$$D_2 = \{x : \frac{1}{9} < x < \frac{2}{9}\} \cup \{x : \frac{7}{9} < x < \frac{8}{9}\}$$



Σχήμα 29: Τα πρώτα βήματα κατασκευής του συνόλου του Cantor.

Μετά την αφαίρεση των συνόλων D_1, D_2 από το διάστημα I, μένει ένα μικρότερο σύνολο, που είναι η ένωση τεσσάρων διαστημάτων με μήκος $\frac{1}{9}$

το καθένα. Τα διαστήματα αυτά είναι:

$$\{x : 0 \leq x \leq \tfrac{1}{9}\}, \quad \{x : \tfrac{2}{9} \leq x \leq \tfrac{1}{3}\}$$
$$\{x : \tfrac{2}{3} \leq x \leq \tfrac{7}{9}\}, \quad \{x : \tfrac{8}{9} \leq x \leq 1\}$$

Για καθένα από τα τέσσερα διαστήματα συνεχίζουμε την ίδια διαδικασία. Αφαιρούμε ένα σύνολο D_3, που είναι ένωση τεσσάρων ξένων διαστημάτων με μήκος $\frac{1}{27}$ το καθένα. Θα μείνει μια ένωση 8 ξένων διαστημάτων, τα οποία είναι ίσα.

Η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί. Στο n-στο βήμα θα αφαιρεθεί ένα σύνολο D_n, το οποίο είναι ένωση 2^{n-1} ξένων ανά δύο διαστημάτων που το καθένα έχει μήκος $\frac{1}{3^n}$. Μετά το n-στο βήμα από το διάστημα I θα μείνει η ένωση 2^n διαστημάτων τα οποία είναι ξένα ανά δύο και το καθένα έχει μήκος $\frac{1}{3^n}$. Αποτέλεσμα της αφαίρεσης από το I όλων των συνόλων D_n με $n = 1, 2, \ldots$, θα είναι ένα σύνολο C που ονομάζεται *σύνολο του Cantor* . Το C ορίζεται από την ισότητα:

$$C = I - \cup_{n=0}^{\infty} D_n$$

Το σύνολο D_n είναι ένωση 2^{n-1} ξένων διαστημάτων μήκους $\frac{1}{3^n}$. Δηλαδή, το μέτρο του D_n είναι $\frac{2^{n-1}}{3^n}$. Επιπλέον, τα σύνολα D_n είναι ανά δύο ξένα. Από εδώ προκύπτει ότι το μέτρο του συνόλου C είναι:

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1 - \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1 - 1 = 0$$

άρα το σύνολο του Cantor έχει μέτρο μηδέν. Η ένωση:

$$D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$$

με το n να τείνει στο άπειρο, πληρώνει όλο και πιο πυκνά το διάστημα I και το μέτρο της τείνει στο 1. Αρα, κάθε διάστημα E που περιέχεται στο διάστημα I, πρέπει να έχει κοινά σημεία με τουλάχιστον ένα από τα σύνολα D_n, δηλαδή:

$$E \cap \cup_{i=1}^{\infty} D_n \neq \emptyset$$

απ΄ όπου συμπεραίνεται, ότι το διάστημα E δεν μπορεί να περιέχεται στο στο σύνολο C. Βλέπουμε ότι το σύνολο του Cantor δεν περιέχει κανένα διάστημα. Αυτό είναι και συνέπεια της παρατήρησης, ότι το σύνολο του Cantor έχει μέτρο μηδέν.

...

2.2.2 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Υπάρχουν στο διάστημα I σύνολα όμοια με το σύνολο του Cantor που δεν περιέχουν κανένα διάστημα, ενώ αντίθετα από το σύνολο Cantor έχουν θετικό μέτρο. Ενα τέτοιο σύνολο $H \subset I$, μπορούμε να κατασκευάσουμε , αν ακολουθήσουμε όμοια διαδικασία, όπως για το σύνολο του Cantor , με την διαφορά ότι τα διαστήματα που θα αφαιρεθούν, πρέπει να είναι μικρότερα - για παράδειγμα αντί για μήκος $\frac{1}{3^n}$ να έχουν μήκος $\frac{1}{5^n}$. Στο πρώτο βήμα θα μοιράσουμε το διάστημα I σε 5 κομμάτια και θα αφαιρεθεί το μεσαίο, από τα υπόλοιπα δύο διαστήματα, στο δεύτερο βήμα, θάφαιρέσουμε δυο διαστήματα με μήκος $\frac{1}{25}$ το καθένα κ.ο.κ. Τα διαστήματα τα οποία μένουν μετά το n-στο βήμα, έχουν τώρα μεγαλύτερο μήκος από τα διαστήματα, τα οποία αφαιρέθηκαν στο n-το βήμα, κάτι που δεν συνέβαινε στην κατασκευή του συνόλου του Cantor . Τελικά έχουμε ένα σύνολο H με μέτρο:

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{5^n} = \frac{2}{3}$$

μπορούμε όμως να αποδείξουμε, ότι το σύνολο H δεν περιέχει κανένα διάστημα.

...

2.2.3 *Το σύνολο του Cantor ως ανάπτυγμα.* Τα στοιχεία του συνόλου Cantor είναι πραγματικοί αριθμοί του διαστήματος I. Τι ανάπτυγμα έχουν στο τριαδικό σύστημα· Αν χρησιμοποιήσουμε το 3-δικό σύστημα αντί του 10-δικού μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε μια συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί ο πραγματικός αριθμός $a \in I$, για νάνήκει στο σύνολο C. Κάθε αριθμός $a \in I$ έχει ένα ανάπτυγμα σε τριαδικό κλάσμα

$$a = (0, a_1 a_2 \dots)_3$$

όπου a_n =0,1 ή 2 για $n = 1, 2, \dots$. Αυτό σημαίνει ότι:

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$$

Από την κατασκευή του συνόλου Cantor έχουμε ότι το a είναι στοιχείο του C αν και μόνο αν το a έχει ανάπτυγμα τέτοιο ώστε είτε $a_n = 0$ ή $a_n = 2$.

2.3 ΚΛΙΜΑΚΩΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

Θα κατασκευάσουμε μια συνεχή συνάρτηση f του συνόλου του Cantor C επί του μοναδιαίου διαστήματος I. Αν ο αριθμός $r \in C$ έχει στο τριαδικό σύστημα το ανάπτυγμα: $r = \sum_{i=1}^{\infty} r_i 3^{-i}$ όπου $r_i \neq 1$, για $i = 1, 2, \ldots$ παίρνουμε το $f(r) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} r_i 2^{-i}$. Εχουμε προφανώς $0 \leq f(r) \leq 1$, για κάθε $r \in C$.

Θάποδείξουμε, ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής. Εστωσαν $r = \sum_{i=1}^{\infty} r_i 3^{-i}$, $r' = \sum_{i=1}^{\infty} r'_i 3^{-i}$ και $e > 0$. Εκλέγουμε ένα φυσικό αριθμό k τέτοιον ώστε $2^{-k} < e$. Αν $|r - r'| < 3^{-k}$ όπου $r_i = r'_i$ για $i = 1, 2, \ldots, k$ έχουμε ότι $|f(r) - f(r')| \leq \frac{1}{2}\sum_{i=k+1}^{\infty} |r_i - r'_i| 2^{-i} \leq 2^{-k} < e$.

Για κάθε αριθμό $s \in I$ θεωρούμε το ανάπτυγμα του $s = \sum_{i=1}^{\infty} s_i 2^{-i}$ στο δυαδικό σύστημα, όπου s_i είναι 0 ή 1 για $i = 1, 2, \ldots$. Αν δεχτούμε ότι $r_i = 2s_i$ έχουμε $r_i = 0, 2$ για $i = 1, 2, \ldots$, άρα

$$s = \sum_{i=1}^{\infty} s_i 2^{-i} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} r_i 2^{-i} = f(r)$$

όπου $r = \sum_{i=1}^{\infty} r_i 3^{-i} \in C$. Αρα $f(C) = I$.

Η συνάρτηση $f : C \to I$ έχει ως φυσική επέκταση την $f^* : I \to I$, την οποία περιγράφουμε. Παρατηρούμε ότι αν r' είναι αριστερό και r'' δεξιό άκρο ενός διαστήματος από εκείνα που αφαιρούμε κατά το n-οστό βήμα της κατασκευής του συνόλου του Cantor , έχουμε το ανάπτυγμα:

$$r' = \sum_{i=1}^{n-1} r_i 3^{-i} + 2\sum_{i=n+1}^{\infty} 3^{-i}$$

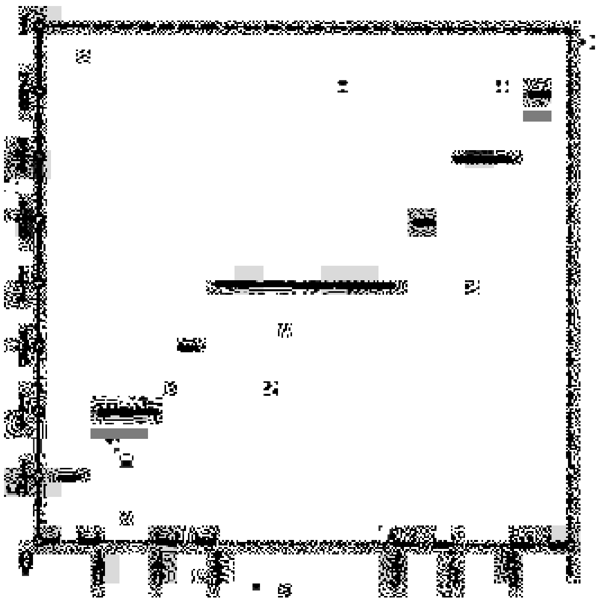
και

$$r'' = \sum_{i=1}^{n-1} r_i 3^{-i} + 2 \cdot 3^{-n}$$

όπου $r_i \neq 1$ για $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Σε αυτή την περίπτωση

$$f(r') = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} r_i 2^{-i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-i} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} r_i 2^{-i} + 2^{-i} = f(r'')$$

άρα $f(r') = f(r'')$. Θέτουμε $f^*(r) = f(r') = f(r'')$ για $r' \leq r \leq r''$, όπου r', r'' είναι άκρα διαστημάτων από εκείνα που αφαιρέθηκαν κατά την κατασκευή του συνόλου κι επιτυγχάνουμε τις συνθήκες επέκτασης $f^* : I \to I$ της συνάρτησης $f : C \to I$. Από την μορφή που παίρνει το διάγραμμα της f^* προέρχεται το όνομά της *κλιμακωτή συνάρτηση* που συχνά το χρησιμοποιούμε και για τη συνάρτηση περιορισμό $f : f^*|C$. Από την συνάρτηση αυτή φαίνεται ότι το σύνολο του Cantor είναι υπεραριθμήσιμο.



Σχήμα 30: Το γράφημα της κλιμακωτής συνάρτησης.

...

2.3.1. ΣΗΜΕΙΩΣΗ. Ενας άλλος τρόπος να το δούμε είναι ο εξής. Αποδίδουμε το σύμβολο 0 στο I. Επειτα προχωρούμε στην κατασκεύη του συνόλου C αφαιρώντας το εσωτερικό τμήμα. Αποδίδουμε τα σύμβολα 00 και 01 για το αριστερό, αντίστοιχα δεξιό εναπομένον τμήμα του I. Στο επόμενο τμήμα έχουμε τέσσερα τμήματα με τους συμβολισμούς 000, 001, 010,011. Η πορεία κατασκευής του C οδηγεί έτσι στην κατασκευή ενός δυαδικού δένδρου. Η τελική απόληξη του δενδρου δεν είναι άλλη από το C σε κάθε στοιχείο του οποίου έχουμε αντιστοιχίσει έναν πραγματικό αριθμό του διαστήματος I μέσω της γραφής του στο δυαδικό σύστημα. Εύκολα τώρα βλέπουμε πως η αντιστοιχία αυτή είναι 1-1 και επί (όχι συνεχής) αφού με τα ίδια σύμβολα μπορούμε να γράψουμε όλους τους αριθμούς το $[0,1]$.

Εξάλλου πρέπει να σημειωθεί ότι τα σημεία του συνόλου του Cantor δεν είναι μόνο εκείνα που προέρχονται από τα άκρα των διαστημάτων που αφαιρέθηκαν. Αυτά προκύπτουν από τη διαδικασία της αφαίρεσης που επιτελείται σε αριθμήσιμα βήματα και είναι αριθμήσιμα στο πλήθος.

...

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

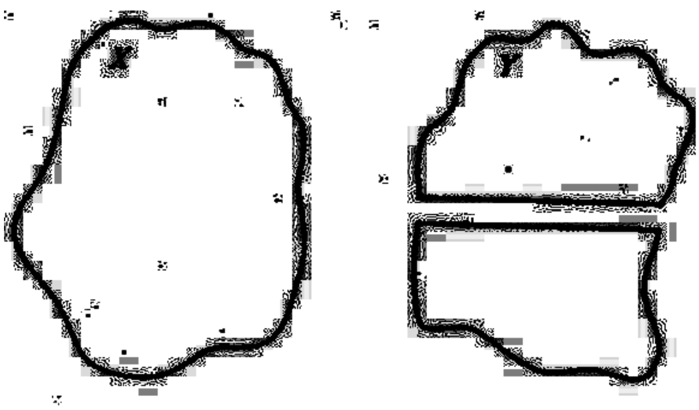
1) Πώς δικαιολογείται η ύπαρξη άλλων σημείων εκτός εκείνων που προέρχονται από τα άκρα των διαστημάτων που αφαιρέθηκαν και πώς προκύπτουν·

2) Εστω $D = \{0,1\}$ ο διακριτός χώρος των δυο σημείων. Τότε ισχύει ότι: $D^{\aleph_0} = C$ όπου Σ το σύνολο του Cantor .

§2.4 Η ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

Ενας τοπολογικός χώρος Q είναι *συνεκτικός* αν δεν μπορεί να εκφρασθεί ως ένωση δυό ξένων, κλειστών και μη κενών συνόλων. Ενας χώρος Q είναι μη συνεκτικός αν υπάρχει *αποσύνθεση (χωρισμός)* του $X = A \cup B$ σε δυο ξένα, κλειστά και μη κενά στο Q σύνολα A, B. Για παράδειγμα το σύνολο $\mathfrak{R} \setminus \{0\}$ δεν είναι συνεκτικό, αφού μπορεί να γραφεί ως ένωση $\mathfrak{R} \setminus \{0\} = A \cup B$ όπου $A = \{r \in \mathfrak{R} : r > 0\}$ $B = \{r \in \mathfrak{R} : r < 0\}$.

Ενα άλλο παράδειγμα μη συνεκτικού χώρου είναι ο διακριτός μετρικός χώρος με τουλάχιστον δυο στοιχεία. Αφού κάθε υποσύνολο ενός τέτοιου χώρου είναι κλειστό η απαίτηση της αποσύνθεσης μπορεί να εξασφαλισθεί



Σχήμα 31: Ενας συνεκτικός χώρος X και ένας μη συνεκτικός χώρος Y.

αν πάρουμε ένα τυχαίο σημείο και το συμπλήρωμά του. Επίσης έχουμε το επόμενο Θεώρημα.

2.4.1 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Για να είναι ένας μετρικός χώρος μη συνεκτικός είναι αναγκαίο κι ικανό να υπάρχει συνεχής συνάρτηση του χώρου επί του διακριτού χώρου των δυο σημείων* $D = \{a, b\}$.□

...

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Υποθέτουμε ότι $X = A \cup B$ όπου $A = cl(A) \neq \emptyset \neq B = cl(B)$ και $A \cap B = \emptyset$. Εστω ότι $D = \{a, b\}$. Η συνάρτηση g του χώρου Q επί του χώρου D που ορίζεται από τον τύπο:

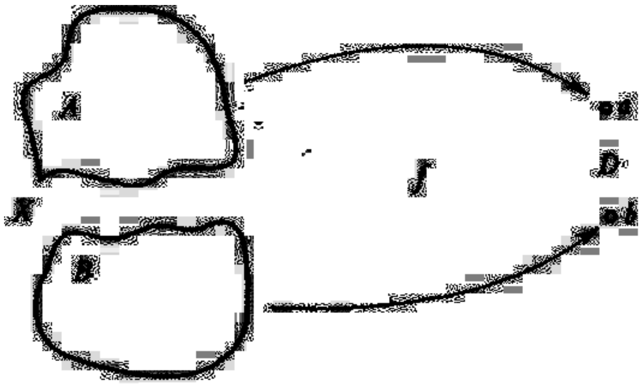
$$g(x) = \begin{cases} a, & an\ x \in A \\ b, & an\ x \in B, \end{cases}$$

είναι συνεχής από το Θεώρημα 1.5.4, αφού η αντίστροφη εικόνα κλειστών συνόλων του χώρου D είναι κλειστό στο Q.

Αντιστρόφως, αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση g του χώρου Q επί του χώρου D, τότε θέτουμε $A = g^{-1}(a)$ και $B = g^{-1}(b)$ κι επιτυγχάνουμε μια αποσύνθεση $X = A \cup B$ όπου $clA = A \neq \emptyset = clB$ και $A \cap B = \emptyset$.□

...

Παρατηρούμε επίσης ότι αν $X = A \cup B$ με $A \cap B = \emptyset$, τότε τα σύνολα A και B είναι μεταξύ τους συμπληρωματικά και άρα είναι και τα δυο κλειστά αν είναι και τα δυο ανοικτά. Μπορούμε έτσι νάντικατασταστήσουμε την λέξη κλειστό στον ορισμό με την λέξη ανοικτό. Για τον ίδιο λόγο ένας χώρος Q



Σχήμα 32: Ο χώρος X είναι μη συνεκτικός όταν υπάρχει συνεχής συνάρτηση επί ενός διακριτού χώρου δυο σημείων (Θεώρημα 2.4.1).

είναι μή συνεκτικός αν και μόνο αν περιέχει ένα γνήσιο μή κενό υποσύνολο που να είναι ανοικτό και κλειστό συγχρόνως. Ενώ σ΄ έναν συνεκτικό χώρο Q τα μόνα κλειστά και ανοικτα συγχρόνως υποσύνολα του είναι το κενό και το ίδιο το Q.

Παρατηρούμε ότι κατά τον ορισμό του συνεκτικού χώρου απαιτήσαμε να μην υπάρχει αποσύνθεση $X = A \cup B$ όπου τα σύνολα A και B να ικανοποιούν τρεις συνθήκες:

1. $A \neq \emptyset \neq B$,

2. $A = clA, B = clB$,

3. $A \cap B = \emptyset$

...

Σημειώνουμε ότι η έννοια του συνεκτικού συνόλου που ωφείλεται στον *C. Jordan* (1893) απέβη καρποφόρος για τα μαθηματικά. Για νάποδείξουμε ότι ένας χώρος Q είναι συνεκτικός συχνά δεχόμαστε ότι ισχύει το αντίθετο κι ότι δίδεται η αποσύνθεση $X = A \cup B$, όπου τα σύνολα A και B ικανοποιούν δυο οποιεσδήποτε από τις παραπάνω τρεις συνθήκες και καταλήγουμε σε αντίφαση προς την τρίτη από αυτές.

2.4.2 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Το μοναδιαίο διάστημα είναι συνεκτικός χώρος.* Υποθέτουμε ότι υπάρχει η αποσύνθεση $I = A \cup B$, όπου $clA = A \neq \emptyset \neq B = clB$.

Είναι δυνατόν να υποθέσουμε ότι $1 \in B$. Εστω ότι $a = supA$, είναι πραγματικός αριθμός. Αφού το σύνολο A είναι κλειστό στο διάστημα I και το διάστημα είναι κλειστό μέσα στους πραγματικούς αριθμούς $\Re$, προκύπτει ότι A είναι κλειστό υποσύνολο της πραγματικής ευθείας $\Re$. Από το Λήμμα 1.5.20 συμπεραίνουμε ότι $a \in A$. Αν $a = 1$, τότε $A \cap B \neq \emptyset$ κι η απόδειξη είναι πλήρης. Υποθέτουμε τώρα $a < 1$. Τότε το σύνολο $\{x \in B : a < x\}$ δεν είναι κενό. Επίσης είναι κλειστό σύνολο της πραγματικής ευθείας $\Re$ αφού αν $x_n \in B$ και $a < x_n$ για $n = 1, 2, \ldots$ και $lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \in \Re$, τότε $x_0 \in B$ και $a \leq x_0$ και άρα $a < x_0$. Θέτουμε $b = inf\{x \in B : a < x\}$. Αρα από το Λήμμα 1.5.20 προκύπτει ότι $b \in B$. Προφανώς $0 \leq a < b \leq 1$ κι επιπλέον κανένας πραγματικός αριθμός του διαστήματος (a, b) δεν μπορεί να ανήκει είτε στο σύνολο A ή στο σύνολο B το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση $I = A \cup B$.□

Η έννοια του συνεκτικού χώρου ανήκει όχι μόνο στην μετρική γεωμετρία αλλά επίσης στην τοπολογία.

2.4.3 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση ενός συνεκτικού χώρου Q επί ενός χώρου U, τότε ο U είναι επίσης συνεκτικός.*

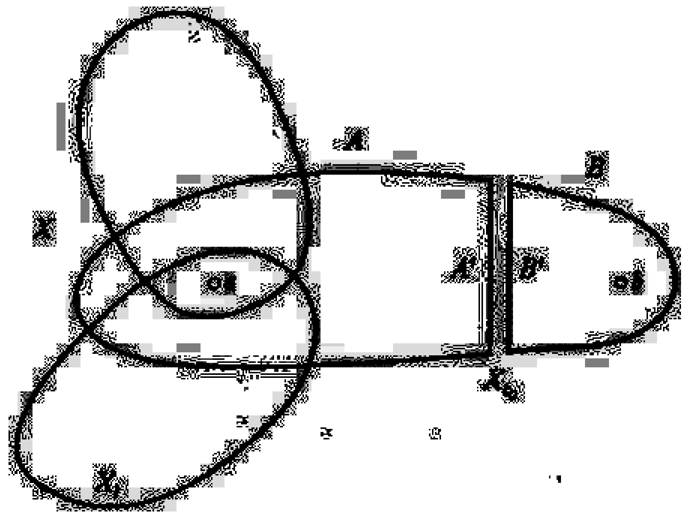
ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Δεχόμαστε ότι ο U δεν είναι συνεκτικός. Από το Θεώρημα 2.4.1 υπάρχει συνεχής συνάρτηση g του χώρου U επί του διακτριτού χώρου των δυο σημείων Δ. Η σύνθεση gf είναι συνεχής συνάρτηση του χώρου Q επί του D το οποίο είναι αδύνατο καθόσον δεχθήκαμε ότι ο Q είναι συνεκτικός χώρος. □

2.4.4 ΠΟΡΙΣΜΑ. *Κάθε ευθύγραμμο τμήμα του Ευκλειδίου χώρου $\Re^n$ είναι συνεκτικό ξώρος.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν $a, b \in \Re^n$, τότε η συνεχής συνάρτηση f ορίζεται από τον τύπο $f(r) = (1 - r)a + rb$ για $r \in I$ απεικονίζει το διάστημα I επί του διαστήματος ab.□

Η ένωση συνεκτικών χώρων ενός δεδομένου μετρικού χώρου δεν είναι πάντα συνεκτικός χώρος. Ισχύει το Θεώρημα.

2.4.5 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν $X = \bigcup_{t\in T} X_t$, όπου κάθενας από τους υπόχωρους Q_t είναι συνεκτικός, για $t \in T$ και $\bigcap_{t\in T} X_t \neq \emptyset$, τότε ο χώρος Q είναι συνεκτικό.*



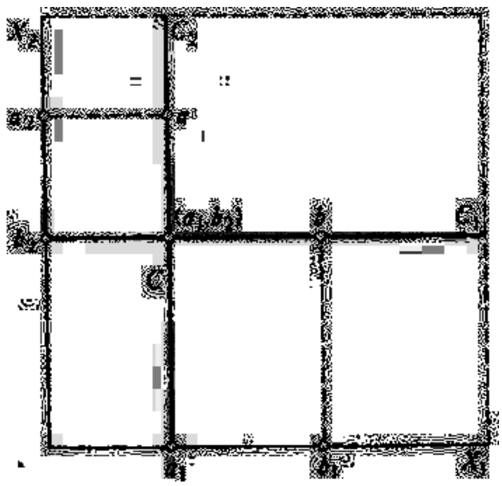
Σχήμα 33: Περιγραφή της απόδειξης του Θεωρήματος 2.4.5.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Υποθέτουμε ότι Q είναι μή συνεκτικός χώρος και $X = A \cup B$, όπου $clA = A \neq \emptyset \neq B = clB$ και $A \cap B = \emptyset$. Εστω ότι $a \in \bigcap_{t \in T} X_t$. Μπορούμε φυσικά να υποθέσουμε ότι $a \in A$. Θεωρούμε ένα σημείο $b \in B$ κι υποθέτουμε $b \in X_{t_0}$. Θέτουμε $A' = A \cap X_{t_0}$ και $B' = B \cap X_{t_0}$. Αφού $a \in A'$ και $b \in B'$ παρατηρούμε ότι αυτά τα δυο σύνολα είναι μή κενά. Επιπλέον $A' \cup B' = (A \cup B) \cup \cap X_{t_0} = X_{t_0}$ και $A' \cap B' = A \cap B \cap X_{t_0} = \emptyset$. Από το Θεώρημα 1.5.18 τα σύνολα A' και B' είναι κλειστά στον X_{t_0}. Ο υπόχωρος X_{t_0} θα ήταν έτσι μή συνεκτικό και με την αντίφαση αυτή ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

2.4.6 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν σ'ενα μετρικό χώρο Q για κάθε δυο σημεία υπάρχει συνεκτικός υπόχωρος που τα περιέχει, τότε ο χώρος Q είναι συνεκτικός.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε ένα σταθερό σημείο $a \in X$ και για κάθε σημείο $b \in X$ ας συμβολίσουμε με $C(b)$ ένα συνεκτικό υπόχωρο του Q που περιέχει και τα δυο σημεία a και b. Τότε $Q = \bigcup_{b \in X} C(b)$ και η Πρόταση προκύπτει από το προηγούμενο Θεώρημα, αφού $a \in \bigcap_{b \in X} C(b) \neq \emptyset$.□

2.4.7 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Από το Πόρισμα 2.4.4 και το Θεώρημα 2.4.6 έχουμε ότι οι χώροι που ακολουθούν είναι συνεκτικοί: Ο χώρος $\Re^n$, (κάθε κλειστός ή ανοικτός) ημίχωρος του χώρου $\Re^n$, κάθε γραμμικός χώρος $\Re^n$, κάθε n-διάστατος κύβος, κάθε n-διάστατη σφαίρα (ανοικτή ή κλειστή). Ιδιαίτερα η πραγματική ευθεία $\Re$ και η ημιευθεία $\Re_+$ είναι συνεκτικοί χώροι. □



Σχήμα 34: Περιγραφή για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.8

2.4.8 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Το μετρικό γινόμενο πεπερασμένου αριθμού συνεκτικών χώρων είναι συνεκτικός χώρος*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από την Πρόταση 1.2.14 είναι αρκετό νάποδείξουμε την περίπτωση του μετρικού γινομένου δυο συνεκτικών χώρων. Ετσι υποθέτουμε ότι $X = X_1 \times X_2$ όπου Q_1 και Q_2 είναι συνεκτικοί χώροι. Εστω ότι $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ είναι δυο οποιαδήποτε σημεία του χώρου Q. Θέτουμε

$$C_1 = \{(x_1, b_2) \in X : x_1 \in X_1\} \; kai \; C_2 = \{(a_1, x_2) \in X : x_2 \in X_2\}$$

Η απεικόνιση που αποδίδει ένα σημείο $x_1 \in X_1$ στο σημείο $(x_1, b_2) \in C_1$ είναι μια ισομετρία, άρα συμπεραίνουμε ότι το C_1 είναι συνεκτικό. Ομοια βλέπουμε ότι C_2 είναι συνεκτικό. Οι δυο υπόχωροι έχουν το σημείο (a_1, b_2) από κοινού, άρα από το Θεώρημα 2.4.8 η ένωση $C = C_1 \cup C_2$ είναι συνεκτικός χώρος. Αλλά $a \in C_2$ και $b \in C_1$ άρα $a, b \in C$. Αρα από το Θεώρημα 2.4.5 προκύπτει ότι ο Q είναι συνεκτικός. □

...

Από το Θεώρημα 2.4.5 επίσης προκύπτει το επόμενο.

2.4.9 ΠΟΡΙΣΜΑ. *Η* $(n-1)$*-διάστατη μοναδιαία σφαίρα* S^{n-1} *είναι ένας συνεκτικός χώρος για κάθε* $n > 1$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εστω ότι $a = (0, \dots, 1), b = (0, \dots, -1) \in S^{n-1}$. Από το Παράδειγμα 1.2.22 κάθ'ενα από τα σύνολα $S^{n-1}\backslash\{a\}$ και $S^{n-1}\backslash\{b\}$ είναι ομοιομορφικά προς το $\Re^{n-1}$ και άρα συνεκτικό. Αν $n > 1$, τότε $(S^{n-1}\backslash\{a\}) \cap (S^{n-1}\{b\}) \neq \emptyset$, άρα το $S^{n-1} = (S^{n-1}\backslash\{a\}) \cup (S^{n-1}\backslash\{b\})$ είναι συνεκτικό. Η 0-διάστατη σφαίρα S^0 είναι προφανώς μή συνεκτική. □

...

Αν $A \subset X$ όπου Q είναι ένας δεδομένος μετρικός χώρος, τότε λέγοντας ότι το σύνολο A είναι *συνεκτικό* ή *μή συνεκτικό* σιωπηρά δεχόμαστε το A ως μετρικό υπόχωρο του χώρου Q. Ενα ανοικτό συνεκτικό υποσύνολο ενός μετρικού χώρου ονομάζεται *χωρίο* του χώρου. Για παράδειγμα, τα χωρία πάνω στην πραγματική ευθεία $\Re$ έχουν τις εξής μορφές: ολόκληρη η ευθεία, η ανοικτή ημιευθεία, το ανοικτό διάστημα, το κενό σύνολο. Σ'ενα διακριτό μετρικό χώρο τα μόνα χωρία είναι τα μονοσύνολα και το κενό σύνολο.

...

2.4.10 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν A είναι ένα συνεκτικό υποσύνολο του μετρικού χώρου Q, τότε η θήκη clA του συνόλου A στον χώρο Q είναι επίσης συνεκτικό σύνολο.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν ο υπόχωρος clA δεν ήταν συνεκτικός, τότε από το Θεώρημα 2.4.1 θα υπήρχε μια συνάρτηση f του υπόχωρου επί του διακριτού χώρου των δυο σημείων $D = \{a, b\}$. Αφού $f \mid A$ είναι συνεχής και ο υπόχωρος A είναι συνεκτικός, έχουμε από το ίδιο Θεώρημα ότι $f(A)$ είναι γνήσιο υποσύνολο του D. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $f(A) = \{a\}$. Τότε από τον ορισμό της θήκης του συνόλου A και από την συνέχεια της συνάρτησης f έχουμε ότι $f(clA) = \{a\}$. Φθάσαμε λοιπόν στην αντίφαση που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

...

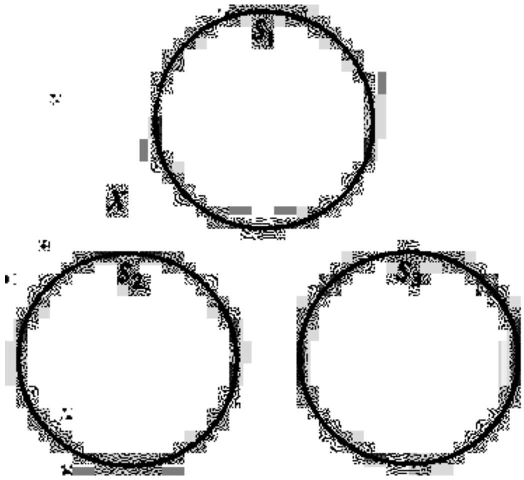
Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι το εσωτερικό ενός συνεκτικού χώρου δεν είναι πάντα συνεκτικός χώρος.

2.4.11 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Εστω ότι $A = \{(x_1, x_2) \in \Re^2 : x_1 x_2 \geq 0\}$. Αφού κάθε σημείο του A μπορεί να συνδεθεί με την αρχή των αξόνων με ένα ευθύγραμμο τμήμα στο A, έχουμε ότι το A είναι συνεκτικό. Το εσωτερικό του συνόλου σε σχέση με το επίπεδο $\Re^2$ είναι το σύνολο $\{(x_1, x_2) \in \Re^2 :$

$x_1x_2 > 0\}$ κι είναι εύκολο να δούμε ότι είναι μη συνεκτικό. □

...

Εστω ότι Q είναι ένας μετρικός χώρος. Ενα υποσύνολο S του χώρου Q το οποίο είναι είναι συνεκτικό και *μέγιστο* ως προς την ιδιότητα αυτή (δηλαδή δεν είναι υποσύνολο ενός άλλου συνεκτικού υποσυνόλου του Q), ονομάζεται *συνιστώσα* του χώρου Q. Με άλλα λόγια, ένα σύνολο $S \subset X$ είναι συνιστώσα του χώρου αν είναι συνεκτικό και για κάθε συνεκτικό σύνολο $C \subset X$ που ικανοποιεί την σχέση $S \subset C$ έχουμε ότι $S = C$.



Σχήμα 35: Οι συνιστώσες S_1, S_2 και S_3 του χώρου X.

...

2.4.12 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Κάθε απομονωμένο σημείο ενός μετρικού χώρου αποτελεί συνιστώσα. Ιδιαίτερα κάθε σημείο ενός διακριτού χώρου είναι μια συνιστώσα. □

2.4.13 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Οι συνιστώσες ενός χώρου είναι ανά δυο ξένες.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν S' και S'' είναι συνιστώσες του χώρου Q, όπου $S' \neq S''$ και $p \in S' \cap S''$, τότε από το Θεώρημα 2.4.5 η ένωση $S = S' \cup S''$ είναι συνεκτικός χώρος. Από την ιδιότητα της μεγιστότητας του S' και του S'' συμπεραίνουμε ότι $S' = S = S''$.□

...

2.4.14 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Κάθε μετρικός χώρος είναι η ένωση των συνιστωσών του.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας θεωρήσσουμε ένα σημείο $p \in X$ κι ας συμβολίσουμε με S_p την ένωση των συνεκτικών υποχώρων του χώρου Q που περιέχουν το σημείο p. Από το Θεώρημα 2.4.5 ο υπόχωρος S_p είναι συνεκτικός κι οπωσδήποτε μέγιστος ως προς την ιδιότητα αυτή, κατά συνέπεια είναι η συνιστώσα του Q που περιέχει το σημείο p.□

...

2.4.15 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Για να ανήκουν δυο σημεία μετρικού χώρου στην αυτή συνιστώσα, είναι αναγκαίο κι ικανό να υπάρχει ένας συνεκτικός υπόχωρος που να περιέχει τα σημεία.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το αναγκαίο είναι προφανές. Για το ικανό παρατηρούμε ότι αν συμβολίσουμε S_a την συνιστώσα του χώρου Q που περιέχει το σημείο a και αν C είναι ένας συνεκτικός υπόχωρος που περιέχει τα σημεία a και b, τότε $C \subset S_a$ απ'οπου έπεται ότι $b \in S_a$.□

2.4.16 ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ενας μετρικός χώρος είναι συνεκτικός αν και μόνο αν έχει μια συνιστώσα ακριβώς.* □

Από το Θεώρημα 2.4.10 προκύπτει και το επόμενο Πόρισμα.

2.4.17 ΠΟΡΙΣΜΑ. *Η συνιστώσα ενός χώρου Q είναι κλειστό σύνολο.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Αν A είναι μια συνιστώσα του χώρου Q, τότε η θήκη, clA, που είναι συνεκτικό σύνολο A, ικανοποιεί την εξίσωση $A = clA$.□

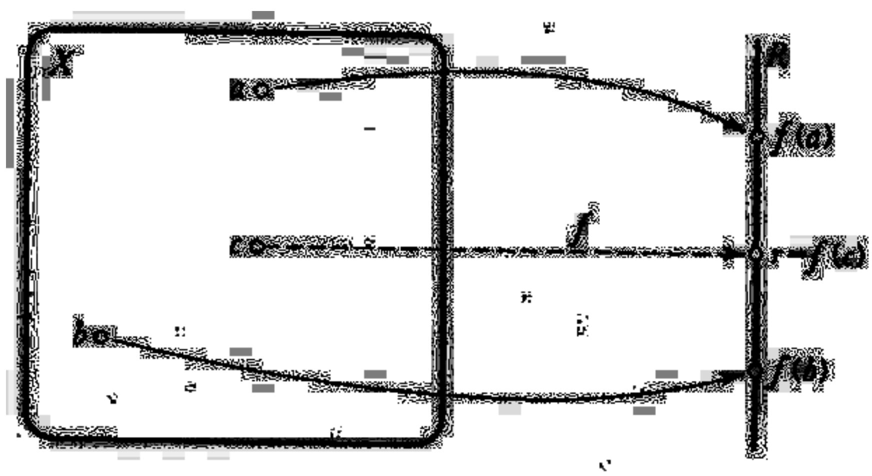
...

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι οι συνιστώσες ενός χώρου δεν είναι πάντα ανοικτά σύνολα.

2.4.18 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Εστω ότι ο $X = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{1/n\} \cup \{0\}$ είναι μετρικός υπόχωρος της πραγματικής ευθείας $\Re$. Το σύνολο $\{0\}$ είναι η συνιστώσα του χώρου Q αλλά δεν είναι ανοικτό στο Q.□

2.4.19 ΘΕΩΡΗΜΑ (λτ Δαρβουξ). *Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση με τιμές πραγματικές επί ενός συνεκτικού χώρου Q, τότε για κάθε δυο σημεία $a, b \in X$ και κάθε πραγματικό αριθμό $r \in \Re$ που ικανοποιεί την ανισότητα $f(a) \leq r \leq f(b)$ υπάρχει ένα σημείο $c \in X$ τέτοιο ώστε $f(c) = r$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Από το Θεώρημα 2.4.3 ο υπόχωρος $f(X) \subset \Re$ είναι συνεκτικός. Αν υπάρχει αριθμός $r \neq f(X)$ που να ικανοποιεί $f(a) < r < f(b)$, τότε θέτοντας $A = \{y \in f(X) : y \leq r\}$ και $B = \{y \in f(X) : y \geq r\}$ επιτυγχάνουμε



Σχήμα 36: Μια συνεχής συνάρτηση ορισμένη σ'ενα συνεκτικό χώρο λαμβάνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ δυο οποιονδήποτε τιμών της εικόνας (Θεώρημα 2.4.19).

δυο ξένα μεταξύ τους σύνολα τα οποία είναι κλειστά στο $f(X)$ και μή κενά διότι $f(a) \in A$ και $f(b) \in B$. Το ότι η ένωσή τους είναι το $f(X)$ έρχεται σε αντίφαση με την συνεκτικότητα. Από αυτό έπεται ότι κάθε πραγματικός αριθμός r που ικανοποιεί τις ανισότητες $f(a) \leq r \leq f(b)$ ανήκει στο $f(X)$, το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη. □

...

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να δείξετε ότι ο χώρος του Hilbert $\Re^{\omega}$ και ο κύβος του Hilbert I^{ω} είναι συνεκτικοί χώροι.

2) Να δείξετε ότι αν ένα μετρικό γινόμενο είναι ένας μή κενός συνεκτικός χώρος, τότε όλοι οι παράγοντές του είναι συνεκτικοί.

3) Νάποδείξετε ότι αν $X = \bigcup_{t \in T} X_t$, όπου για κάθε $t \in T$ ο υπόχωρος X_t είναι συνεκτικός κι υπάρχει ένας δείκτης t_0 τέτοιος ώστε για όλα τα $t \in T, X_t \cap X_{t_0} \neq \emptyset$, τότε ο χώρος Q είναι συνεκτικός.

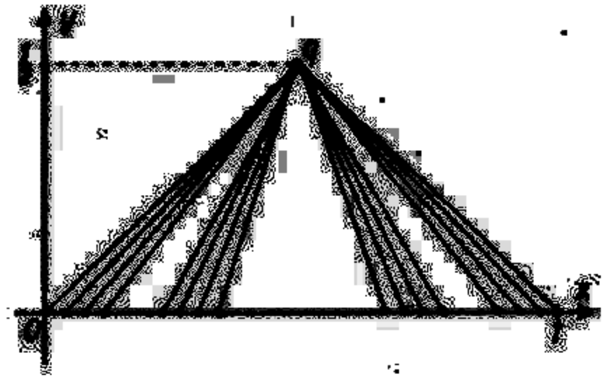
4) Νάποδείξετε ότι αν A είναι ένας συνεκτικός υπόχωρος ενός μετρικού χώρου Q και $A \subset B \subset clA$, τότε το B αποτελεί συνεκτικό χώρο.

5) Δώστε ένα παράδειγμα συνάρτησης $f : \Re \to \Re$ η οποία αποδίδει τους

συνεκτικούς υπόχωρους σε συνεκτικούς υπόχωρους αλλά που να μην είναι συνεχής.

§2.5 ΔΙΣΥΝΕΚΤΙΚΟ ΤΩΝ KNASTER - KURATOWSKI

2.5.1 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Το δισυνεκτικό σύνολο των Knaster-Kuratowski* : Το σύνολο του Cantor μπορούμε να το φανταστούμε να περιέχεται στο μοναδιαίο διάστημα του άξονα των x του επιπέδου.



Σχήμα 37: Η σκούπα του Cantor.

Ας ενώσουμε κάθε σημείο $c \in C$ με το σημείο:

$$q = (1/2, 1/2)$$

με ένα ευθύγραμμο τμήμα L_c. Το τμήμα L_c έχει άκρα στα σημεία c και q. Η ένωση:

$$L = \bigcup_{c \in C} L_c$$

όλων των τμημάτων L_c, καλείται *σκούπα του Cantor* (βλέπε στο Σχήμα 37) κι είναι συνεκτικό σύνολο, ως ένωση συνεκτικών συνόλων L_c, το καθένα από τα οποία περιέχει το σημείο q. Συμβολίζουμε με R το σύνολο που σχηματίζεται από τα άκρα όλων των διαστημάτων τα οποία αφαιρέθηκαν κατά την κατασκευή του συνόλου του Cantor (βλέπε. 2.3.1). Με άλλα λόγια το R είναι το σύνολο με τα άκρα των διαστημάτων-συνεκτικών συνιστωσών του συνόλου $E - C$. Κατά την κατασκευή του C αφαιρέθηκε αριθμήσιμο πλήθος διαστημάτων, άρα το σύνολο R είναι αριθμήσιμο. Το R είναι πυκνό στο σύνολο του Cantor . Ας δεχτούμε τον συμβολισμό

$$W = C - P$$

Το δισυνεκτικό σύνολο των Knaster-Kuratowski ορίζεται ως το υποσύνολο K της σκούπας του Cantor , που αποτελείται από τα σημεία (x, y) των τμημάτων L_c για τα οποία η τεταγμένη y είναι ρητός αριθμός όταν $c \in P$ κι άρρητος όταν $c \in W$.

Δηλαδή παίρνουμε, από τα τμήματα L_c που βγαίνουν από το R, τα σημεία με ρητή τεταγμένη και από τα τμήματα L_c που βγαίνουν από το W τα σημεία με άρρητη τεταγμένη.

Είναι φανερό ότι το σύνολο K είναι πυκνό στην σκούπα του Cantor . Επιπλέον η τομή $K \cap L_c$ είναι πυκνό υποσύνολο του τμήματος L_c για κάθε $c \in C$. Το σημείο q ανήκει στο K.

...

Ενα σύνολο με κενό εσωτερικό ονομάζεται *πουθενά πυκνό*. Δηλαδή ένα σύνολο είναι πουθενά πυκνό όταν η θήκη του αποτελεί ένα συνοριακό σύνολο.

...

2.5.2 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Το δισυνεκτικό σύνολο K των Knaster-Kuratowski είναι συνεκτικό.*

...

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα χωρισμό του K,

$$K = K_1 \cup K_2$$

του K σε δύο μη κενά υποσύνολα K_1 και K_2. Στο ένα από αυτά, π.χ. στο K_1, θα ανήκει το σημείο q. Εστω ότι

$$w_1, w_2, \ldots, w_n, \ldots$$

είναι ακολουθία όλων των ρητών αριθμών του διαστήματος

$$\{y : 0 \leq y \leq 1/2\}$$

Το σύνολο $\overline{K}_1 \cap \overline{K}_2$ είναι κλειστό στο επίπεδο και φυσικά συμπαγές. Ας πάρουμε το μέρος του που περιέχεται στην ευθεία R_n με εξίσωση

$$y = w_n$$

και παίρνουμε την προβολή αυτού του μέρους από το σημείο q στον άξονα των x. Προκύπτει ένα σύνολο το οποίο είναι κλειστό υποσύνολο του συνόλου του Cantor . Ας το συμβολίσουμε Q_n. Αρα

$$Q_n = \{c \in C : \overline{K}_1 \cap \overline{K}_2 \cap L_c \cap P_n \neq \emptyset\}$$

Θα εξετάσουμε δύο περιπτώσεις:

(I). $P \cap Q_m \neq \emptyset$ *για κάποιο* m. Τότε υπάρχει σημείο $c \in P$, τέτοιο ώστε το σημείο p του τμήματος L_c που έχει τεταγμένη w_m, νάνήκει στο σύνολο $\overline{K}_1 \cap \overline{K}_2$. Επειδή όμως κάθε τέτοιο p είναι στοιχείο του K έπεται ότι

$$p \in K \cap \overline{K}_1 \cap \overline{K}_2 = (K_1 \cup K_2) \cap \overline{K}_1 \cap \overline{K}_2 = (K_1 \cap \overline{K}_2) \cup (\overline{K}_1 \cap K_2)$$

και συνεπώς

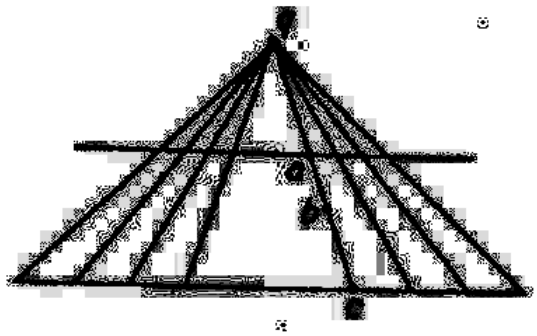
$$(K_1 \cap \overline{K}_2) \cup (\overline{K}_1 \cap K_2) \neq \emptyset$$

(II). $P \cap Q_n = \emptyset$ *για κάθε* $n = 1, 2, \ldots$. Τότε, κάθε σύνολο Q_m περιέχεται στο W. Επειδή το σύνολο R είναι πυκνό στο σύνολο του Cantor έχουμε ότι τα σύνολα Q_m είναι συνοριακά, και ως κλειστά, είναι πουθενά πυκνά στο C. Το σύνολο R είναι ένωση αριθμήσιμης οικογένειας από πουθενά πυκνά υποσύνολα του C (συγκεκριμένα μονοσύνολα). Επεται, λοιπόν, ότι το σύνολο

$$R = P \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$$

είναι αριθμήσιμη ένωση από πουθενά πυκνά υποσύνολα του συνόλου του Cantor . Επειδή το σύνολο του Cantor είναι πλήρης χώρος, έχουμε, χάρη στο θεώρημα του Baire (βλέπε 1.8.17), ότι το σύνολο R είναι συνοριακό στο C. Αρα το $C - R$ είναι πυκνό στο C.

Εστω $c \in C - R$. Αν στο τμήμα L_c βρίσκεται ένα σημείο $b \in K_2$ τότε συμβολίζουμε με a το σημείο του L_c το οποίο έχει την τεταγμένη ίση με το άνω



Σχήμα 38: Το σημείο a της απόδειξης του Θεωρήματος 2.5.2.

πέρας των τεταγμένων των σημείων του συνόλου του K_2, που βρίσκονται στο τμήμα L_c (Σχήμα 38).

Επειδή $q \in K_1$ έχουμε ότι το σημείο a είναι όριο ακολουθιών σημείων του K_2 και του K_1, δηλαδή

$$a \in K_1 \cap K_2$$

Η τεταγμένη του σημείου a δεν μπορεί να είναι ρητή, διότι τότε θα ήταν ίση με κάποιο w_n και κατά συνέπεια το σημείο c θα ανήκε σε κάποιο Q_n. Αυτό είναι αδύνατο αφού $c \notin R$. Αρα η τεταγμένη του σημείου a είναι άρρητος αριθμός. Το σημείο c ανήκει στο συνολό W διότι

$$C - R \subset C - P \subset W$$

και από τον ορισμό του συνόλου K έχουμε ότι $a \in K$. Επεται λοιπόν ότι το a ανήκει στα σύνολα $K, \overline{K}_1, \overline{K}_2$,(όπως το σημείο p στην πρώτη περίπτωση). Αρα μπορούμε να δεχτούμε ότι αν $c \in C - R$ τότε στο τμήμα L_c δεν υπάρχει σημείο b του K_2. Ολόκληρο το μέρος του K που βρίσκεται στο διάστημα L_c περιέχεται στο K_1, δηλαδή

$$K \cap L_c \subset K_1$$

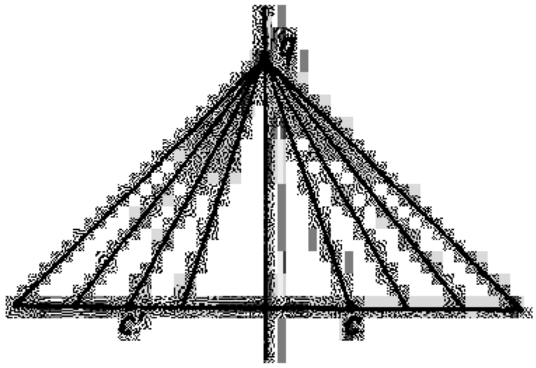
για $c \in C - R$. Επειδή το σύνολο $K \cap L_c$ είναι πυκνό στο L_c και το σύνολο $C \backslash R$ είναι πυκνό στο C, έχουμε ότι το σύνολο K_1 είναι πυκνό σε όλη την σκούπα του Cantor . Επομένως

$$\overline{K}_1 \cap K_2 = K_2 \neq \emptyset$$

Αρα

$$(K_1 \cap \overline{K}_2) \cup (\overline{K}_1 \cap K_2) \neq \emptyset$$

Και στις δύο περιπτώσεις (I) και (II) καταλήγουμε στην ίδια σχέση που χρειάζεται για την συνεκτικότητα του K.



Σχήμα 39: Το σημείο q αποτελεί σημείο ''έκρηξης'' για το Κ.

2.5.3 ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. *Το σύνολο K δεν είναι συνεκτικό αν του αφαιρεθεί το σημείο q. Επιπλέον, η διαφορά $K - \{q\}$ δεν έχει κανένα συνεκτικό υποσύνολο, εκτός από τα μονοσύνολα.*

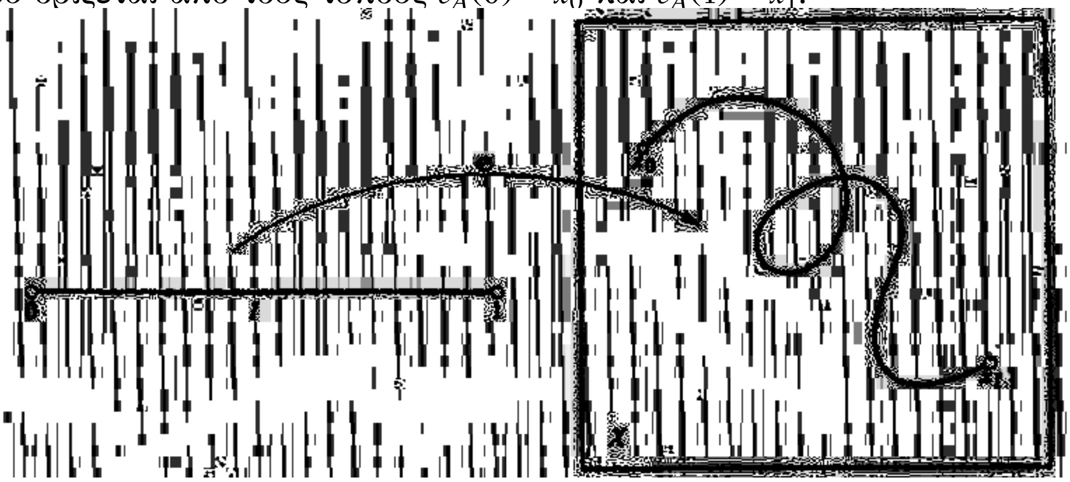
Πραγματικά, ένα τέτοιο σύνολο δεν θα μπορούσε να τέμνεται με δυο διαφορετικά τμήματα L_c $L_{c'}$. Αν αυτό συνέβαινε, τότε η ευθεία που περνά από το q και βρίσκεται μεταξύ των L_c και $L_{c'}$ (βλέπε Σχήμα 39) θα το έκοβε σε δυο κομμάτια μή κενά και τέτοια, ώστε κανένα να μην περιέχει οριακό σημείο του άλλου. Ομως σε κάθε ένα από τα τμήματα L_c, τα μόνα συνεκτικά υποσύνολα που περιέχονται στο K είναι τα μονοσύνολα.

Στο δισυνεκτικό σύνολο των Knaster-Kuratowski το σημείο q παίζει σπουδαίο ρόλο. Το σύνολο K είναι συνεκτικό, αλλά μετά την αφαίρεση του q προκαλείται μια έκρηξη που σκορπίζει το σύνολο K σε ¨σκόνη¨ έτσι ώστε να μην περιέχει άλλα συνεκτικά υποσύνολα εκτός από τα μονοσύνολα. Για τον λόγο αυτό το σημείο q ονομάζεται και σημείο ¨εκρηξης¨.

Κάθε συνεκτικό υποσύνολο του K που δεν είναι μονοσύνολο περιέχει το σημείο q. Αρα το σύνολο K δεν μπορεί να χωριστεί σε δύο συνεκτικά, ξένα σύνολα που δεν είναι μονοσύνολα. Απ'οπου κι ο όρος δισυνεκτικό. $\square$

§. 2.6 Η ΚΑΤΑ ΜΟΝΟΠΑΤΙΑ ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑ

Δίδεται ένας μετρικός χώρος Q και δυο σημεία του $x_0, x_1 \in Q$. Κάθε συνεχής συνάρτηση $e : I \to X$ τέτοια ώστε $e(0) = x_0$ και $e(1) = x_1$ ονομάζεται *μονοπάτι* στον χώρο Q από το σημείο x_0 προς το σημείο x_1. Το σημείο x_0 ονομάζεται η *αρχή* του μονοπατιού και το σημείο x_1 το *τέλος*. Το μονοπάτι e από το σημείο x_0 προς το σημείο x_1 είναι μια συνεχής επέκταση από το σύνολο $A = \{0, 1\}$ προς ολόκληρο το διάστημα I της συνάρτησης $e_A : A \to X$ που ορίζεται από τους τύπους $e_A(0) = x_0$ και $e_A(1) = x_1$.



Σχήμα 40: Ένα μονοπάτι e από το σημείο x_0 προς το σημείο x_1 στον χώρο X.

2.6.1 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Σ'ενα κυρτό υπόχωρο Q του $\Re^n$ θεωρούμε δυο σημεία $x_0, x_1 \in X$. Η συνάρτηση $f : I \to X$, που ορίζεται από τον τύπο $f(r) = (1 - r)x_0 + rx_1$ για $r \in I$, είναι ένα μονοπάτι από το σημεί x_0 προς το σημείο x_1.□

...

Αν για κάθε δυο σημεία $x_0, x_1 \in X$ υπάρχει ένα μονοπάτι στον χώρο Q από το σημείο x_0 προς το σημείο x_1, τότε λέμε ότι ο χώρος Q είναι *κατά μονοπάτια συνεκτικός*. Αφού η εικόνα του μοναδιαίου διαστήματος I από το x_0 προς το x_1 είναι ένα συνεκτικό σύνολο που περιέχει τα σημεία αυτά, από το Θεώρημα 2.4.6 έχουμε ότι:

2.6.2 ΠΡΟΤΑΣΗ. *Κάθε κατά μονοπάτια συνεκτικός χώρος είναι συνεκτικός.*
□

Το επόμενο παράδειγμα δείχνει ότι δεν ισχύει το αντίστροφο της προηγούμενης Πρότασης.

2.6.3 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Εστω ότι

$$A = \{(x_1, x_2)\} \in \Re^2 : x_2 = hm\frac{1}{x_1}, 0 < x_1 \leq 1\}$$

$$B = \{(x_1, x_2)\} \in \Re^2 : x_1 = 0, -1 \leq x_2 \leq 1\},$$

και έστω ότι $X = A \cup B \subset \Re^2$. Ο χώρος Q είναι συνεκτικός, αφού το σύνολο A είναι συνεκτικό και πυκνό στο Q (βλέπε Θεώρημα 2.4.10). Το σύνολο αυτό αναφέρεται συχνά με το όνομα *συμπυκνωμένη ημιτονοειδής*. Θα δείξουμε ότι:

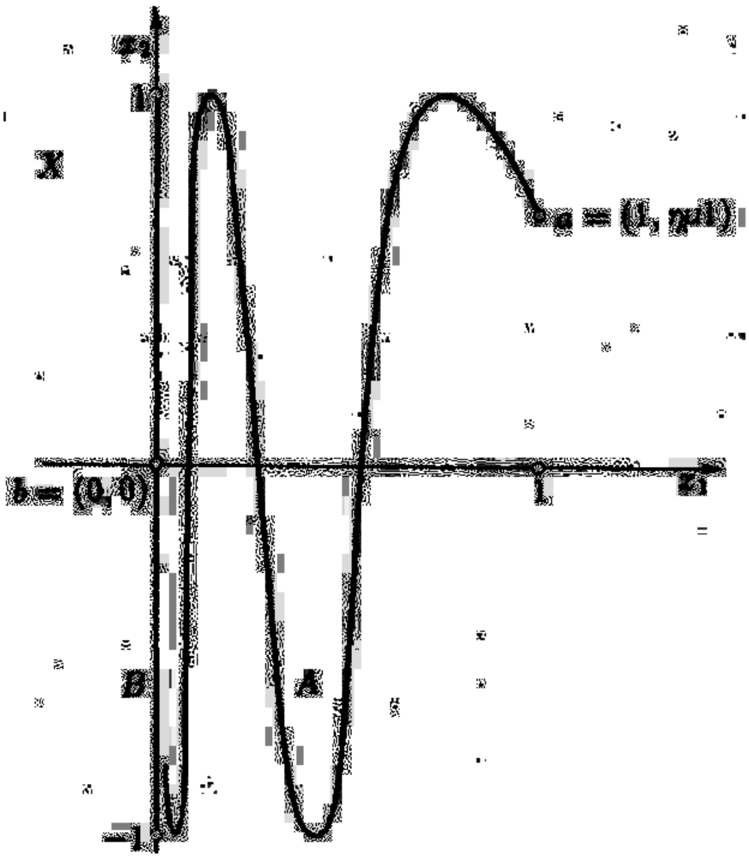
2.6.4 ΠΡΟΤΑΣΗ. *Η συμπυκνωμένη ημιτονοειδής Q δεν είναι κατά μονοπάτια συνεκτικός χώρος.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει μονοπάτι από το σημείο $a = (1,$ημ$1)$ προς το σημείο $b = (0, 0)$. Ας δεχθούμε ότι e είναι ένα τέτοιο μονοπάτι κι έστω ότι $r_0 = inf\{r \in I : e(r) \in B\}$. Προφανώς $e(r_0) \in B$. Αφού η εικόνα $e([0, r_0])$ είναι συνεκτική και για κάθε σημείο $x \in A\backslash\{a\}$ το συμπλήρωμα $X\backslash\{x\}$ είναι η ένωση δυο συνιστωσών από τις οποίες η μια περιέχει το σημείο a κι η άλλη το σημείο $e(r_0)$, έχουμε ότι $A \subset e([0, r_0])$. Λόγω της πυκνότητας του A στον χώρο Q θα έπρεπε να έχουμε $X = e([0, r_0])$ το οποίο είναι αδύνατο, αφού από τον ορισμό του r_0 έπεται ότι $B \cap e([0, r_0]) = \{e(r_0)\}$.□

...

Ως άσκηση στον αναγνώστη αφήνουμε την επόμενη Πρόταση.

2.6.5 ΠΡΟΤΑΣΗ. *Για να είναι ένα υποσύνολο Ευκλειδίου χώρου κατά τόξα συνεκτικό είναι αναγκαίο κι ικανό να είναι συνεκτικό σύνολο.* □

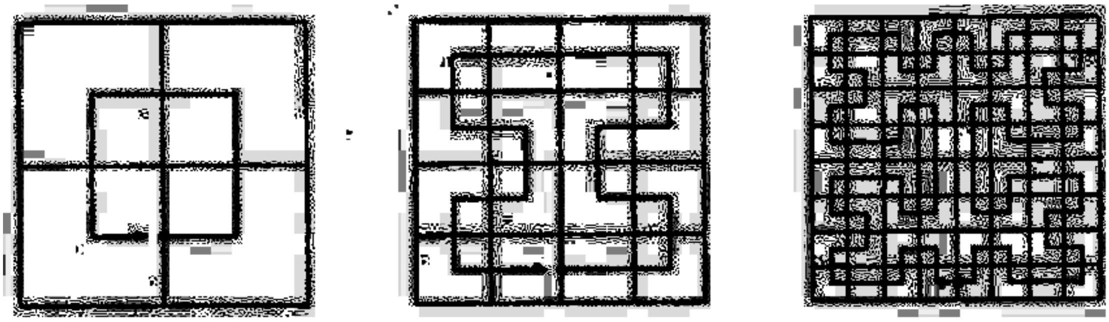


Σχήμα 41: Στον χώρο X δεν υπάρχει μονοπάτι από το σημείο $a = (1,ημ1)$ προς το σημείο $b = (0,0)$, άρα ο χώρος δεν είναι κατά μονοπάτια συνεκτικός (Παράδειγμα 2.6.3)

3. ΣΥΝΕΧΗ

§. 3.1 ΤΑ ΣΥΝΕΧΗ

Στην Γεωμετρία των αρχαίων Ελλήνων η ευθεία κατανοείται ως ένας συνεχής φορέας πάνω στον οποίο θεωρούμε τα σημεία, συχνά, ως τομή δύο ευθειών. Η έννοια του φορέα είναι κάτι το αόριστο και διαισθητικό. Τα νεώτερα Μαθηματικά θεμελιώθηκαν πάνω στην θεωρία των συνόλων, έννοια που διέκρινε τα διαφορετικά σημεία ως πρωτογενές υλικό μέσα από



Σχήμα 42: Η κατασκευή του Hilbert που απεικονίζει το μοναδιαίο διάστημα I επί του τετραγώνου I^2.

το οποίο έπρεπε να προκύψει κι η έννοια του συνεχούς, μέ την βοήθεια των αξιωμάτων μας. Η θεμελίωση της πραγματικής ευθείας που έγινε στο τέλος του περασμένου αιώνα, κυρίως από τον Dedekind , μας αποκατέστησε αυτή την σύνδεση του συνεχούς με το διακριτό, μέσω των αξιωμάτων της πλήρωσης. Ο ορισμός της καμπύλης, δεν έκανε τίποτα άλλο από το να μεταφέρει το νόημα αυτό του φορέα στην τυχαία καμπύλη, μέσω των συνεχών συναρτήσεων. Οι εργασίες ωστόσο του Peano και του Jordan , έδειξαν ότι αυτό που φαινόταν αυτονόητο αναζητούσε περαιτέρω επεξεργασία. Οι ορισμοί των συμπαγών συνόλων, της πληρότητας, ή της συνεκτικότητας δεν ήταν αρκετοί για νάποδώσουν το νόημα του ενιαίου φορέα. Στο σύνολο του Cantor που είναι χώρος συμπαγής και πλήρης, κάθε σημείο του είναι σημείο συσσώρευσης και συγρόνως σύνολο κλειστό. Είναι ένα σύνολο *τέλειο*, αλλά μακριά από το να είναι ενιαίο, ως σύνολο *ολικά μη συνεκτικό*. Ποια ήταν εκείνη η ιδιότητα που θα απομόνωνε το διαισθητικό νόημα του ¨φορέα¨· Η συνεκτικότητα στάθηκε το ίδιο ανεπαρκής αφού το δισυνεκτικό σύνολο των Knaster-Kuratowski έδειξε ότι σύνολα με δομή ασυνεχή όπως σχεδόν εκείνης των ρητών αριθμών μπορούσαν να συμπεριληφθούν μέσα στα συνεκτικά. Οσο για τις συνεχείς εικόνες του I, αυτές μετέφεραν κάτι πολύ περισσότερο από αυτό που ζητούσαμε, όπως έδειχνε το Παράδειγμα του Πεανο. Η συνέχεια του φορέα ήταν μια έννοια που είχε ανάγκη την συνεκτικότητα και την συμπάγεια, τουλάχιστον την τοπική (ένας χώρος είναι τοπικά συμπαγής αν κάθε σημείο του έχει μια περιοχή η θήκη της οποίας είναι συμπαγής στον χώρο).

....

Ενας μετρικός χώρος που είναι συμπαγής και συνεκτικός ονομάζεται *συνεχές*. Από τα Θεωρήματα 1.6.2 και 2.4.3 έχουμε ότι

3.1.1 ΠΟΡΙΣΜΑ. *Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση ενός συνεχούς Q επί ενός χώρου U, τότε ο χώρος U είναι επίσης συνεχές.* □

Ομοια από τα Θεωρήματα 1.6.5 και το 2.4.8 προκύπτει ότι,

3.1.2 ΠΟΡΙΣΜΑ. *Το μετρικό γινόμενο πεπερασμένου αριθμού συνεχών είναι συνεχής χώρος.* □

Ενώ ένα ανάλογο Θεώρημα εκείνου του Cantor (1.6.8) αποδεικνύεται.

3.1.3 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν Q_n είναι μη κενό υποσυνεχές και X_{n+1} είναι μετρικός υπόχωρος του χώρου X_n για $n = 1, 2, \ldots$, τότε η τομή $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι ένα μή κενό συνεχές.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Το ότι η τομή $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ είναι συμπαγές σύνολο είναι προφανές και είναι επίσης είναι μη κενό σύνολο (βλέπε Θεώρημα του ἄντορ 1.6.8). Για νάποδείξουμε ότι το Q είναι συνεκτικός χώρος υποθέτουμε ότι $X = A \cup B$, όπου τα σύνολα A και B είναι κλειστά και ξένα μεταξύ τους. Από το Θεώρημα 1.5.25 υπάρχουν σύνολα U, V ανοικτά στο X_1 με $A \subset U$, $B \subset V$ και $U \cap V = \emptyset$. Τα συνεχή σύνολα $Q_n \backslash (U \cup V)$ για $n = 1, 2, \ldots$ σχηματίζουν μια φθίνουσα ακολουθία κι αφού η τομή τους είναι κενή, υπάρχει ένα n με $X_n \subset U \cup V$ όπου $X_n = (X_n \cap U) \cup (X_n \cap V)$. Από την συνεκτικότητα του X_n έπεται ότι $X_n \cap U = \emptyset$ ή $X_n \cap V = \emptyset$. Αφού $A \subset X_n \cap U$ και $B \subset X_n \cap V$, έχουμε ότι $A = \emptyset$ ή $B = \emptyset$ κι η απόδειξη τελείωσε. □

...

Θα πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι η τομή μιας φθίνουσας ακολουθίας από συνεκτικά σύνολα δεν είναι πάντα συνεκτικό σύνολο. Αν A είναι ένα τυχαίο ευθύγραμμο τμήμα με διαφορετικά τελικά σημεία a_1, a_2 στο επίπεδο $\Re^2$, τότε παίρνοντας $X_n = B(A, \frac{1}{n}) \backslash (A \backslash \{a_1, a_2\})$ για $n = 1, 2, \ldots$ επιτυγχάνουμε μια φθίνουσα ακολουθία συνεκτικών συνόλων των οποίων η τομή είναι το σύνολο $\{a_1, a_2\}$.

Το μοναδιαίο διάστημα I είναι ένα συνεχές όπως επίσης ο κύβος I^n, η σφαίρα B^n κι η σφαιρική επιφάνεια S^{n-1}. Η σκούπα του Cantor είναι ένα συνεχές. Το δισυνεκτικό σύνολο των Knaster-Kuratowski δεν είναι συνεχές αφού δεν είναι συμπαγές. Η ιδιότητα του συνεχούς είναι τοπολογικό αναλλοίωτο. Το πιο απλό συνεχές είναι το τόξο. Τόξο ονομάζουμε, ως γνωστόν, μια ομοιομορφική εικόνα του μοναδιαίου διάστηματος I. Κάθε τόξο είναι το ελάχιστο συνεχές που περιέχει τα άκρα του ή τα *τελικά σημεία* του, δηλαδή δεν υπάρχει υποσυνεχές του που να περιέχει τα άκρα του του και να μην περιέχει και κάθε άλλο σημείο του τόξου. Την ιδιότητα αυτή την χαρακτηρίζουμε με το ότι το τόξο είναι *αδιάσπαστο μεταξύ των άκρων του.*

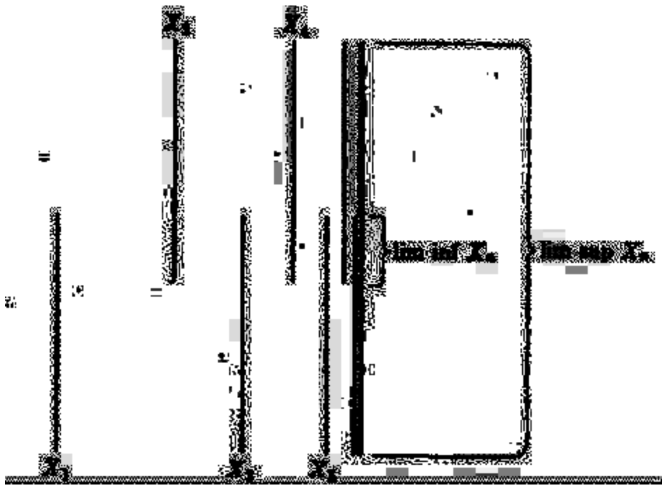
Έστω τώρα η συμπυκνωμένη ημιτονοειδής (βλέπε Παράδειγμα 2.6.3). Το σύνολο A είναι η καμπύλη που διαγράφει η ημιτονοειδής συνάρτηση, ενώ το B είναι το ευθύγραμμο τμήμα του άξονα x_2 προς το οποίο πτύσσεται η ημιτονοειδής καμπύλη. Το συνεχές αυτό είναι αδιάσπαστο μεταξύ του σημείου $a = (1,\text{ημ}1\ )$ και κάθε άλλου σημείου που βρίσκεται στον άξονα των x_2 με άκρα -1 και 1. Μπορούμε να πουμε ότι το συνεχές αυτό προκύπτει από ένα τόξο στο οποίο η μια του άκρη αντικαταστάθηκε με ένα διάστημα ενώ διατηρήθηκε η ιδιότητα που είχε αυτό το σημείο στο τόξο, να είναι σημείο συμπύκνωσης.

Θα κατασκευάσουμε ένα συνεχές όπου αυτή η αντικατάσταση ενός σημείου τόξου έχει επιτελεσθεί για κάθε σημείο του τόξου. Προηγουμένως όμως θάναφέρουμε τον ορισμό του τοπολογικού ορίου μια έννοια που θα συναντήσουμε πολλές φορές στα επόμενα.

...

3.1.4 . *Σύγκλιση συνόλων* . Υποθέτουμε οτι $\{Q_n\}$ είναι μια ακολουθία υποσυνόλων ενός χώρου X. Το σύνολο των σημείων x στον X, τέτοιων ώστε κάθε ανοικτό σύνολο που περιέχει το x να τέμνει όλα εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος συνόλων Q_n, ονομάζεται *κάτω τοπολογικό όριο της ακολουθίας* $\{Q_n\}$ και συμβολίζεται $liminf X_n$ ή LiX_n.

Το σύνολο των σημείων y στον X, τέτοιων ώστε κάθε ανοικτό σύνολο που περιέχει το y να τέμνει άπειρο πλήθος συνόλων Q_n ονομάζεται *άνω*



Σχήμα 43: Το τοπολογικό όριο συνόλων.

τοπολογικό όριο της ακολουθίας $\{Q_n\}$ και συμβολίζεται $limsupX_n$ ή LsX_n.

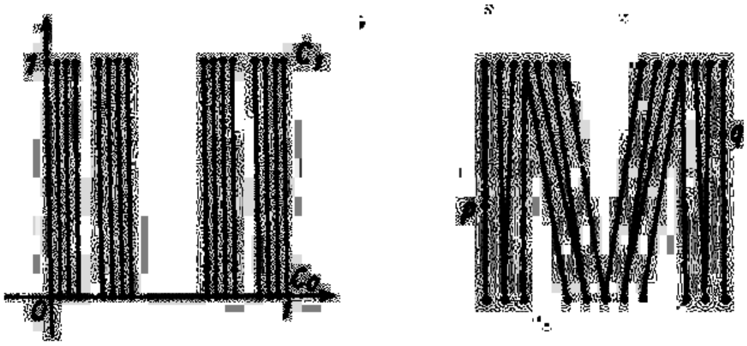
Αν τα δυο αυτά σύνολα συμπίπτουν (δηλαδή έχουμε ότι: $liminfX_n = L = limsupX_n$), τότε θα λέμε οτι η $\{Q_n\}$ είναι *συγκλίνουσα ακολουθία με όριο* το L το οποίο συμβολίζεται: $L \equiv limX_n \equiv LimX_n$

Αν η $\{Q_n\}$ αποτελείται από ξένα μεταξύ τους συνεχή τότε το L λέγεται *συνεχές σύγκλισης*.

...

3.1.5 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ας πάρουμε τώρα το σύνολο $C \times I$ που είναι το καρτεσιανό γινόμενο του συνόλου του Cantor επί το διάστημα I. Αυτό είναι η ένωση διαστημάτων του επιπέδου που έχουν μήκος 1 και είναι κάθετα στον άξονα των x στα σημεία του συνόλου Cantor . Τα διαστήματα αυτά ενώνουν τα σημεία του συνόλου του $C_0 = C\times\{0\}$ του άξονα των τετμημένων μετα αντίστοιχα σημεία του συνόλου του ἄντορ $C_1 = C \times \{1\}$ στο ύψος της ευθείας $y = 1$.

Μετασχηματίζουμε τώρα το σύνολο $C \times I$ έτσι ώστε για κάθε διάστημα D_n , που αφαιρέσαμε κατά την κατασκευή του C, να συνδέουμε τα άκρα μεταξύ τους στο C_0 αν ο n είναι περιττός και στο C_1, αν ο n είναι άρτιος. Ως αποτέλεσμα θα έχουμε το αδιάσπαστο συνεχές ανάμεσα σε κάθε ζεύγος σημείων p, q που ανήκουν στα ακραία κάθετα διαστήματα $\{0\} \times I$, $\{1\} \times I$ αντίστοιχα.



Σχήμα 44: Το Παράδειγμα 3.1.5.

Η κατασκευή αυτή έχει πολλά κοινά με την πτύχωση ενός τόξου που αντικαταστήσαμε τα σημεία του, αλλά αντίθετα από την ημιτονοειδή καμπύλη καμία του πτυχή δεν αποτελείται από ένα μόνο σημείο. Τα σημεία εδώ αντικαταστάθηκαν από μια τεθλασμένη γραμμή που έχει δυο κομμάτια με την μορφή του γράμματος V ή του L.□

...

Ωστόσο το συνεχές αυτό έχει ακόμα μια ιδιότητα που έχει και το τόξο, ότι μπορεί να παρασταθεί ως ένωση δυο υποσυνεχών του.

Ενα συνεχές X, λέγεται ότι είναι *αποσυνθέσιμο* αν υπάρχουν δυο γνήσια υποσυνεχή Q_1, Q_2 με $Q_1 \subset Q$ και $Q_2 \subset Q$, τέτοια ώστε $Q = Q_1 \cup Q_2$.

Το συνεχές που κατασκευάσαμε τελευταία έχει αυτή την ιδιότητα, αφού μπορούμε να το χωρίσουμε για παράδειγμα, αν το κόψουμε με μια κάθετη ευθεία που να περνά από το κέντρο, ή ακόμη από την κορυφή οποιασδήποτε τεθλασμένης ή ˝.

3.1.6 ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν* $X = \bigcup_{i=1}^{m} X_1$, *όπου κάθ'ενας υπόχωρος* X_i *είναι ένα συνεχές για* $i = 1, 2, \ldots, m$, *και* $\bigcap_{i=1}^{m} Q_i \neq \emptyset$, *τότε ο χώρος* X *είναι συνεχές.*

Η Πρόταση αυτή προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 2.4.5. □

.

3.1.7 ΠΡΟΤΑΣΗ. *Οι συνιστώσες ενός συμπαγούς μετρικού χώρου είναι συνεχή.*

Η Πρόταση προκύπτει από το Θεώρημα 1.6.3 και το Πόρισμα 2.4.17. □

...

3.1.8 ΛΗΜΜΑ. *Αν A είναι ένα γνήσιο, μη κενό κλειστό υποσύνολο ενός* *συνεχούς Q, τότε για κάθε συνιστώσα S του υπόχωρου A έχουμε $S \cap bdA \neq \emptyset$, όπου με bdA συμβολίζουμε το σύνορο του συνόλου A μέσα στο Q.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Υποθέτουμε ότι $S \cap bdA = \emptyset$ και θεωρούμε την οικογένεια $\{W_t\}_{t \in T}$ όλων των ανοικτων - κλειστών υποσυνόλων του υπόχωρου A τα οποία περιέχουν την συνιστώσα S. Σημειώνουμε ότι $S = \bigcap_{t \in T} W_t$. Ο υπόχωρος bdA του χώρου X είναι συμπαγής κι η οικογένεια $\{U_t\}_{t \in T}$, όπου $U_t = bdA \backslash W_t$ για $t \in T$, είναι μια ανοικτή κάλυψη του. Υπάρχει ως εκ τούτου μια πεπερασμένη οικογένεια δεικτών $t_1, t_2, \ldots, t_m \in T$ τέτοια ώστε $bdA = \bigcup_{i=1}^{m} U_{t_i}$. Το σύνολο $W = \bigcap_{i=1}^{m} W_{t_i}$ είναι ανοικτό και κλειστό στο A και ξένο προς το bdA. Εστω ότι το U είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του χώρου Q που ικανοποιεί την $W = U \cap A$ (βλέπε Θεώρημα 1.5.5). Εξάλλου από τις εξισώσεις $A = intA \cup bdA$ και $W \cap bdA = \emptyset$ προκύπτει ότι το σύνολο $W = U \cap intA$ είναι ανοικτό στο Q. Αφού το W είναι επίσης κλειστό στο Q και μή κενό έχουμε ότι $W = X$. Συμπεραίνουμε ότι $bdA = \emptyset$ το οποίο, σύμφωνα με την Πρόταση 1.5.29, αντιφάσκει στην συνεκτικότητα του Q. □

3.1.9 ΛΗΜΜΑ. *Αν ένα συνεχές Q είναι ένωση από ανά δυο ξένων κλειστών συνόλων $Q_1, Q_2, \ldots$, τουλάχιστον δυο από τα οποία είναι μή κενά, τότε για κάθε φυσικό αριθμό n υπάρχει συνεχές $C \subset X$ τέτοιο ώστε $C \cap X_n = \emptyset$ και τέτοιο ώστε τουλάχιστον δυο σύνολα από την ακολουθία $C \cap X_1, C \cap X_2, \ldots$ να μην είναι κενά.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εάν $Q_n = \emptyset$ μπορούμε να θέσουμε $C = X$, δεχόμαστε ότι $X_n \neq \emptyset$. Εκλέγουμε ένα φυσικό αριθμό m διαφορετικό από τον n για τον οποίο $X_m \neq \emptyset$ και διαφορετικά ανοικτά σύνολα $U, V \subset X$ με $X_n \subset U, X_m \subset V$. Εστω ότι x είναι ένα τυχαίο σημείο του X_m κι έστω ότι C είναι η συνιστώσα του χώρου clV η οποία περιέχει το σημείο x. Προφανώς C είναι συνεχές, $C \cap X_n = \emptyset$ και $C \cap X_m \neq \emptyset$. Τώρα $C \cap bdclV \neq \emptyset$ από το προηγούμενο Λήμμα και $Q_m \subset intclV$, άρα υπάρχει ένας φυσικός αριθμός m' διαφορετικός του m τέτοιος ώστε $C \cap X_{m'} \neq \emptyset$.□

3.1.10 ΘΕΩΡΗΜΑ. (Sierpiņski) *Ενα συνεχές δεν μπορεί να παρασταθεί ως ένωση ενός αριθμήσιμου πλήθους ξένων μεταξύ τους κλειστών συνόλων δυο τουλάχιστον από τα οποία να είναι μή κενά.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Δεχόμαστε ότι ένα συνεχές Q μπορεί να παρασταθεί ως μια ένωση $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, όπου τα σύνολα Q_n είναι κλειστά, ανά δυο ξένα μεταξύ τους και τουλάχιστον δυο από αυτά να είναι μή κενά. Από το Λήμμα 3.1.9 προκύπτει ότι υπάρχει μια φθίνουσα ακολουθία από μή κενά συνεχή $C_1 \supset C_2 \supset \ldots$ που περιέχεται στο Q και τέτοια ώστε $C_n \cap X_n = \emptyset$ για $n = 1, 2, \ldots$. Εχουμε έτσι ότι

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = (\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n) \cap (\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n) = \emptyset$$

το οποίο έρχεται σε αντίφαση προς το Θεώρημα του Cantor 1.6.8. □

...

Εστω ένα τυχαίο υποσύνολο A ενός συνεχούς Q. Ενα υποσυνεχές $H(A)$ είναι *αδιάσπαστο ως προς το σύνολο* A αν περιέχει το A και δεν υπάρχει γνήσιο υποσυνεχές του $H(A)$ που να περιέχει το A. Εξάλλου από το Θεώρημα του Cantor 3.1.3 και το Θεώρημα 2.4.15 προκύπτουν οι επόμενες Προτάσεις:

3.1.11 ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν Q είναι ένα συνεχές τότε για κάθε ζεύγος σημείων του υπάρχει ένα αδιάσπαστο υποσυνεχές μεταξύ τους.* □

3.1.12 ΠΡΟΤΑΣΗ. *Αν A είναι ένα υποσύνολο ενός συνεχούς Q, τότε τότε το Q περιέχει ένα υποσυνεχές αδιάσπαστο ως προς το σύνολο A.* □

...

ΑΣΚΗΣΗ.

1) Εστω ότι $a_1 = (-1, 0), a_2 = (1, 0) \in \Re^2$, $A = a_1a_2$ και $X_n = B(A, \frac{1}{n}) \backslash (A \backslash \{a_1, a_2\})$ για $n = 1, 2, \ldots$. Να δειχθεί ότι το σύνολο X_n είναι συνεκτικό για $n = 1, 2, \ldots$, $X_1 \supset X_2 \supset \ldots$ και $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \{a_1, a_2\}$ (βλέπε το Θεώρημα 3.1.3).

§. 3.2 ΑΝΑΠΟΣΥΝΘΕΣΙΜΑ ΣΥΝΕΧΗ

Ενα συνεχές καλείται *αναποσυνθέσιμο* αν δεν υπάρχει ένας χωρισμός του σε δυο γνήσια υποσυνεχή του, δηλαδή αν το Q είναι ένωση δυο υποσυνεχών τότε ένα τουλαχιστον από αυτά είναι το ίδιο το Q.

Μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε ένα συνεχές να είναι αναποσυνθέσιμο είναι η εξής:

3.2.1 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν Q είναι αναποσυνθέσιμο συνεχές, τότε κάθε συνεχές που περιέχεται στο Q και είναι διαφορετικό από το Q είναι σύνολο πουθενά πυκνό στο Q.*

...

Πραγματικά, αν το Q ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη κι είναι ένωση δυο συνεχών από τα οποία το ένα να είναι διαφορετικό από το Q, τότε το άλλο συνεχές είναι ίσο με το Q. Το δεύτερο συνεχές, ως συμπαγές σύνολο είναι κλειστό υποσύνολο του Q και συγχρόνως είναι πυκνό στο Q, αφού το πρώτο συνεχές είναι πουθενά πυκνό. Η συνθήκη αυτή είναι επίσης αναγκαία για να είναι ένα συνεχές αναποσυνθέσιμο. Μπορουμε τελικά να πούμε ότι ένα συνεχές Q είναι αναποσυνθέσιμο αν και μόνο αν κάθε υποσυνεχές του είτε είναι ολόκληρο το συνεχές είτε είναι πουθενά πυκνό στο Q. □

...

3.2.2 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Το συνεχές του Brouwer* . Το πρώτο αναποσυνθέσιμο συνεχές κατασκευάστηκε από τον Brouwer το 1910. Θα κατασκευάσουμε το σύνολο αυτό το οποίο λέγεται *συνεχές του Brouwer* . Αυτό είναι ένα σύνολο B του επιπέδου και σχηματίζεται από ημιπεριφέρειες κύκλων, οι οποίες ενώνουν τα σημεία του συνόλου του Cantor .

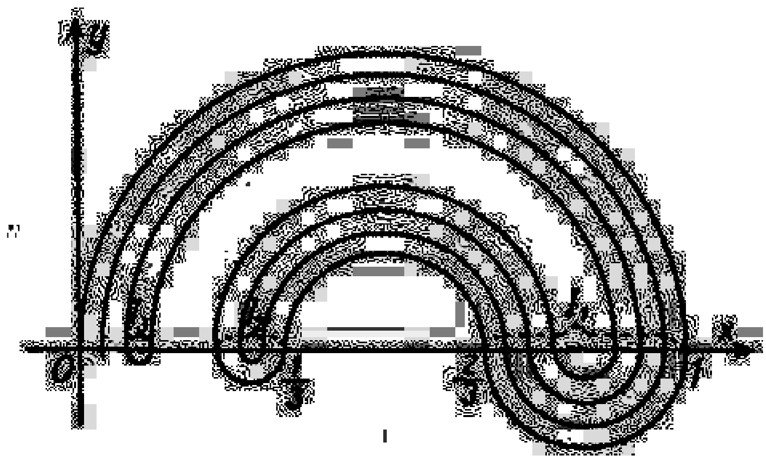
Πρώτα, παρατηρούμε ότι το σύνολο C του Cantor είναι συμμετρικό ως προς το κέντρο του μοναδιαίου διαστήματος I. Θεωρούμε το διάστημα αυτό ως μοναδιάιο διάστημα του άξονα των τετμημένων x, μπορούμε να ενώσουμε τα ζεύγη των συμμετρικών σημείων του συνόλου του Cantor με ημιπεριφέρειες κύκλων στο άνω ημιεπίπεδο. Στο σύνολο B περιλαμβάνουμε όλες τις ημιπεριφέρειες του ημιεπιπέδου $y \geq 0$, που περνάνε από τα σημεία του συνόλου C και έχουν κοινό κέντρο το $(\frac{1}{2}, 0)$.

Στη συνέχεια, μετά την αφαίρεση από το διάστημα I του συνόλου D_{n-1}, και όλων των προηγουμένων συνόλων D_i (με $i < n-1$) παραμένουν 2^{n-1} ανά δύο ξένα διαστήματα μήκους $\frac{1}{3^{n-1}}$. Το πρώτο από αυτά είναι το διάστημα

$\{x : 0 \leq x \leq \frac{1}{3^{n-1}}\}$ από το οποίο στο n-στο βήμα της κατασκευής του συνόλου Cantor , αφαιρούμε το μεσαίο διάστημα μήκους $\frac{1}{3^n}$. Αρα, αν θεωρήσουμε το διάστημα:

$$I_n = \{(x, 0) : \frac{2}{3^n} \leq x \leq \frac{1}{3^{n-1}}\}$$

ως τμήμα του άξονα των x, αυτό θα είναι ένα από τα διαστήματα που θα μείνουν μετά το n-στο βήμα. Επειδή όμως, στα επόμενα βήματα της κατασκευής του συνόλου του Cantor , στο διάστημα I_n κάνουμε το ίδιο που κάναμε από την αρχή στο διάστημα I (αλλά σε μικρότερη κλίμακα), έχουμε ότι ολόκληρο το σύνολο του Cantor είναι ομοιομορφικό με το κομμάτι του που περιέχεται στο I_n, δηλαδή με το σύνολο $C \cap I_n$. Το σύνολο $C \cap I_n$ είναι συμμετρικό ως προς το κέντρο του τμήματος I_n. Μπορούμε τα ζέυγη των συμμετρικών σημείων του $C \cap I_n$ να τα ενώσουμε με ημιπεριφέρειες κύκλων, οι οποίες περιέχονται στο κάτω ημιεπίπεδο. Ολες αυτές οι ημιπεριφέριες, που βρίσκονται στο ημιεπίπεδο $y \leq 0$ και περνάνε από τα σημεία του συνόλου $C \cap I_n$ έχουν κοινό κέντρο το $(\frac{5}{2 \cdot 3^n}, 0)$ τις παίρνουμε μαζί με τις προηγούμενες ημιπεριφέρειες του άνω ημιεπιπέδου. Τελικά παίρνουμε την ένωση όλων των ημιπεριφεριών $n = 1, 2, \ldots$ και έχουμε το ζητούμενο σύνολο B (βλέπε Σχήμα 45).

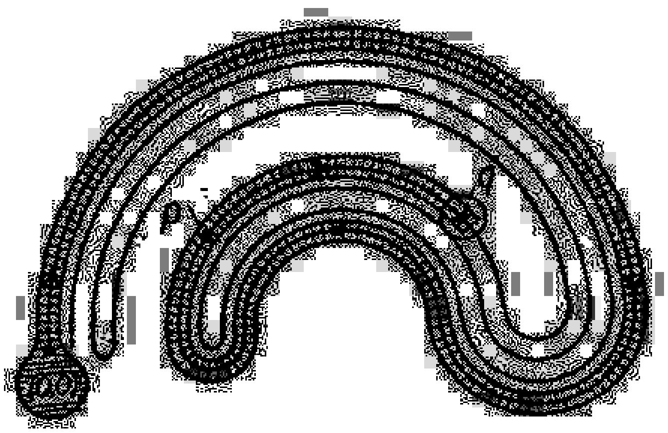


Σχήμα 45: Το σύνολο B.

Το σύνολο B είναι συνεχές. Πραγματικά, είναι κλειστό και φραγμένο στο επίπεδο $\Re^2$, άρα συμπαγές. Οι ημιπεριφέρειες του άνω ημιεπιπέδου συνδέονται μεταξύ τους με τη βοήθεια των ημιπεριφερειών κύκλων του κάτω ημιεπιπέδου και αυτό μας δίνει την συνεκτικότητα του συνόλου B.

3.2.3 ΘΕΩΡΗΜΑ.*Το συνεχές Brouwer είναι αναποσυνθέσιμο.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Ας διακρίνουμε το υποσύνολο $B_0 \subset B$, το οποίο είναι ένωση αυτών μόνο των ημιπεριφερειών, οι οποίες περνάνε από τα σημεία του συνόλου $P \subset C$, δηλαδή του συνόλου με τα άκρα των διαστημάτων των συνεκτικών συνιστωσών του συνόλου D_i (βλέπε σελ. 42), το σύνολο B_0 είναι ακριβώς η γραμμή που τυλίγει τον εαυτό της και παριστάνεται στο Σχήμα 46.



Σχήμα 46: Το σύνολο B_0.

Το σύνολο B_0 είναι πυκνό στο συνεχές B, άρα αν κάποιο συνεχές U περιέχεται στο B–B_0, τότε τοU είναι πουθενά πυκνό στο B. Εκτός από αυτό το B_0 έχει κενό εσωτερικό στο B. Ας υποθέσουμε ότι $U \subset B$ είναι ένα συνεχές διαφορετικό από το B. Για νάποδείξουμε ότι το B είναι αναποσυνθέσιμο αρκεί να δείξουμε ότι από την συνθήκη

$$U \cap B_0 \neq \emptyset$$

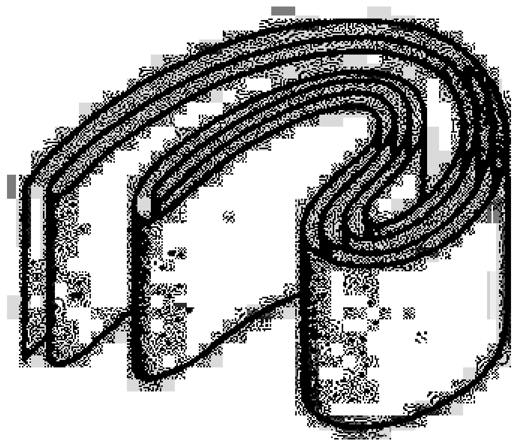
προκύπτει

$$U \subset B_0$$

διότι τότε το U, όπως και το B_0, έχει κενό εσωτερικό και επομένως είναι πουθενά πυκνό υποσύνολο του συνεχούς B. Επιλέγουμε τυχόν σημείο p του συνόλου $U \cap B_0$. Τα σημεία της γραμμής B_0 μπορούν να διαταχθούν κατά μήκος του τόξου στο B_0, το οποίο τα ενώνει με το $(0, 0)$. Αν όλα τα σημεία που είναι μεγαλύτερα του p στη διάταξη αυτή, ανήκαν στο U, τότε το U περιέχει ενα άπειρο τόξο της γραμμής B_0, άρα είναι πυκνό στο B. Αυτό όμως είναι αδύνατο γιατί το U είναι κλειστό υποσύνολο του συνεχούς B και διαφορετικό από το B, οπότε δεν μπορεί να είναι πυκνό στο B. Αρα, στην παραπάνω διαταξη, μετά από το σημείο p, υπάρχει ένα σημείο q στο B_0, το οποίο δεν ανήκει στο U (Σχήμα 46). Επειδή το $q \notin U$, υπάρχει κύκλος με κέντρο το q, που δεν τέμνει το κλειστό σύνολο U. Μέσα στον κύκλο αυτό μπορούμε να κόψουμε όλο το συνεχές B και να ξεχωρίσουμε με αυτόν τον τρόπο το κομμάτι της γραμμής B_0, που περιέχεται ανάμεσα στο $(0, 0)$ και το q, και να το καλύψουμε με ένα στενό ¨φίδι¨ του οποίου το σύνορο δεν τέμνει το U. Τα πλάγια όρια του ¨φιδιού¨ βρίσκονται έξω από το B και το σύνορο του το οποίο τέμνει το B μόνο στον κύκλο με κέντρο το q. Επειδή το ¨φίδι¨ αυτό μπορεί να εκλεγεί οσοδήποτε ¨στενό¨, δηλαδή οσοδήποτε κοντά στο μέρος της γραμμής B_0, μεταξύ $(0, 0)$ και q, μπορεί να διαχωρίσει οποιοδήποτε προκαθορισμένο σημείο $r \notin B_0$ από το μέρος αυτό (εδώ υπονοείται σιωπηλά το Θεώρημα του Jordan που θάναφέρουμε αργότερα). Αλλά αφού το U είναι συνεκτικό, το σημείο r δεν μπορεί να ανήκει στο U: από αυτό προκύπτει ότι $U \subset B_0$. □

Παρατηρούμε ότι το αναποσυνθέσιμο συνεχές B είναι αδιάσπαστο μεταξύ κάθε ζεύγους σημείων p και q, τέτοιων που $p \in B_0$, $q \in B - B_0$. Αρα, είναι σε μεγάλο βαθμό αδιάσπαστο, διότι και τα δυο σύνολα B_0 και $B - B_0$ είναι πυκνά στο B. Την ιδιότητα αυτή την έχουν όλα τα αναποσυνθέσιμα συνεχή. ...

3.2.4 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Το καρτεσιανό γινόμενο $B \times I$ του αναποσυνθέσιμου συνεχούς B με το διάστημα I είναι υποσύνολο του τρισδιάστατου ευκλείδιου χώρου $\Re^3 = \Re^2 \times \Re^1$, επειδή $B \subset \Re^2$ και $I \subset \Re^1$. Αυτό είναι ένα είδος επιφάνειας (Σχήμα 47), περιέχει αποσυνθέσιμα υποσυνεχή. Πραγματικά



Σχήμα 47: Η επιφάνεια του παραδείγματος 3.2.4.

στο B περιέχονται τόξα τα οποία είναι αποσυνθέσιμα συνεχή.

...

Μία ιδιότητα Π σε ένα συνεχές Q λέγεται ότι έιναι *κληρονομική* αν και κάθε υποσυνεχές του Q έχει την ιδιότητα . Ετσι υπάρχουν συνεχή *κληρονομικά αναποσυνθέσιμα*, δηλαδή που είναι αναποσυνθέσιμα και συγχρόνως κάθε υποσυνεχές τους είναι αναποσυνθέσιμο. Προφανώς, μιλάμε για κληρονομικά αναποσυνθέσιμα συνεχή, που δεν είναι μονοσύνολα. Ενα μονοσύνολο μπορεί να θεωρηθεί τετριμμένο παράδειγμα κληρονομικα αναποσυνθέσιμου συνεχούς.

Μία οικογένεια συνόλων $\mathcal{D} = \{D_i : i = 1, 2, \ldots, k\}$ λέγεται ότι είναι μια *αλυσίδα συνόλων* αν κάθε δυο διαδοχικά σύνολα της οικογένειας έχουν μή κενή τομή κι όλα τ'αλλα ζεύγη της οικογένειας είναι ξένα μεταξύ τους. Δηλαδή η $D_i \cap D_j \neq \emptyset$ ισχύει αν και μόνο αν $| i - j | \leq 1$, για κάθε ζεύγος αριθμών $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$.

Το πρώτο κληρονομικά αναποσυνθέσιμο μονοσυνεχές κατασκεύασε ο Knaster το 1922. Αυτό το συνεχές K του Knaster καλείται *ψευδοτόξο* ή *συνεχές του Knaster* . Το ψευδοτόξο K λαμβάνεται ως τομή μιας φθίνουσας ακολουθίας από συνεχή στο επίπεδο, που το καθένα είναι ένωση πεπερασμένου πλήθους δίσκων, οι οποίοι σχηματίζουν μια αλυσίδα συνόλων.

Θεωρούμε αλυσίδες

$$\mathcal{D} = (D_1, D_2, \ldots, D_k)$$

δίσκων D_i στο επίπεδο με την ιδιότητα, κάθε δυο διαδοχικοί δίσκοι D_i και D_{i+1}, να έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, δηλαδή η τομή τους (η οποία από υπόθεση δεν είναι κενή), δεν περιέχεται στο σύνορο κανενός από αυτούς (βλέπε Σχήμα 48).

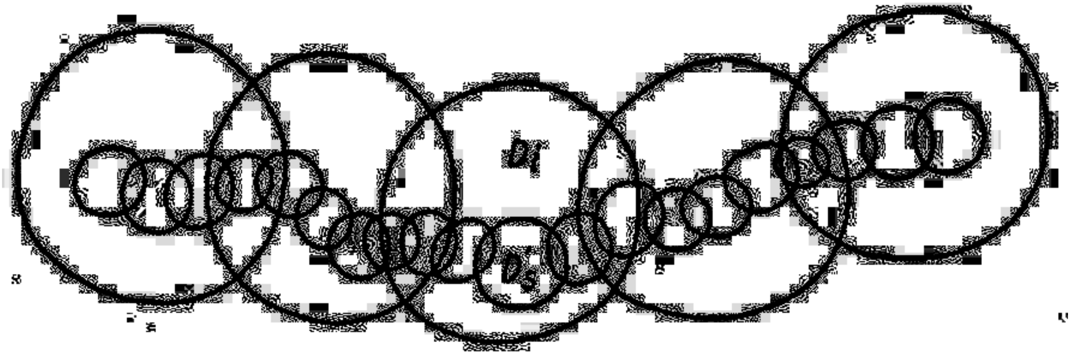
Σχήμα 48: Η αλυσίδα δίσκων D_i στο επίπεδο.

Τους δίσκους αυτους τους ονομάζουμε *κρίκους* της αλυσίδας $\mathcal{D}$. Η ένωση όλων των κρίκων της $\mathcal{D}$ είναι συνεχές. Παρατηρούμε δηλαδή, ότι αν αφαιρέσουμε από την αλυσίδα $\mathcal{D}$ έναν όχι ακραίο κρίκο, δηλαδή κρίκο D_i με $1 < i < k$, τότε η έωση των υπολοίπων δεν είναι συνεκτικό σύνολο και έχει δυο συνεκτικές συνιστώσες.

Εστω ότι έχουμε δυο αλυσίδες δίσκων $\mathcal{D}$ και $\mathcal{D}'$. Λέμε ότι η $\mathcal{D}'$ είναι *εγγεγραμμένη* μέσα στην $\mathcal{D}$, αν κάθε κρίκος D'_s της $\mathcal{D}'$ είναι εσωτερικό υποσύνολο σ'ενα τουλάχιστον κρίκο D_i της αλυσίδας $\mathcal{D}$, δηλαδή αν για κάθε D'_s υπάρχει D_i τέτοιος ώστε: $D'_s \subset D_i$ και δεν υπάρχουν σημεία του D'_s κοινά με το σύνορο του δίσκου D_i (Σχήμα 49). Λέμε ότι η αλυσίδα $\mathcal{D}'$ είναι *πτυσσόμενη στην αλυσίδα* $\mathcal{D}$, όταν η $\mathcal{D}'$ είναι εγγεγραμμένη στην $\mathcal{D}$ κι ακόμα για κάθε ζεύγος κρίκων D_i, D_j της αλυσίδας $\mathcal{D}$, τέτοιων ώστε:

$$(*) \qquad i + 2 < j$$

και για κάθε ζεύγος κρίκων D'_s και D'_u της αλυσίδας $\mathcal{D}'$, οι οποίοι τέμνουν τους D_i και D_j αντίστοιχα, δηλαδή: $D_i \cap D'_s \neq \emptyset \neq D_j \cap D'_u$, υπαρχουν στην αλυσιδα $\mathcal{D}'$ κρίκοι D'_t και D'_v, που βρίσκονται μεταξύ των κρίκων D'_s και D'_u



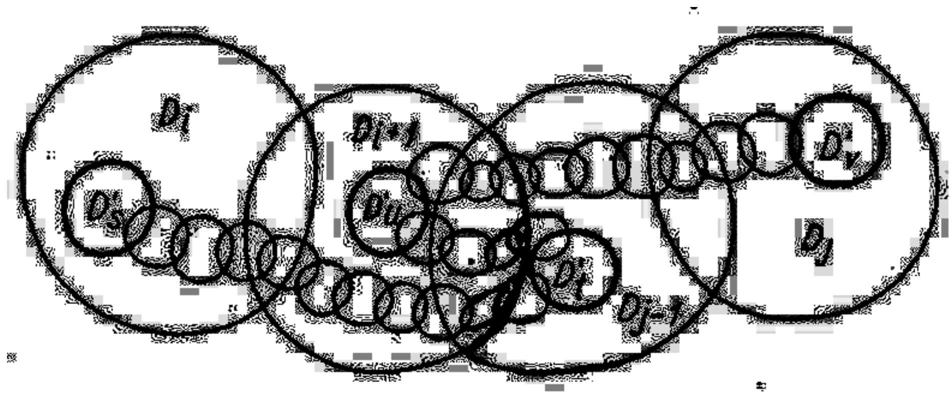
Σχήμα 49: Ένα από τα D'_s για το οποίο υπάρχει D_i τέτοιος ώστε: $D'_s \subset D_i$ και δεν υπάρχουν σημεία του D'_s κοινά με το σύνορο του δίσκου D_i.

με την ίδια διάταξη, δηλαδή:

$$s < t < v < u \quad 'h \quad s > t > v > u,$$

τέτοιοι ώστε:

$$(**) \qquad D'_t \subset D_{j-1} \; και \quad D'_v \subset D_{i+1}.$$



Σχήμα 50: Η πτύχωση για τέσσερις συνεχόμενους κρίκους.

Με άλλα λόγια, ένα κομμάτι της αλυσίδας $\mathcal{D}'$, το οποίο περιέχεται ανάμεσα στους κρίκους D'_s και D'_u πρέπει να σχηματίζει πτυχή στην αλυσίδα $\mathcal{D}$ μεταξύ των κρίκων D_i και D_j (βλέπε Σχήμα 50). Η αλυσίδα $\mathcal{D}'$, για να περάσει από το D_i στο D_j, πρέπει πρώτα να πάει στο D_{j-1} μετά να γυρίσει στο D_{i+1} και μετά μπορεί να πάει στον D_j. Μια τέτοια πτύχωση πρέπει να υπάρχει, για κάθε ζεύγος κρίκων D_i και D_j, που δεν έχουν κοινό γειτονικό κρίκο.

...

3.2.5 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Το ψευδοτόξο*: Μας δίνονται δυο διαφορετικά σημεία a και b στο επίπεδο και μια άπειρη ακολουθία

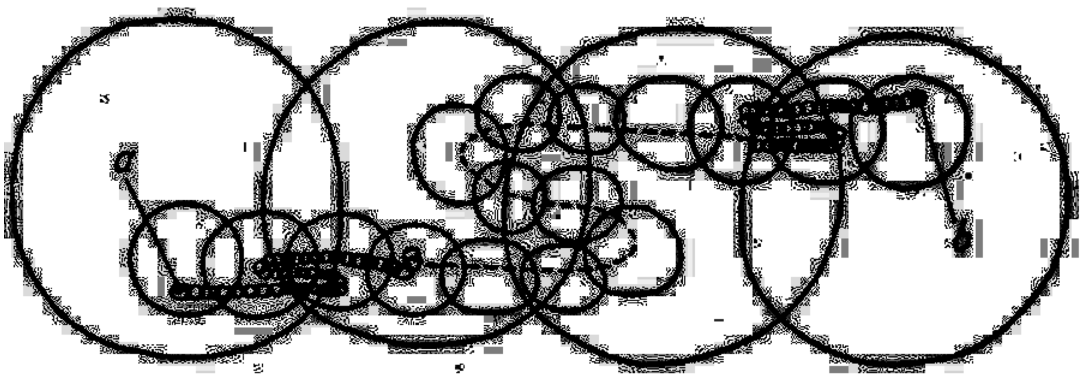
$$\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, ..., \mathcal{D}_n, \dots$$

αλυσίδων από δίσκους, τέτοιες ώστε για κάθε $n = 1, 2, \dots$ να ικανοποιούν τις παρακάτω συνθήκες:

1. Το σημείο a ανήκει στον πρώτο και το b στον τελευταίο κρίκο της αλυσίδας $\mathcal{D}_n$.

2. Η διάμετρος κάθε δίσκου στην αλυσίδα $\mathcal{D}_n$ είναι μικρότερη από $\frac{1}{n}$.

3. Κάθε αλυσίδα $\mathcal{D}_{n+1}$ είναι πτυσσόμενη στην αλυσίδα $\mathcal{D}_n$.



Σχήμα 51: Ένα μέρος της $\mathcal{D}_3$ που είναι πτυσσόμενη στην αλυσίδα $\mathcal{D}_2$.

Αρα, για παράδειγμα η αλυσίδα $\mathcal{D}_2$ είναι πτυσσόμενη στην $\mathcal{D}_1$ και η αλυσίδα $\mathcal{D}_3$ είναι πτυσσόμενη στην αλυσίδα $\mathcal{D}_2$ (στο Σχήμα 51 βρίσκεται μόνο ένα μέρος της $\mathcal{D}_3$). Οι πτυχώσεις συμπυκνώνονται και τοποθετούνται η μια πάνω στην άλλη.

Ας συμβολίσουμε με K_n την ένωση όλων των δίσκων της αλυσίδας $\mathcal{D}_n$. Από την συνθήκη (3) έπεται ότι κάθε επόμενη αλύσίδα είναι εγγεγραμένη μέσα στην προηγούμενη, άρα τα συνεχή K_n σχηματίζουν μια φθίνουσα ακολουθία:

$$K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_n \supset \dots$$

Το ψευδοτόξο K ορίζεται ως η τομή όλων των K_n, δηλαδή

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$$

.

Με βάση την συνθήκη (1) τα σημεία a και b ανήκουν στο K, άρα αυτό δεν είναι μονοσύνολο. □

...

3.2.6 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Το συνεχές K είναι κληρονομικά αναποσυνθέσιμο.*

Εστω τυχαίο συνεχές $K' \subset K$. Για νάποδείξουμε ότι το K' είναι αναποσυνθέσιμο αρκεί να δείξουμε ότι κάθε συνεχές $U \subset K'$, διαφορετικό από το K', είναι πουθενά πυκνό στο K'. Θεωρούμε τυχαίο σημείο $p \in U$ και ένα $e > 0$.

Επειδή $K' \neq U$ υπάρχει σημείο $q \in K' - Y$ και ένας αριθμός $h > 0$ τέτοια, ώστε η απόσταση του q από κάθε σημείο $y \in Y$ να είναι μεγαλύτερη από h. Πραγματικά αν δεν συνέβαινε αυτό, τότε θα υπήρχαν σημεία του U οσοδήποτε κοντά στο q, άρα το σημείο q θα ανήκε στην κλειστή θήκη του U. Αυτό όμως είναι αδύνατο, διότι το σύνολο U είναι κλειστό και δεν περιέχει το σημείο q.

Εστω ότι n είναι ένας φυσικός αριθμός τέτοιος, ώστε να ισχύουν οι ανισότητες

$$\frac{2}{n} < e \quad kai \quad \frac{3}{n} < h$$

.

Συμβολίζουμε με D_i και D_j $(i < j)$ τους δίσκους της αλυσίδας $\mathcal{D}_n$, των οποίων η ένωση περιέχει τα σημεία p και q. Επειδή $p \in Y$, έχουμε $d(p,q) \geq h$, κι από αυτό προκύπτει ότι ανάμεσα στους κρίκους D_i και D_j βρίσκονται δυο τουλάχιστον κρίκοι της αλυσίδας $\mathcal{D}_n$. Πραγματικά, σε αντίθετη περίπτωση οι κρίκοι D_i και D_j θα είχαν γειτονικό κρίκο κι αν διαλέξουμε τα σημεία p' και q', αντίστοιχα έτσι ώστε να ανήκουν στος τομές του κρίκου αυτού με τους κρίκους D_i και D_j θα έχουμε:

$$d(p,q) \leq d(p,p') + d(p',q') + d(q',q) < 1/n + 1/n + 1/n = 3/n < h$$

με βάση την συνθήκη (2). Αρα, μπορούμε να δεχτούμε ότι οι δείκτες i και j ικανοποιούν την ανισότητα (*). Επιπλέον το σημείο p ανήκει σε έναν από τους D_i και D_j και το q στον δεύτερο από αυτούς.

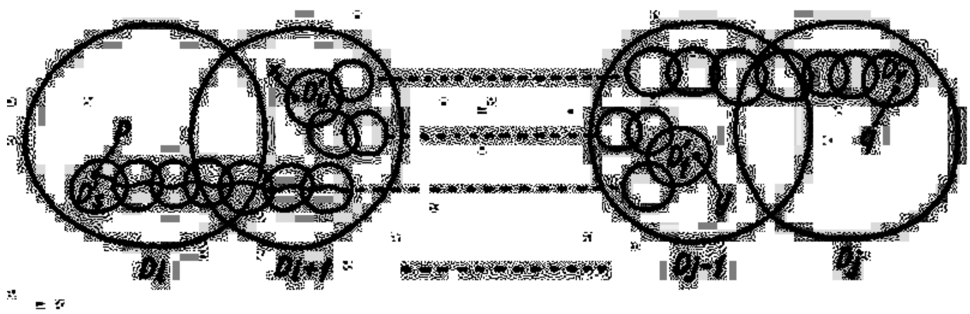
Ας συμβολίσουμε D'_s και D'_v τους κρίκους της αλυσίδας $\mathcal{D}_{n+1}$, οι οποίοι περιέχουν τα p και q αντίστοιχα. Δεχόμαστε ότι $p \in D_i$ Στην περίπτωση που $p \in D_j$ η απόδειξη είναι όμοια.

Άρα:

$$p \in D_i \cap D'_s \quad kai \quad q \in D_j \cap D'_v,$$

και συνεπώς με βάση την συνθήκη (3) και τον ορισμό της πτύχωσης μιας αλυσίδας έπεται ότι υπάρχουν στην $\mathcal{D}_{n+1}$ δυο κρίκοι D'_t και D'_u, οι οποίοι βρίσκονται ανάμεσα στους κρίκους D'_s και D'_v με την ίδια διάταξη και ικανοποιούν τους εγκλεισμούς (**). Η ένωση όλων των δίσκων της αλυσίδας $\mathcal{D}_{n+1}$, αν αφαιρέσουμε τον D'_u, είναι μη συνεκτικό σύνολο και περιέχει στη μια συνεκτική συνιστώσα του το σημείο p και στην άλλη το σημείο q. Επειδή το συνεχές K' ενώνει τα σημεία p και q και περιέχεται στην ένωση K_{n+1} όλων των κρίκων της αλυσίδας $\mathcal{D}_{n+1}$, έχουμε ότι περνάει από τον κρίκο D'_u. Αρα υπάρχει σημείο

$$x \in K' \cap D'_u,$$



Σχήμα 52: Το σημείο x που ανήκει στην τομή του K' και του D'_u της απόδειξης του Θεωρήματος 3.2.6.

(Σχήμα 52). Θα αποδείξουμε ότι το σημείο x δεν ανήκει στο συνεχές U. Πραγματικά αν $x \in U$ τότε, για το ίδιο λόγο όπως νωρίτερα για το συνεχές

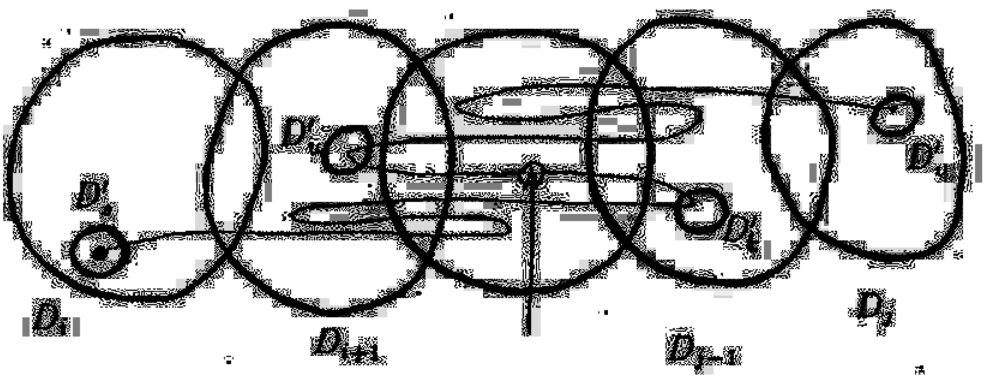
K', το συνεχές U θα έπρεπε να περνάει από τον κρίκο D'_t. Τότε θα υπήρχε ένα σημείο

$$y \in U \cap D'_t,$$

το οποίο με βάση την (**), θα ανήκε στον D_{j-1}. Ομως οι γειτονικοί κρίκοι D_j και D_{j-1} έχουν διαμέτρους μικρότερες από $\frac{1}{n}$ με βάση την συνθήκη (2), και συνεπώς θα προέκυπτε:

$$d(y,q) < \frac{2}{n} < \frac{3}{n} < h,$$

το οποίο αποκλείεται αφού $y \in U$.



Σχήμα 53: Η πτύχωση για 5 συνεχόμενους κρίκους με εμφανές κέντρο συμμετρίας.

Το σημείο x ανήκει στο σύνολο $K' - U$ και στον κρίκο D_{i+1} συγχρόνως. Οι γειτονικοί κρίκοι D_i και D_{i+1} έχουν διαμέτρους μικρότερες από $\frac{1}{n}$ επομένως προκύπτει ότι:

$$d(p,x) < \frac{2}{n} < e$$

.

Επειδή το e ήταν τυχαίος θετικός αριθμός έχουμε αποδείξει, ότι οσοδήποτε κοντά στο σημείο p υπάρχουν σημεία του συνόλου $K' - U$. Το p ήταν τυχαίο σημείο του συνεχούς U. Αποδείξαμε λοιπόν ότι το U είναι πουθενά πυκνό στο K' κι η απόδειξη της κληρονομικής αναποσυνθεσιμότητας του συνεχούς K τελείωσε. $\square$

...

Το κληρονομικά αναποσυνθέσιμο συνεχές του Knaster έχει ιδιαίτερη θέση στην ταξινόμηση των συνεχών. Η κληρονομική αναποσυνθεσιμότητα φαίνεται μια παράδοξη ιδιότητα. Μπορούμε να πούμε, ότι το συνεχές K είναι πόλος αντικανονικότητας από την άποψη της τοπολογικής του δομής. Στον άλλο πόλο βρίσκεται το τόξο, το οποίο είναι το πιο απλό από τοπολογική αποψη συνεχές, που δεν είναι μονοσύνολο. Ομως, όπως συμβαίνει συχνά, οι αντίθετοι πόλοι έχουν κάποια κοινά χαρακτηριστικά. Το 1948 ο Moise απόδειξε, ότι *το συνεχές K είναι ομοιομορφικό με κάθε υποσυνεχές του, που δεν είναι μονοσύνολο.* Την ίδια ιδιότητα έχει ένα τόξο. Γι΄ αυτό και το K ονομάζεται ψευδοτόξο. Το ψευδοτόξο είναι, με κάποια έννοια, μονοσήμαντα ορισμένο. Εδώ κατασκευάστηκε με την χρήση των καλύψεων από αλυσίδες δίσκων. Ενα από τα θεωρήματα του Bing λέει ότι *οποιοδήποτε κληρονομικά αναποσυνθέσιμο συνεχές, για το οποίο υπάρχουν πεπερασμένες ανοικτές καλύψεις, οι οποίες είναι αλυσίδες συνόλων με οσοδήποτε μικρή διάμετρο, είναι ομοιομορφικό με το ψευδοτόξο.*

4. ΤΟΠΙΚΑ ΣΥΝΕΚΤΙΚΑ ΣΥΝΕΧΗ

§. 4.1 Ο ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΜΟΣ SIERPIŊSKI ΤΗΣ ΤΟΠΙΚΗΣ ΣΥΝΕΚΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

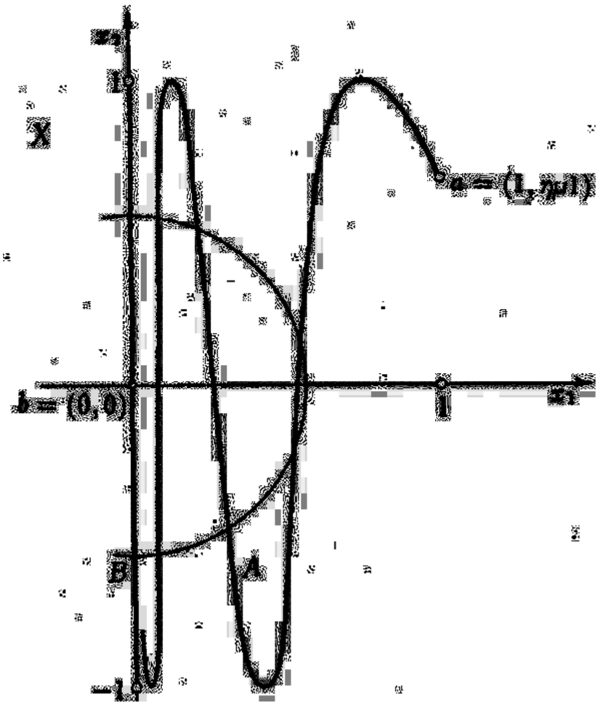
Λέμε ότι ένας χώρος Q είναι *τοπικά συνεκτικός* σ'ενα σημείο x, αν για κάθε περιοχή U του σημείου x υπάρχει ένα συνεκτικό σύνολο $C \in U$ με $x \in intC$. Αν τώρα η συνθήκη αυτή ισχύει για κάθε σημείο του χώρου Q, τότε αυτός λέγεται ότι είναι *τοπικά συνεκτικός*. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το διάστημα I είναι τοπικά συνεκτικό συνεχές. Ο n-διάστατος Ευκλείδιος χώρος $\Re^n$, η σφαιρική επιφάνεια S^n είναι τοπικά συνεκτικά συνεχή. Τα παραδείγματα που δώσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο δεν είναι τοπικά συνεκτικά συνεχή. Επίσης η συμπυκνωμένη ημιτονοειδής καμπύλη (Παράδειγμα 2.6.3) δεν είναι τοπικά συνεκτική στα σημεία της μορφής $\{(0, x_2)\ : -1 \leq x_2 \leq 1\}$ (βλέπε στο Σχήμα 54).

Θα δώσουμε όμως τώρα ένα παράδειγμα τοπικά συνεκτικού συνεχούς με παράξενες ιδιότητες.

4.1.1 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Το χαλί του Sierpinski.*Ας μοιράσουμε ένα τετράγωνο σε 9 ίσα μέρη κι ας αφαιρέσουμε το εσωτερικό του μεσαίου τετραγώνου (Σχήμα 55(a)).

Το σύνολο S_1 που θα παραμείνει είναι η ένωση 8 ίσων τετραγώνων, που το καθένα μπορούμε να το μοιράσουμε σε 9 ίσα τετράγωνα και νάφαιρέσουμε τα εσωτερικά των μεσαίων τετραγώνων (Σχήμα 55(b)).Το σύνολο S_2 που απομένει είναι ένωση 64 τετραγώνων. Αν κάθ'ενα από αυτά το χωρίσουμε σε 9 ίσα τετράγωνα και αφαιρέσουμε πάλι το εσωτερικά των μεσαίων τετραγώνων θα προκύψει το σύνολο S_3 ως ένωση 8^3 τετραγώνων (Σχήμα 55(c)).

Η διαδικασία αυτή μπορεί να συνεχιστεί. Στο n-στο βήμα μοιράζουμε τα 8^{n-1} τετράγωνα του S_{n-1} συνόλου σε 9 ίσα τετράγωνα, αφαιρούμε τα



Σχήμα 54: Ο χώρος X δεν είναι τοπικά συνεκτικός στο σημείο b, καθώς το σημείο δεν βρίσκεται στο εσωτερικό μιας οσοδήποτε μικρής συνεκτικής περιοχής.

εσωτερικά των μεσαίων και κατασκευάζουμε το S_n σύνολο που είναι η ένωση των 8^n ίσων τετραγώνων.

Το κάθε σύνολο S_n είναι συνεχές για $n = 1, 2, \ldots$ και τα σύνολα αυτά καθορίζουν μια ακολουθία φθίνουσα με:

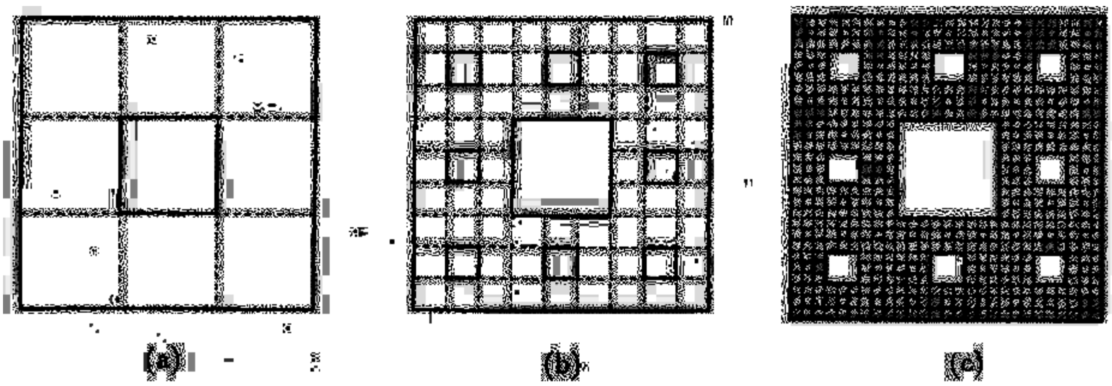
$$S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \ldots \supset S_n$$

Η τομή των συνεχών αυτών είναι συνεχές (βλέπε Θεώρημα 3.1.3). Είναι λοιπόν το συνεχές

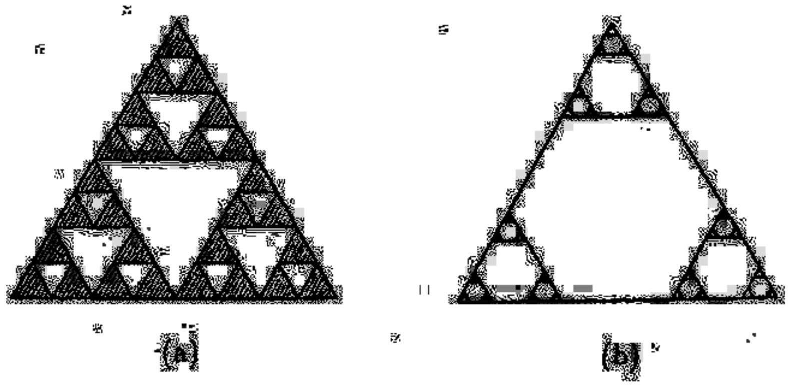
$$S = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$$

κι ονομάζεται *χαλί του Sierpiŋski* . Τα σημεία που περιέχει το χαλί του Sierpinski είναι όλα εκείνα που αποτέλεσαν πλευρές των τετραγώνων που αφαιρέθηκαν αλλά και πολλά άλλα. □

Τοπικά συνεκτικά συνεχή όμοια με το S μπορούμε να κατασκευάσουμε αν ξεκινήσουμε από το τρίγωνο κι αφαιρέσουμε τα εσωτερικά των μεσαίων τριγώνων η των εξαγώνων (Σχήματα 56(a) και 56(b)αντίστοιχα).



Σχήμα 55: Τρία πρώτα βήματα κατασκευής του χαλιού του Sierpinski.



Σχήμα 56: Τοπικά συνεκτικά συνεχή όμοια με το S ξεκινώντας από τρίγωνο.

...

4.1.2 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ενας χώρος* Q *είναι τοπικά συνεκτικός αν και μόνο αν για κάθε ανοικτό σύνολο* $U \subset X$, *οι συνιστώσες του υπόχωρου* U *είναι ανοικτά υποσύνολα του υπόχωρου* Q.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εστω ότι U είναι ένα ανοικτό υποσύνολο ενός τοπικά συνεκτικού χώρου Q και S είναι μια οποιαδήποτε συνιστώσα του χώρου U. Από την τοπική συνεκτικότητα του Q για κάθε σημείο $x \in S$ υπάρχει ένα συνεκτικό σύνολο $C \subset U$ τέτοιο ώστε $x \in intC$. Από την συνεκτικότητα του C έχουμε ότι $x \in intC \subset C \subset S$ κι άρα S είναι ανοικτό υποσύνολο του χώρου Q.

Ας δεχτούμε τώρα ότι ο χώρος Q ικανοποιεί την συνθήκη του Θεωρήματος κι ας πάρουμε ένα τυχαίο σημείο $x \in X$ και την περιοχή του U. Εστω ότι C είναι η συνιστώσα του υπόχωρου $U \subset X$ η οποία περιέχει το x. Αφού το C είναι συνεκτικό σύνολο, $C \subset U$ και $x \in C = intC$, έπεται ότι ο χώρος Q είναι τοπικά συνεκτικός. □

...

Θυμίζουμε εδώ τον ορισμό της βάσης ενός χώρου. Μια οικογένεια $\mathcal{B} = \{V_s\}_{s\in S}$ που αποτελείται από ανοικτά σύνολα ενός μετρικού χώρου Q θα ονομάζεται *βάση του χώρου* Q, αν κάθε μή κενό ανοικτό σύνολο $U \subset X$ μπορεί να εκφραστεί ως ένωση από στοιχεία της $\mathcal{B}$, δηλαδή υπάρχει ένα σύνολο $S(U) \subset S$ τέτοιο ώστε $U = \bigcup_{s\in S(U)} V_s$.

...

4.1.3 ΠΟΡΙΣΜΑ. *Ενας χώρος Q είναι τοπικά συνεκτικός αν και μόνο αν έχει μια βάση αποτελουμένη από χωρία.* □

...

Ενας χώρος Q ονομάζεται *τοπικά κατά μονοπάτια συνεκτικός σ'ενα σημείο* x αν για κάθε περιοχή U του σημείου x υπάρχει περιοχή V του σημείου που περιέχεται στο U και τέτοια ώστε για κάθε ζεύγος σημείων $x', x'' \in V$ υπάρχει μονοπάτι από το x' στο x'' το οποίο περιέχεται μέσα στην U. Αν ο χώρος είναι τοπικά κατά μονοπάτια συνεκτικός σε κάθε σημείο του τότε λέμε ότι ο χώρος είναι τοπικά κατά μονοπάτια συνεκτικός.

4.1.4 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν ένας χώρος Q είναι τοπικά κατά μονοπάτια συνεκτικός σ'ενα σημείο x, τότε αυτός είναι και τοπικά συνεκτικός στο σημείο αυτό.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε μια τυχαία περιοχή U του σημείου x. Εστω ότι $V \subset U$ είναι μια περιοχή του x με την ιδιότητα ότι για κάθε δυο σημεία $x', x'' \in V$ υπάρχει ένας δρόμος από το x' στο x'' στο U. Για κάθε σημείο $x' \in V$ εκλέγουμε μέσα στην U ένα μονοπάτι $e_{x'} : I \to U$ από το x στο x'. Από το Θεώρημα 2.4.5 προκύπτει ότι το σύνολο $C = \bigcup_{x'\in V} e_{x'}(I)$ είναι συνεκτικό, και προφανώς $x \in \bigcap_{x'\in V} e_{x'}(I)$. Αφού $C \subset U$ και $x \in V \subset intC$, ο χώρος Q είναι τοπικά συνεκτικός στο σημείο x.□

4.1.5 ΠΟΡΙΣΜΑ. *Κάθε τοπικά κατά μονοπάτια συνεκτικός χώρος είναι τοπικά συνεκτικός.* □

...

Ενα βασικό Θεώρημα που χαρακτηρίζει την τοπική συνεκτικότητα είναι το επόμενο.

4.1.6 ΘΕΩΡΗΜΑ. (Sierpiņski). *Ενα συμπαγής μετρικός χώρος Q είναι τοπικά συνεκτικός αν και μονο αν, για κάθε θετικό αριθμό e υπάρχει μια πεπερασμένη κάλυψη του Q αποτελούμενη από συνεχή που το καθένα έχει διάμετρο μικρότερη από e.*□

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Θεωρούμε ένα τοπικά συνεκτικό και συμπαγή χώρο Q. Εστω ότι e είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Από το Πόρισμα 4.1.3 έπεται ότι υπάρχει μια ανοικτή κάλυψη $\{U_t\}_{t\in T}$ του χώρου Q αποτελούμενη από συνεκτικά σύνολα με διάμετρο μικρότερη από e. Από το Θεώρημα των Borel-Lebesgue 1.6.11 υπάρχει μια πεπερασμένη ακολουθία $t_1, t_2, \dots, t_m \in T$ τέτοια ώστε

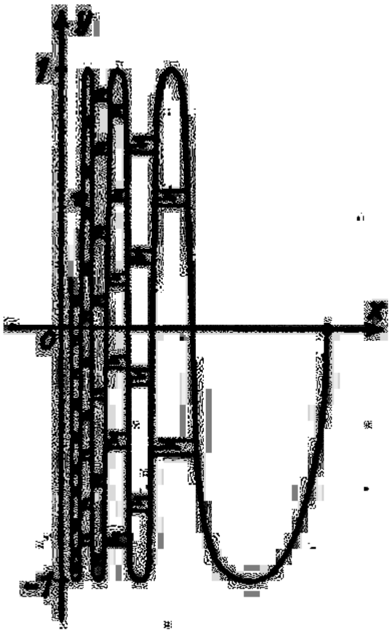
$$Q = U_{t_1} \cup U_{t_2} \cup \dots \cup U_{t_m}.$$

Οι υπόχωροι $C_i = clU_{t_i}$ του χώρου X είναι για κάθε $i = 1, 2, \dots, m$ συνεχή με διάμετρο μικρότερη από e και συνιστούν μια κάλυψη του χώρου Q.

Δεχόμαστε τώρα ότι ο δεδομένος συμπαγής χώρος ικανοποιεί τις συνθήκες που αναφέρονται στην εκφώνηση. Εστω ότι x είναι τυχαίο σημείο του Q κι έστω ότι U είναι μια περιοχή του x. Μας δίνεται ένας θετικός πραγματικός αριθμός e τέτοιος ώστε $B(x, e) \subset U$ και θεωρούμε μια πεπερασμένη κάλυψη $\{C_i : i = 1, 2, \dots, m\}$ του χώρου Q με συνεχή που έχουν διάμετρο μικρότερη από e. Επαναριθμούμε τώρα τα στοιχεία της κάλυψης αν είναι αναγκαίο, ώστε $x \in C_i$ για $i = 1, 2, \dots, k$ και $x \notin C_i$, για $i = k+1, k+2, \dots, m$. Από το Θεώρημα 2.4.5 έπεται ότι το σύνολο $C = C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k$ είναι συνεκτικό. Προφανώς, $C \subset B(x, e) \subset U$. Τώρα $X \backslash C \subset C_{k+1} \cup C_{k+2} \cup \dots . \cup C_m$, άρα ισχύει ότι $cl(X \backslash C) \subset C_{k+1} \cup C_{k+2} \cup \dots \cup C_m$, απ'οπου προκύπτει ότι $x \in X \backslash cl(X \backslash C) = intC$. Εχουμε έτσι δείξει ότι ο χώρος Q είναι τοπικά συνεκτικός. □

4.1.7 ΠΟΡΙΣΜΑ. *Η ενωση πεπερασμένου αριθμού τοπικά συνεκτικών συνεχών είναι τοπικά συνεκτικό συνεχές.* □

Ωστόσο η τομή δυο τοπικά συνεκτικών συνεχών δεν ειναι πάντα τοπικά συνεκτικό συνεχές.] το αντίθετο είναι το εξής.



Σχήμα 57: Ενώ τα C_1 και C_2 είναι τοπικά συνεκτικά, η τομή τους δεν είναι.

4.1.8 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Παίρνουμε την συμπυκνωμένη ημιτονοειδή. Είναι εύκολο να δούμε ότι αυτή δεν είναι τοπικά συνεκτικό συνεχές. Προχωρούμε στην εξής κατασκευή. Ανάμεσα σε δυο διαδοχικές κυμάνσεις της ημιτονοειδούς βάζουμε τόξα ώστε να τις συνδέουν, όπως στο Σχήμα 57. Φροντίζουμε ώστε ανάμεσα σε δυο διαδοχικές κυμάνσεις να βρίσκεται πεπερασμένο πλήθος συνδετικών τόξων κι έτσι που το πλήθος τους νάυξάνει ενώ το μήκος τους να μειώνεται όσο πλησιάζουμε στον άξονα των y.

Καλούμε C_1 την ένωση της ημιτονοειδούς με τα τόξα αυτά, που εχουν πληθος αριθμήσιμο. Ομοια κατασκευάζουμε το C_2 και προσέχουμε τα συνδετικά τόξα να είναι ξένα με εκείνα του C_1. Οπως φαίνεται στο Σχήμα 57, τα συνδετικά τόξα του C_1 ειναι ευθύγραμμα τμήματα ενώ του C_2 είναι οι μικρές τεθλασμένες γραμμές.

...

Προχωρούμε στην εξής πρόταση:

4.1.9 ΠΡΟΤΑΣΗ. *Η συνεχής εικόνα τοπικά συνεκτικού συνεχούς είναι τοπικά συνεκτικό συνεχές.* X τοπικά συνεκτικό συνεχές και $f : X \to Y$ συνάρτηση επί.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Γνωρίζουμε ότι η εικόνα συνεχούς είναι επίσης συνεχές

(Πόρισμα 3.1.1). Εστω $e > 0$. Ας καλύψουμε το U με ανοικτές σφαίρες ακτίνας $\frac{e}{4}$. Μια κάλυψη με άπειρες τέτοιες σφαίρες που έχουν κέντρο τυχαίο σημείο $y \in Y$ κι ακτίνα $\frac{e}{4}$. Από το Θεώρημα Borel-Lebesque (1.6.11) υπάρχει μια πεπερασμένη υποκάλυψη του U:

$$U = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_k$$

με ανοικτές σφαίρες B_i του Yπου έχουν διάμετρο:

$$diam(B_i) < \frac{e}{2} < e.$$

Εξάλλου αφού η f είναι συνεχής οι αντίστροφες εικόνες $f^{-1}(B_i)$ είναι ανοικτά υποσύνολα του Q κι έχουμε ότι:

$$Q = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2) \cup \ldots \cup f^{-1}(B_k)$$

δηλαδή αποτελούν μια κάλυψη (η διαμέριση) του Q. Εστω ότι $l > 0$ είναι ο αριθμός Lebesque της κάλυψης. Από το Θεώρημα του Sierpiņski (4.1.8) υπάρχει αποσύνθεση:

$$Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \ldots \cup Q_m$$

του Q σε συνεχή Q_j τέτοια ώστε $diam(Q_j) < l$ για $l = 1, 2, \ldots, m$. Επεται λοιπόν ότι κάθε συνεχές Q_j περιέχεται σ'ενα απο τα σύνολα $f^{-1}(B_i)$ δηλαδή

$$Q_j \subset f^{-1}(B_{i_j})$$

απ'οπου έχουμε ότι

$$f(X_j) \subset B_{i_j}$$

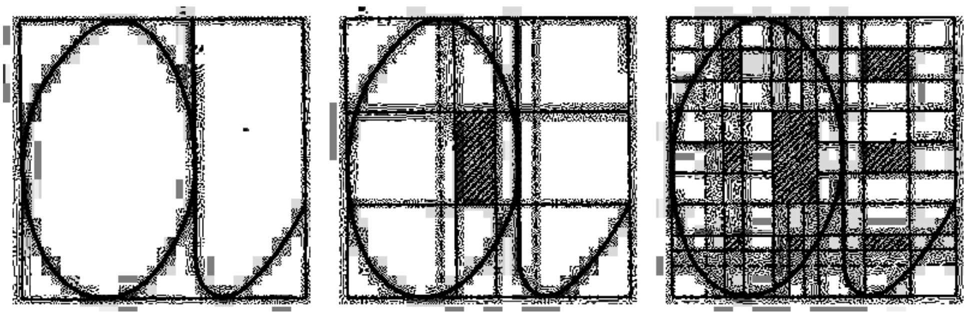
για $j = 1, 2, \ldots, m$, με συνέπεια τα συνεχή $f(X_i)$ να έχουν διαμέτρους:

$$diam[f(X_i)] \leq diam(B_{i_j}) < e$$

κι αποτελούν κάλυψη (η διαμέριση) του U,

$$U = f(X) = f(X_1) \cup f(X_2) \cup \ldots \cup f(X_m)$$

που σημαίνει ότι σύμφωνα με το Θεώρημα Sierpiņski ότι το $f(X)$ είναι τοπικά συνεκτικό. □



Σχήμα 58: Η κατασκευή ενός συνόλου ομοιομορφικού προς την καθολική καμπύλη του Sierpinski που να περιέχει μια δεδομένη καμπύλη του επιπέδου.

...

Από την παραπάνω διαπίστωση προκύπτει ότι δεν μπορεί η συμπυκνωμένη ημιτονοειδής να είναι ομοιομορφική με το μοναδιαίο διάστημα *I*.

...

4.1.10 ΠΡΟΤΑΣΗ. *Το καρτεσιανό γινόμενο τοπικά συνεκτικών συνεχών είναι τοπικά συνεκτικό συνεχές.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Υποθέτουμε ότι Q_1 και Q_2 είναι τοπικά συνεκτικά συνεχή. Το καρτεσιανό γινόμενο $Q_1 \times Q_2$ είναι συνεχές (Πόρισμα 3.1.2)

Για νάποδείξουμε ότι το $Q_1 \times Q_2$ είναι τοπικά συνεκτικό συνεχές αρκεί να δείξουμε ότι πληρεί την συνθήκη που προκύπτει από το Θεώρημα του Sierpinski .

Εστω ένα $e > 0$. Αφου Q_1 και Q_2 ειναι τοπικά συνεχή συνεχή έχουμε τις διαμερίσεις:

$$Q_1 = Q_{11} \cup Q_{12} \cup \ldots \cup Q_{1m}$$

$$X_2 = X_{21} \cup X_{22} \cup \ldots \cup X_{2n}$$

στα συνεχή Q_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ και με διάμετρο $diamQ_{1i} < \frac{e}{\sqrt{2}}$ και $diamQ_{2j} < \frac{e}{\sqrt{2}}$.

Τα συνεχή αυτά ορίζουν την διαμέριση:

$$Q_1 \times Q_2 = [(Q_{11} \times Q_{21}) \cup (X_{11} \times X_{22}) \cup \ldots \cup (X_{11} \times X_{2n})] \cup$$

$$\cup[(X_{12} \times X_{21}) \times (X_{12} \times X_{22}) \cup \ldots \cup (X_{12} \times X_{2n})] \cup$$

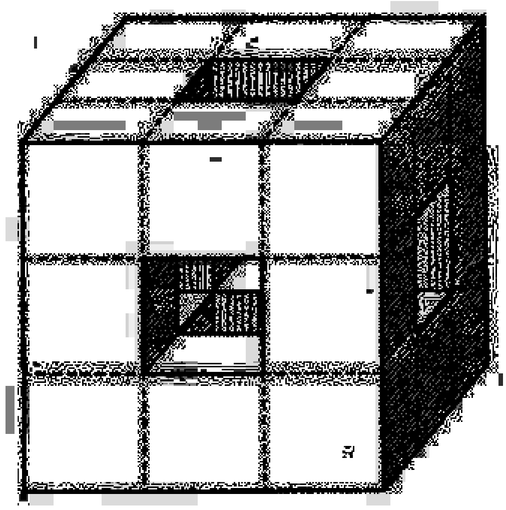
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\cup[(X_{1m} \times X_{21}) \cup (X_{1m} \times X_{22}) \cup \ldots \cup (X_{1m} \times X_{2n})]$$

όπου οι διάμετροι τους ικανοποιούν τις ανισότητες:

$$diam(Q_{1j} \times X_{2j}) \leq \{diam(Q_{1i})^2 + diam(Q_{2j})^2\}^{\frac{1}{2}} < \{\frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{2}\}^{\frac{1}{2}} = e$$

απ'οπου κι η τοπική συνεκτικότητα του $Q_1 \times Q_2$.□



Σχήμα 59: Η καθολική καμπύλη του Menger , αρχική φάση κατασκευής.

4.1.11 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Η καθολική καμπύλη του Menger* . Η κατασκευή του χαλιού του Sierpiņski μπορεί να γενικευτεί στην κατασκευή του λεγόμενου σφουγγαριού. Αυτό κατασκευάζεται από ενα κύβο που τον χωρίζουμε σε $2^7 = 92$ ίσους κύβους από οπου αφαιρούμε το εσωτερικό σε επτά απάυτούς. Η κατασκευή αυτή συνεχίζει με όμοιο τρόπο ώστε να προκύψει μια ακολουθία $F_1, F_2, \ldots$ συνεχών τέτοιων ώστε:

$$F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots \supset F_n.$$

Το τελικό συνεχές προκύπτει ως τομή

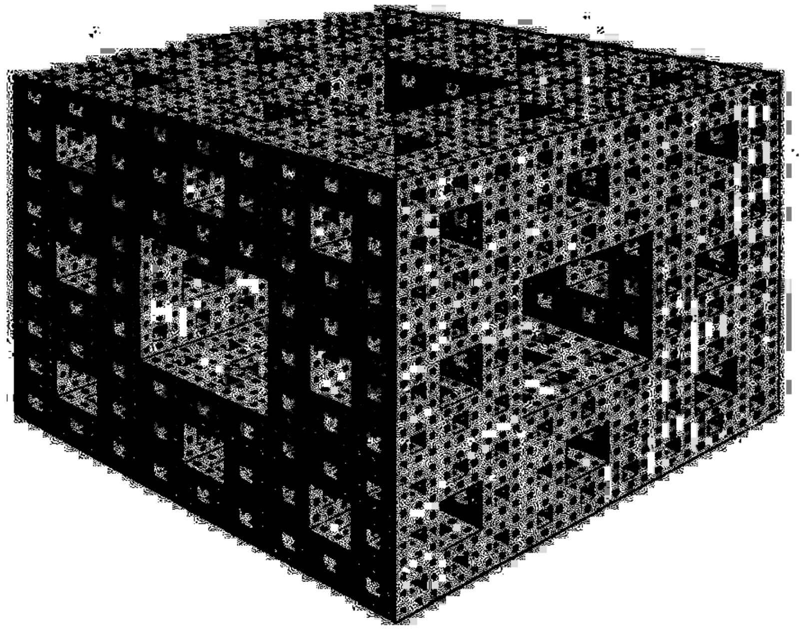
$$M = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Το χαλί S και το σφουγγάρι M έχουν την ιδιότητα να είναι *καθολικές καμπύλες* του επιπέδου και του τρισδιάστατου χώρου αντίστοιχα, που σημαίνει ότι κάθε καμπύλη του επιπέδου ή του χώρου αντίστοιχα, έχει ομοιομορφική εικόνα ένα υποσυνεχές του S ή του M αντίστοιχα.

Αποτελούν δηλαδή αυτές οι καμπύλες το ¨σύμπαν¨ όλων των καμπύλων του επιπεδου η του Ευκλειδίου τρισδιάστατου χώρου αντίστοιχα.

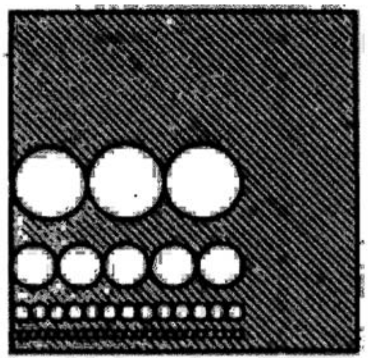
Αυτό για το χαλί του Sierpiņski μπορούμε να το δείξουμε για κάθε καμπύλη αν τοποθετήσουμε την τυχαία καμπύλη του επιπέδου σ'ενα τετράγωνο και φροντίζοντας κατά την κατασκευή του χαλιού του Sierpiņski μετακινούμε το τετράγωνο κατά τέτοιο τρόπο ώστε η καμπύλη να μην τέμνει ποτέ τα τετράγωνα που αφαιρούνται (βλέπε Σχήμα 58).

...



Σχήμα 60: Η καμπύλη του Menger , πέμπτη φάση κατασκευής.

4.1.12 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Το σύνορο ενός τοπικά συνεκτικού συνεχούς μπορεί να μην είναι ένα τοπικά συνεκτικό συνεχές. Εστω ότι έχουμε ένα τετράγωνο στο επίπεδο και μια ακολουθία συνεχών μέσα στο τετράγωνο το κάθ'ενα από τα οποία αποτελείται από μια ένωση πεπερασμένου πλήθους κύκλων που τέμνονται σ'ενα σημείο με το συνορό του τετραγώνου (βλέπε Σχήμα 61). Σε καθένα από τα συνεχή αυτά η διάμετρος των κύκλων είναι



Σχήμα 61: Το τετράγωνο με την ακολουθία των συνεχών μέσα σε αυτό (Παράδειγμα 4.1.12).

σταθερή κι ελλατώνεται καθ'οσον πλησιάζουμε την βάση του τετραγώνου. Ενα τμήμα της βάσης αποτελεί συνεχή σύγκλισης των συνεχών αυτών. Αν αφαιρέσουμε τα εσωτερικά των κύκλων αυτών θα προκύψει ένα τοπικά συνεκτικό συνεχές με σύνορο μη τοπικά συνεκτικό συνεχές που θα προκύψει από την ένωση των περιφερειών των κύκλων με την περίμετρο του τετραγώνου.

§. 4.2. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ MAZURKIEWICZ

Θα αποδείξουμε ένα σημαντικό Θεώρημα των Mazurkiewicz-Moore . Ξρειαζόμαστε όμως κάποιους ορισμούς.

Μας δίνεται ένας χώρος Q, ένα υποσύνολο U και δυο σημεία του $x, y \in U$. Ονομάζουμε μια ακολουθία περιοχών $V_1, V_2, \ldots, V_k$ του χώρου Q *αλυσίδα στο U συνδέουσα τα σημεία x και y* αν $x \in V_1, y \in V_k$ και $V_i \cap V_{i+1} \neq \emptyset$ για $i = 1, 2, \ldots, k-1$ και $V_i \subset U$ για $i = 1, 2, \ldots, k$. Τα στοιχεία της αλυσίδας ονομάζονται *σύνδεσμοι*. Θα λέμε την αλυσίδα $V_1, V_2, \ldots, V_k$ η οποία συνδέει τα σημεία x και y *απλή* αν $x \notin V_i$ για $i > 1$ και $y \notin V_i$ για $i < k$ και $V_i \cap V_j \neq \emptyset$ αν και μόνο αν $|i-j| \leq 1$. Παρατηρούμε ότι κάθε αλυσίδα $V_1, V_2, \ldots, V_k$ που συνδέει τα σημεία x και y περιέχει μια υπακολουθία η οποία είναι απλή αλυσίδα συνδέουσα τα σημεία x και y. Πραγματικά, αρκεί να εκλέξουμε από όλες τις αλυσίδες που συνδέουν τα σημεία x και y μια που να έχει το μικρότερο μήκος.

...

4.2.1 ΛΗΜΜΑ. *Εστω ότι U είναι ένα τυχαίο χωρίο σ'ενα τοπικά συνεκτικό χώρο Q και έστω ότι $\mathcal{V}$ είναι μια ανοικτή κάλυψη του συνόλου U. Για κάθε δύο σημεία $x, y \in U$ υπάρχει μια απλή αλυσίδα στο U που συνδέει τα σημεία x και y και τέτοια ώστε η θήκη κάθε συνδέσμου της αλυσίδας να βρίσκεται σε κάποιο στοιχείο της κάλυψης $\mathcal{V}$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Εστω ότι $\mathcal{W}$ είναι η οικογένεια όλων των χωρίων W του χώρου Q για τα οποία υπάρχει στοιχείο $V \in \mathcal{V}$ με $clW \subset V$. Συμβολίζουμε με A το σύνολο όλων των σημείων $z \in U$ για τα οποία υπάρχει αλυσίδα στο U που συνδέει τα σημεία x και z και της οποίας οι σύνδεσμοι είναι μέλη της $\mathcal{W}$. Προφανώς το σύνολο A είναι ανοικτό στον υπόχωρο U του Q.

Θα δείξουμε ότι $U \cap clA \subset A$, που σημαίνει ότι το A είναι επίσης κλειστό στο U. Εστω ότι a' είναι τυχαίο σημείο του $U \cap clA$ και τέτοιο ώστε $a' \in V \in \mathcal{V}$. Θεωρούμε μια περιοχή W' του σημείου a' τέτοια ώστε $clW' \subset V$. Από το Θεώρημα 4.1.2 η συνιστώσα W του συνόλου W' η οποία περιέχει το σημείο a' ανήκει στην οικογένεια $\mathcal{W}$. Αφού $W \cap clA \neq \emptyset$, υπάρχει ένα σημείο $a \in W \cap A$. Αν επισυνάψουμε το σύνολο W ως τελικό σύνδεσμο σε μια οποιαδήποτε αλυσίδα του U που συνδέει τα σημεία x και a και τα στοιχεία της οποίας ανήκουν στην $\mathcal{W}$, προκύπτει μια όμοια αλυσίδα που συνδέει τα σημεία x και a'. Αρα $a' \in A$ κι έτσι το A είναι ένα ανοικτό-κλειστό υποσύνολο του U. Αφού $x \in A$ έχουμε ότι $A \neq \emptyset$ κι από την συνεκτικότητα του U προκύπτει ότι $A = U$. Συνεπώς υπάρχει αλυσίδα στο U που συνδέει τα σημεία x και y τα στοιχεία της οποίας ανήκουν στην $\mathcal{W}$. Τέλος απομένει να εκλέξουμε από αυτή μια απλή αλυσίδα. □

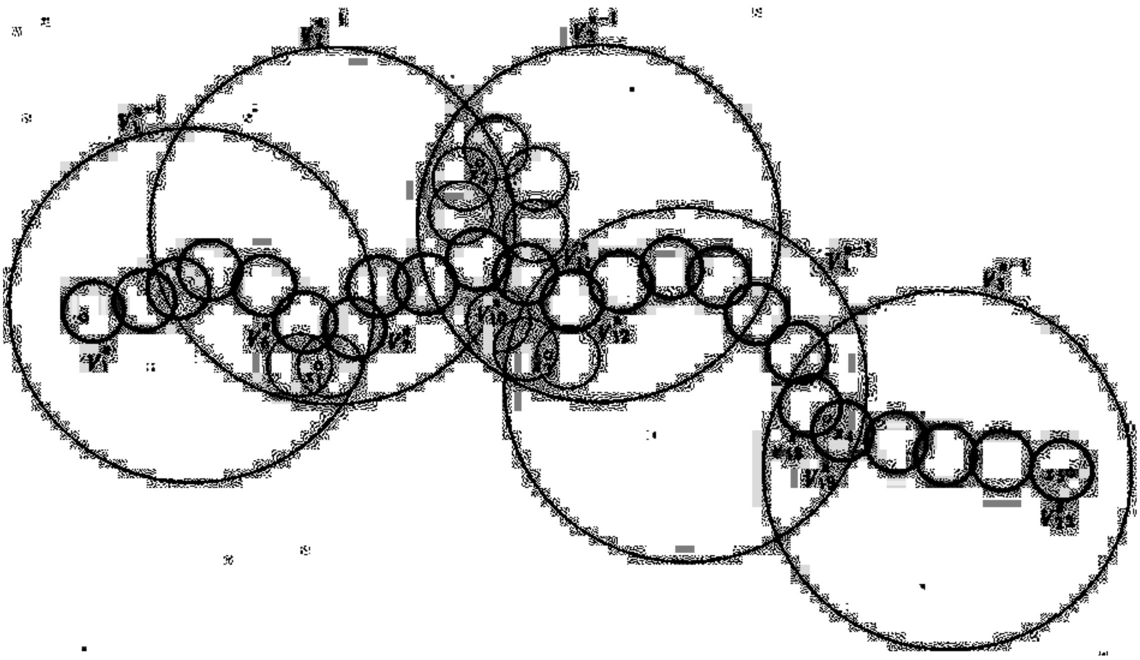
4.2.2 ΛΗΜΜΑ. *Εστω ότι V είναι ένα χωρίο σ'ενα τοπικά συνεκτικό χώρο Q. Για κάθε δυο σημεία $x, y \in V$ υπάρχει στο V ακολουθία από απλές αλυσίδες $V_1^n, V_2^n, \ldots, V_{k_n}^n \quad (n = 1, 2, \ldots,)$ που συνδέουν τα σημεία x και y έτσι ώστε:*

1. $diam V_i^n \leq 1/n$ για $i = 1, 2, \ldots, k_n$ και $n = 1, 2, \ldots,$

2. Ενας σύνδεσμος $V_{j(i)}^{n-1}$ μπορεί να συσχετισθεί μ'ενα σύνδεσμο V_i^n για

κάθε $i = 1, 2, \ldots, k_n$ και κάθε $n > 1$ κατά τέτοιο τρόπο ώστε $j(i_1) \leq j(i_2)$ για οποιαδήποτε $i_1 \leq i_2$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Η ύπαρξη της αλυσίδας $V_1^1, V_2^1, \ldots, V_{k_1}^1$ εξασφαλίζεται από το Λήμμα 4.2.1 όπου για U παίρνουμε το σύνολο V και για $\mathcal{V}$ την κάλυψη του V που αποτελείται απ'ολες τις ανοικτές σφαίρες με ακτίνα $1/2$. Υποθέτουμε ότι η αλυσίδα $V_1^{n-1}, V_2^{n-1}, \ldots, V_{k_{n-1}}^{n-1}$ έχει ήδη ορισθεί και κατασκευάζουμε την αλυσίδα $V_1^n, V_2^2, \ldots, V_{k_n}^n$.



Σχήμα 62: Η κατασκευή της αλυσίδας $V_1^n, V_2^n, \ldots, V_{k_n}^n$ (βλέπε το Λήμμα 4.2.2).

Για κάθε $i < k_{n-1}$ εκλέγουμε στην τύχη ένα σημείο $x_i \in V_i^{n-1} \cap V_{i+1}^{n-1}$ και θέτουμε $x_0 = x$ και $x_{k_{n-1}} = y$. Αν εφαρμόσουμε το Λήμμα 4.2.1, και πάρουμε για U το σύνολο V_i^{n-1}, ως $\mathcal{V}$ την κάλυψη του V_i^{n-1} που αποτελείται απ'ολες τις ανοικτές σφαίρες με ακτίνα $1/2n$ και για x και y τα σημεία x_{i-1} και x_i, επιτυγχάνουμε για $i = 1, 2, \ldots, k_{n-1}$ μια αλυσίδα $\mathcal{U}_i$ στο V_i^{n-1} που συνδέει τα σημεία x_{i-1} και x_i, της οποίας οι σύνδεσμοι έχουν διαμέτρους μικρότερες από $1/n$ κι έχουμε ότι οι θήκες βρίσκονται στο V_i^{n-1}.

Παραθέτοντας σε μια σειρά τους σύνδεσμους των αλυσίδων $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_{k_n-1}$ διαδοχικά επιτυγχάνουμε αλυσίδα που συνδέει τα σημεία x και y. Εκλέγουμε από αυτήν μια απλή αλυσίδα $V_1^n, V_2^n, \ldots, V_{k_n}^n$ που να συνδέει τα σημεία x και y και για κάθε σύνδεσμο V_i^n συμβολίζουμε με $j(i)$ τον δείκτη της αλυσίδας $\mathcal{U}_{j(i)}$ από την οποία προκύπτει η V_i^n. Προφανώς $clV_i^n \subset V_{j(i)}^{n-1}$. Είναι εύκολο να δούμε ότι $j(i_1) \leq j(i_2)$ οποτεδήποτε $i_1 \leq i_2$. Ετσι τελειώνει η απόδειξη. □

4.2.3 ΘΕΩΡΗΜΑ. (Mazurkiewicz, Moore). *Για κάθε δυο διαφορετικά σημεία x και y ενός τυχαίου χωρίου V που περιέχεται σ'ενα τοπικά συνεκτικό και πλήρη χώρο Q, υπάρχει ομοιομορφισμός $h : I \to L \subset V$ του μοναδιαίου διαστήματος επί ενός υπόχωρου L του χώρου Q και τέτοιος ώστε $h(0) = x$ και $h(1) = y$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Λαμβάνουμε μια απλή αλυσίδα $V_1^n, V_2^n, \ldots, V_{k_n}^n$ για $i = 1, 2, \ldots$ που να ικανοποιεί τα συμπεράσματα του Λήμματος 4.2.2. Προχωρώντας με επαγωγή κατασκευάζουμε για $n = 1, 2, \ldots$ καλύψεις $\mathcal{I}_n = \{I_1^n, I_2^n, \ldots, I_{k_n}^n\}$ του μοναδιαίου διαστήματος I με κλειστά διαστήματα τέτοια ώστε $0 \in I_1^n, 1 \in I_{k_n}^n$ και το δεξιό άκρο του I_i^n να είναι αριστερό άκρο του διαστήματος I_{i+1}^n για $i = 1, 2, \ldots, k_{n-1}$ και τέτοιες ώστε να ισχύουν οι επόμενες δυο συνθήκες:

$$I_i^n \subset I_{j(i)}^{n-1} \;\; gia \;\; i = 1, 2, \ldots, k_n \;\; kai \;\; n > 1,$$

$$diamI_i^n = diamI_{i'}^n \;\; 'otan \;\; j(i) = j(i').$$

Επιτυγχάνουμε την κάλυψη $\mathcal{I}_1$ διαιρώντας το διάστημα σε k_1 συνεχόμενα κλειστά υποδιαστήματα ίσου μήκους, αριθμημένα διαδοχικά από τάριστερά προς τα δεξιά. Δεχόμαστε ότι η κάλυψη $\mathcal{I}_{n-1} = \{I_1^{n-1}, I_2^{n-1}, \ldots, I_{kn-1}^{n-1}\}$ έχει ήδη ορισθεί. Στην συνέχεια επιτυγχάνουμε την κάλυψη $\mathcal{I}_n$ διαιρώντας κάθε διάστημα I_j^{n-1} για $j = 1, 2, \ldots, k_{n-1}$ σε τόσα συνεχόμενα και διαδοχικά κλειστά υποδιαστήματα ίσου μήκους, όσα είναι τα στοιχεία του συνόλου $\{i \leq k_n : j(i) = j\}$. Αυτό το σύνολο δεν είναι κενό αφού η αλυσίδα $V_1^{n-1}, V_2^{n-1}, \ldots, V_{k_{n-1}}^{n-1}$ είναι απλή.

Για $n = 1, 2, \ldots$ έστω ότι d_n συμβολίζει το μήκος του επιμηκέστερου διαστήματος που ανήκει στην κάλυψη $\mathcal{I}_n$. Θα δείξουμε ότι $lim_{n\to\infty}d_n = 0$.

Σχήμα 63: Η κατασκευή της κάλυψης $\{I_1^n, I_2^n, \ldots, I_{k_n}^n\}$ (βλέπε την απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.3).

Για τούτο δεχόμαστε ότι υπάρχει φυσικός αριθμός m κι ένας δείκτης $i_m \leq k_m$ τέτοιος ώστε το διάστημα $I_{i_m}^m$ νάνήκει στην κάλυψη $\mathcal{I}_n$ για κάθε $n \geq m$, δηλαδή για κάθε $n \geq m$ υπάρχει δείκτης $i_n \leq k_n$ τέτοιος ώστε $I_{i_n}^n = I_{i_m}^m$. Αφού $I_{i_m}^m = I_{i_{m+1}}^{m+1} = I_{i_{m+2}}^{m+2} = \ldots$, έχουμε $V_{i_m}^m \supset V_{i_{m+1}}^{m+1} \supset V_{i_{m+2}}^{m+2} \supset \ldots$, Από το Θεώρημα του ἄντορ για τους πλήρεις χώρους (1.8.16) το σύνολο $\bigcap_{k=0}^{\infty} clV_{i_{m+k}}^{m+k}$ αποτελείται από ένα ακριβώς σημείο, το οποίο συμβολίζουμε με x_0. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι $x_0 \in clV_{i_p-1}^p \cap clV_{i_p+1}^p$, όπου $p = m+1$ και για ν'απλοποιήσουμε τον συμβολισμό παίρνουμε $V_0^p = \{x\}$ και $V_{k_p+1}^p = \{y\}$, έτσι φτάνουμε σε άτοπο αφού έχουμε δεχθεί ότι η αλυσίδα $V_1^m, V_2^m, \ldots, V_{k_m}^m$ είναι απλή.

Για κάθε σημείο $t \in I$ και κάθε $n = 1, 2, \ldots$ έστω ότι $A_n(t) = \{i \leq k_n : t \in I_i^n\}$. Προφανώς $1 \leq cardA_n(t) \leq 2$. Παρατηρούμε ότι αν $i \in A_n(t)$ για $n > 1$ τότε $j(i) \in A_{n-1}(t)$, κι έτσι τα κλειστά σύνολα $F_1(t), F_2(t), \ldots$ του χώρου Q που ορίζονται ως $F_n(t) = \bigcup\{clV_i^n : i \in A_n(t)\}$ σχηματίζουν μια φθίνουσα ακολουθία. Αφού $lim_{n\to\infty} diamF_n(t) = 0$, έχουμε από το Θεώρημα 1.8.16 ότι το σύνολο $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n(t)$ αποτελείται από ένα ακριβώς σημείο του Q. Συμβολίζουμε το σημείο αυτό $h(t)$. Προφανώς $h(t) \in V$. Εχουμε έτσι ορίσει μια συνάρτηση $h : I \to L = h(t) \subset V$. Παρατηρούμε ότι η h είναι συνεχής συνάρτηση, αφού για κάθε $t \in I$ το σύνολο $int(\bigcup\{I_i^n : i \in A_n(t)\})$ είναι μια περιοχή του σημείου t στον χώρο I κι η εικόνα του βρίσκεται στο $F_n(t)$, άρα έχει διάμετρο μικρότερη από $2/n$. Επιπλέον, η απεικόνιση είναι μονοσήμαντη, αφού για $t \neq t'$ υπάρχει ένας φυσικός αριθμός $n > 1$ τέτοιος ώστε $t \in I_i^n$, $t' \in I_{i'}^n$ και $| j(i) - j(i') |> 3$, άρα θέτοντας τον επιπρόσθετο συμβολισμό $V_0^n = V_{k_n+1}^n = V_0^{n-1} = V_{k_{n-1}+1}^{n-1} = 0$ έχουμε

$$F_n(t) \cap F_n(t') \subset (clV_{i-1}^n \cup clV_i^n \cup clV_{i+1}^n) \cap (clV_{i'-1}^n \cup clV_{i'}^n \cup clV_{i'+1}^n) \subset$$

$$\subset (V_{j(i)-1}^{n-1} \cup V_{j(i)}^{n-1} \cup V_{j(i)+1}^{n-1}) \cap (V_{j(i')-1}^{n-1} \cup V_{j(i')}^{n-1} \cup V_{j(i')+1}^{n-1}) = \emptyset$$

Αρα $h(t) \neq h(t')$. Αρα από το Θεώρημα 1.6.14 συμπεραίνουμε ότι h είναι ομοιομορφισμός. Σημειώνουμε δε ότι $h(0) = x$ και $h(1) = y$.□

4.2.4 ΠΟΡΙΣΜΑ. *Κάθε τοπικά συνεκτικός και πλήρης χώρος είναι κατά μονοπάτια συνεκτικός.* □

4.2.5 ΠΟΡΙΣΜΑ. *Κάθε συνεκτικός και τοπικά συνεκτικός πλήρης χώρος είναι τοπικά κατά μονοπάτια συνεκτικός.* □

4.2.6 ΠΟΡΙΣΜΑ. *Κάθε τοπικά συνεκτικό συνεχές είναι κατά μονοπάτια συνεκτικό και τοπικά κατά μονοπάτια συνεκτικό.* □

...

Από το Πόρισμα 2.4.3 και το Θεώρημα 4.1.9 προκύπτει ότι κάθε μετρικός χώρος ο οποίος είναι εικόνα του μοναδιαίου διαστήματος κάτω από συνεχείς συναρτήσεις είναι τοπικά συνεκτικό συνεχές. Αρα από Θεώρημα 4.2.3 για κάθε δυο διαφορετικά σημεία x, y του χώρου υπάρχει ένα τόξο με τελικά σημεία τα x και y. Εάν στον ορισμό της κατά μονοπάτια συνεκτικότητας αντικαταστήσουμε την έννοια του μονοπατιού με την έννοια του τόξου τότε επιτυγχάνουμε την έννοια της *κατά τόξα συνεκτικότητας*, όπως επίσης αντίστοιχα προς την τοπικά κατά μονοπάτια συνεκτικότητα την έννοια της *τοπικά κατά τόξα συνεκτικότητας*. Οι έννοιες αυτές είναι περισσότερο συνηθισμένες σε ορισμένους συγγραφείς. Η διαφορά έγκειται στο ότι η εικόνα του μοναδιαίου διαστήματος κάτω από συνεχή συνάρτηση δεν είναι πάντα τόξο, όπως γνωρίζουμε από το Παράδειγμα του Peano . Ωστόσο οι παράλληλες έννοιες των κατά τόξα (αντίστοιχα μονοπάτια) συνεκτικότητας είναι έννοιες ισοδύναμες όπως φαίνεται από τα επόμενα.

...

4.2.7 ΠΡΟΤΑΣΗ. *Ενας χώρος Q είναι κατά μονοπάτια συνεκτικός αν και μόνο για κάθε ζεύγος από διαφορετικά σημεία $x, y \in X$ υπάρχει τόξο L στον X με τελικά σημεία x και y.* □

4.2.8 ΠΡΟΤΑΣΗ. *Ενας χώρος Q είναι τοπικά κατά μονοπάτια συνεκτικός σ'ενα σημείο x αν και μόνο αν για κάθε περιοχή U του σημείου x υπάρχει περιοχή V του σημείου η οποία περιέχεται στην U και τέτοια ώστε για κάθε ζεύγος από διαφορετικά σημεία $x', x'' \in V$ να υπάρχει τόξο L στο U με τελικά σημεία x' και x''.*$\square$

...

Ακόμη πιο ενδιαφέρον Θεώρημα είναι των Hahn-Mazurkiewicz που χαρακτηρίζει τοπικά συνεχή ως συνεχείς εικόνες του μοναδιάιου διαστηματος I. Το θεώρημα αυτό αποτελεί γενίκευση του αποτελέσματος της συνάρτησης του Peano . Απάυτό ίσως ως αφετηρία ονόμασαν τα τοπικά συνεκτικά συνεχή ως *συνεχή του Peano* . Ας θυμίσουμε όμως ένα χρήσιμο Πόρισμα του Θεωρήματος 1.7.7.

4.2.9 ΠΟΡΙΣΜΑ. *Για κάθε διαχωρίσιμο μετρικό χώρο Q υπάρχει συνεχής συνάρτηση από ένα υποσύνολο A του συνόλου του Cantor επί του χώρου Q. Αν ο χώρος Q είναι συμπαγής, τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση από ένα κλειστό υποσύνολο του συνόλου Cantor επί του χώρου Q.*$\square$

4.2.10 ΛΗΜΜΑ. *Αν ένας μετρικός χώρος Q είναι συμπαγής και τοπικά κατά μονοπάτια συνεκτικός, τότε για κάθε θετικό πραγματικό e υπάρχει ένας θετικός πραγματικός αριθμός d τέτοιος ώστε για κάθε ζεύγος σημείων $x, y \in X$ που ικανοποιεί την ανίσωση $d(x, y) < d$ υπάρχει ένα μονοπάτι e στον Q από το x προς το y με την ιδιότητα ότι $diame(I) < e$.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Για κάθε σημείο $z \in X$ υπάρχει μια περιοχή V_z του z με την ιδιότητα ότι κάθε ζεύγος σημείων $x, y \in V_z$ υπάρχει ένα μονοπάτι e από το x στο y μέσα στην $B(z, \frac{1}{3}e)$, με $diame(I) \leq diamB(x, \frac{1}{3}e) < e$. Τα σύνολα V_z για $z \in X$ σχηματίζουν μια ανοικτή κάλυψη του χώρου Q. Εστω ότι d ο αριθμός Lebesgue της κάλυψης (βλέπε Λήμμα 1.6.12). Τότε, οποτεδήποτε $x, y \in X$ και $d(x, y) < d$, υπάρχει σημείο $z \in X$ για το οποίο $x, y \in V_z$.$\square$

4.2.11 ΘΕΩΡΗΜΑ (Hahn-Mazurkiewicz). *Ενας μετρικός χώρος Q είναι μή κενό τοπικά συνεκτικό συνεχές αν και μόνο αν είναι εικόνα του μοναδιαίου διαστήματος I κάτω από συνεχείς συναρτήσεις.*

ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Είναι αρκετό να δειχθεί ότι για κάθε τοπικά συνεκτικό συνεχές που περιέχει περισσότερα από ένα σημεία υπάρχει μια συνεχής συνάρτηση $f : I \to X$ του μοναδιαίου διαστήματος επί του χώρου Q. Από το Πόρισμα 4.2.9 υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f_0 : A \to X$ από ένα κλειστό υποσύνολο A του συνόλου του ἄντορ C επί του χώρου Q. Εστω ότι $a_0 = infA$ και $b_0 = supA$. Τώρα $a_0, b_0 \in A$ (βλέπε το Λήμμα 1.5.20) και $a_0 \neq b_0$, άρα το σύνολο $[a_0, b_0]\backslash A$ είναι ανοικτό υποσύνολο της πραγματικής ευθείας κι άρα οι συνιστώσες του είναι ανοικτά διαστήματα. Τα παραθέτουμε αυτά σε μια ακολουθία $(a_1, b_1), (a_2 b_2), \ldots$.

Δεχόμαστε πρώτον ότι η ακολουθία είναι άπειρη (κι έχουμε ότι $lim_{i\to\infty}(b_i - a_i) = 0$). Από την ομοιομορφική συνέχεια της συνάρτησης f_0 (βλέπε Θεώρημα 1.6.13) και το Λήμμα 4.2.10 συμπεραίνουμε ότι για $n = 1, 2, \ldots$ υπάρχει φυσικός i_n με την ιδιότητα για $i \geq i_n$ να υπάρχει μονοπάτι e από το $f_0(a_i)$ προς το $f_0(b_i)$ τέτοιο ώστε η $diame(I) < 1/n$. Δίχως να χάσουμε την γενικότητα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $i_1 \leq i_2 \leq \ldots$. Για κάθε φυσικό αριθμό $i < i_1$ έστω ότι $f_i : [a_i, b_i] \to X$ είναι μια τυχαία συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $f_i(a_i) = f_0(a_i)$ και $f_i(b_i) = f_0(b_i)$. Η ύπαρξή της εξασφαλίζεται από το Πόρισμα 4.2.6. Τώρα για ένα i που να ικανοποιεί την $i_n \leq i \leq i_{n+1}$ όπου $n = 1, 2, \ldots$ έστω ότι $f_i : [a_i, b_i] \to X$ είναι συνεχής συνάρτηση για την οποία η $diamf_i([a_i, b_i]) < 1/n$ και $f_i(a_i) = f_0(a_i)$ και $f_i(b_i) = f_0(b_i)$. Θέτοντας

$$f(r) = \begin{cases} f_0(a_0), & an \quad r \in [0, a_0] \\ f_0(r), & an \quad r \in A, \\ f_i(r), & an \quad r \in [a_i, b_i], gia \;\; i = 1, 2, \ldots, \\ f_0(b_0), & an \quad r \in [b_0, 1], \end{cases}$$

επιτυγχάνουμε μια συνάρτηση $f : I \to X$ του διαστήματος I επί του χώρου Q. Σημειώνουμε ότι η f είναι συνεχής.

Στην περίπτωση που η ακολουθία των συνιστωσών του συνόλου $[a_0, b_0]\backslash A$ είναι πεπερασμένη και ο τελευταίος όρος είναι (a_m, b_m) η απόδειξη γίνεται όπως προηγουμένως, αφού αντικαταστήσουμε με $m + 1$ το i_1 και χρησιμοποιώντας μόνο τις συναρτήσεις $f_1, f_2, \ldots, f_m$.□

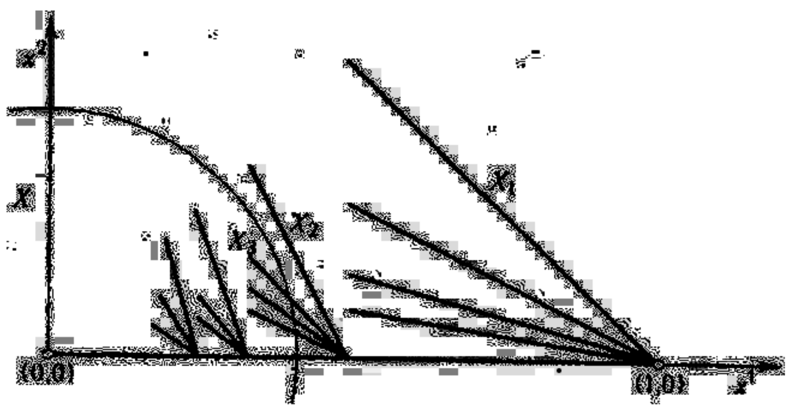
...

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Νάποδειχθεί ότι αν ένας μετρικός χώρος, Q είναι συνεκτικός τότε για κάθε ζεύγος σημείων $x, y \in X$ και κάθε πραγματικό αριθμό $e > 0$ υπάρχει ακολουθία σημείων $x_0, x_1, \dots, x_k$ τέτοια ώστε $x_0 = x, x_k = y$ και $d(x_{j-1}, x_j) < e$ για $j = 1, 2, .., k$. Να δώσετε ένα παράδειγμα χώρου ο οποίος δεν είναι συνεκτικός αλλά ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη και νάποδείξετε ότι κάθε συμπαγής μετρικός χώρος που ικανοποιεί την συνθήκη είναι συνεχές.

2) Παρατηρούμε ότι αν $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, όπου κάθε υπόχωρος X_n είναι συνεχές για $n = 1, 2, \dots$, και $\bigcap_{n=1}^{\infty} diam X_n \neq \emptyset$ κι επίσης $lim_{n \to \infty} X_n = 0$, τότε ο χώρος Q είναι συνεχές. Να δείξετε ότι η υπόθεση, ότι οι διάμετροι των υποχώρων X_n τείνουν στο μηδέν, δεν μπορεί να παραλειφθεί.

3) Δώσε ένα παράδειγμα χώρου Q ο οποίος περιέχει ένα σημείο x με την ιδιότητα: ο Q είναι τοπικά συνεκτικός στο x αλλά υπάρχει περιοχή U του x τέτοια ώστε καμία περιοχή του σημείου που να περιέχεται στο U να μην είναι συνεκτική. (Υπόδειξη: Θεωρείστε τον υπόχωρο του επιπέδου που δίνεται από $X = (I \times \{0\}) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, όπου X_n για $n = 1, 2, \dots$ είναι ένωση των διαστημάτων με τελικά σημεία $(1/n, 0)$ και $(1/(n+1), 1/k(+1))$ όπου $k = 1, 2, , \dots$).



Σχήμα 64: Ο χώρος X είναι τοπικά συνεκτικός στην αρχή των αξόνων, αλλά η αρχή δεν έχει οσοδήποτε μικρές συνεκτικές περιοχές (βλέπε άσκηση 3).

4) Να δώσετε ένα παράδειγμα συνεχούς συνάρτησης της πραγματικής

ευθείας επί ενός χώρου ο οποίος δεν είναι τοπικά συνεκτικός (βλέπε Θεώρημα 4.1.9).

5) Να δείξετε ότι άν ένας χώρος Q είναι τοπικά συνεκτικός και διαχωρίσιμος τότε έχει μια αριθμήσιμη βάση αποτελούμενη από χωρία.

6) Νάποδείξετε ότι αν $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, όπου κάθε υπόχωρος X_n είναι τοπικά συνεκτικό συνεχές για $n = 1, 2, \ldots,$ και $\bigcap_{n=1}^{\infty} diamX_n$ και $lim_{n\to\infty}X_n = 0$, τότε ο χώρος Q είναι τοπικά συνεκτικός.

6) Να δειχθεί ότι ένας χώρος Q είναι τοπικά κατά μονοπάτια συνεκτικός σ'ενα σημείο x αν και μόνο αν για κάθε περιοχή U του σημείου x υπάρχει κατά μονοπάτια συνεκτικό σύνολο $C \subset U$ τέτοιο ώστε $x \in intC$.

7) Νάποδειχθεί ότι κάθε συνεκτικός, τοπικά συνεκτικός χώρος είναι κατά μονοπάτια συνεκτικός.

8) Να δώσετε ένα παράδειγμα συνεκτικού χώρου που να μην είναι κατά μονοπάτια συνεκτικός. (Υπόδειξη: Χωρίζουμε το σύνολο των ρητών αριθμών Q σε δυο ξένα μεταξύ τους σύνολα Q_1 και Q_2 και θεωρούμε τον υπόχωρο του επιπέδου $(Q_1 \times \Re) \cup (P \times Q_1) \cup (Q_2 \times Q_1)$, όπου P συμβολίζει το σύνολο των αρρήτων αριθμών. Νάποδείξετε ότι η προβολή οποιουδήποτε συνεχούς $C \subset X$ επί του άξονα των τετμημένων είναι μονοσύνολο. Στην απόδειξη του τελευταίου χρησιμοποιείσθε την παρατήρηση ότι για κάθε $q \in Q_1$ το σύνολο $\{r \in \Re : (r, q) \in C\}$ έχει κενό εσωτερικό).

9) Δείξε ότι ο χώρος Q είναι τοπικά κατά μονοπάτια συνεκτικός χώρος αν και μόνο αν έχει μια βάση αποτελούμενη από κατά μονοπάτια συνεκτικά σύνολα. Παρατηρούμε ότι αν Q είναι κατά μονοπάτια συνεκτικός και διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, τότε έχει μια αριθμήσιμη βάση αποτελούμενη από κατά μονοπάτια συνεκτικά σύνολα.

10) Νάποδείξετε ότι αν ένας συμπαγής μετρικός χώρος είναι τοπικά συνεκτικός, τότε για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό e υπάρχει μια πεπερασμένη κάλυψη του χώρου που αποτελείται από τοπικά συνεκτικά συνεχή με διάμετρο μικρότερη από e. (Υπόδειξη: Εφαρμόστε το Θεώρημα 4.2.11).

5. ΚΑΜΠΥΛΕΣ

§. 5.1 Η ΤΟΠΟΛΟΓΙΚΗ ΔΙΑΣΤΑΣΗ

Ενα σύνολο που δεν περιέχει άλλα συνεχή εκτός από τα μονοσύνολα λέγεται *σημειογενές*. *Καμπύλη* είναι ένα συνεχές X που κάθε σημείο του έχει μια οσοδήποτε μικρή περιοχή με σημειογενές σύνορο στο Q. Με άλλα λόγια, για κάθε σημείο $p \in Q$ και κάθε $e > 0$ υπάρχει ανοικτό σύνολο V στο Q τέτοιο ώστε:

$$p \in U \;\; kai \;\; diamV < e$$

και το σύνορο $clV - V$ είναι σημειογενές σύνολο.

Αν ένα σύνολο είναι συμπαγές κι ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη τότε λέγεται 1-*διάστατο*. Είναι εύκολο να δούμε ότι η ιδιότητα αυτή είναι τοπολογικό αναλλοίωτο αφού τα σύνορα συνόλων έχουν εικόνες τα σύνορα των εικόνων κι η εικόνα σημειογενούς συνόλου είναι σημειογενές σύνολο. Κάθε σημειογενές σύνολο λέγεται ότι είναι 0-*διάστατο*. Το σύνολο Cantor για παράδειγμα είναι 0-διάστατο.

Για κάθε συμπαγή χώρο Q κι ένα ανοικτό σύνολο U το σύνορο:

$$clU - U = clU \cap (Q - U)$$

είναι τομή κλειστών συνόλων, δηλαδή κλειστό στο Q. Αντί να ζητήσουμε λοιπόν να είναι το Q σημειογενές μπορούμε να ζητήσουμε το συμπαγές σύνορο $clU - U$ να είναι 0-διάστατο. Μια αυστηρή διατύπωση της έννοιας της διάστασης είναι η εξής:

Για ένα διαχωρίσιμο μετρικό χώρο Q ορίζουμε ως *διάσταση του χώρου* Q και συμβολίζουμε με $indX$, ένα ακέραιο αριθμό μεγαλύτερο από τον -1, ή το σύμβολο ∞. Ο ορισμός είναι αναδρομικός.

1. $indX = -1$ αν και μόνο αν $X = \emptyset$,

2. $indX \leq n$, όπου $n = 0, 1, 2, \ldots$, αν για κάθε $x \in X$ και κάθε ανοικτό σύνολο $V \subset X$ που περιέχει το x, υπάρχει ανοικτό σύνολο $U \subset X$ τέτοιο ώστε $x \in U \subset V$ και $ind.bdU \leq n-1$,

3. $indX = n$ αν $indX \leq n$ και δεν ισχύει η $indX \leq n-1$,

4. $indX = \infty$, αν $indX \neq n$ για $n = -1, 0, 1, 2, \ldots$.

Παρατηρούμε ότι ο ορισμός κάνει χρήση της έννοιας του ανοικτού συνόλου μόνον απ'οπου μπορουμε να δούμε ότι πρόκειται για ιδιότητα τοπολογικά αναλλοίωτη.

...

Η περιφέρεια S^1 ενός κύκλου είναι, ως γνωστόν, μια καμπύλη. Η S^1 και κάθε ομοιομορφική προς αυτή εικόνα C ονομάζονται *απλές κλειστές καμπύλες*. Το σύνολο C είναι απλή κλειστή καμπύλη αν και μόνο αν υπάρχει ομοιομορφισμός:

$$h : S^1 \to C$$

Η περιφέρεια κύκλου S^1 κόβει το επίπεδο σε δύο κομμάτια. Ενα είναι το φραγμένο σύνολο

$$A = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$$

δηλαδή το εσωτερικό μέρος του κύκλου και δεύτερο

$$B = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\}$$

που δεν είναι φραγμένο κι είναι το εξωτερικό μέρος του κύκλου. Τα δυο αυτά σύνολα είναι οι συνιστώσες του $\Re^2 - S^1$ κι έχουν για σύνορο το S^1. Αν θεωρήσουμε τώρα ένα σημείο $p \in A$ κι ένα $q \in B$, μπορούμε να δούμε ότι δεν υπάρχει τόξο που να συνδέει τα δυο αυτά σημεία και να μην τέμνει την περιφέρεια S^1. Η S^1, λοιπόν χωρίζει το επίπεδο, αφού το $\Re^2 - S^1$ δεν είναι συνεκτικό, δηλαδή

$$\Re^2 - S^1 = A \cup B \quad kai \quad (A \cup S^1) \cap B = \emptyset = A \cap (B \cup S^1),$$

όπου $A \cup S^1$ και $B \cup S^1$ είναι οι κλειστές θήκες των ανοικτών συνόλων A και B αντίστοιχα.

Στην γενική περίπτωση θεωρούμε ότι στη θέση του μοναδιαίου κύκλου έχουμε μία απλή κλειστή καμπύλη και το Θεώρημα του Jordan που λέει:

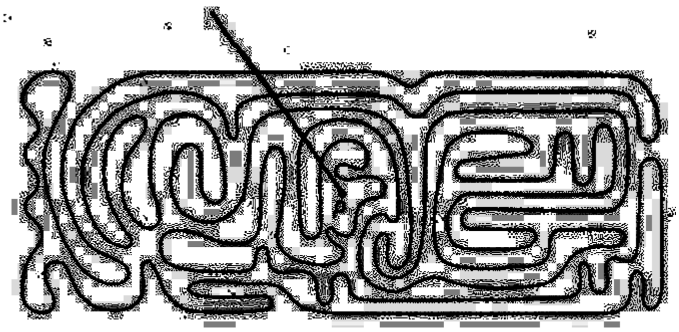
5.1.1 ΘΕΩΡΗΜΑ (Jordan). *Κάθε απλή κλειστή καμπύλη* $C \subset \Re^2$ *χωρίζει το επίπεδο* $\Re^2$ *σε δύο χωρία και είναι το κοινό τους σύνορο* $\Box$.

Αν και η ορθότητα του Θεωρήματος είναι διαισθητικά απλούστατη, η απόδειξη είναι μάλλον περίπλοκη. Εξάλλου το Θεώρημα αυτό αποτελεί μια βασική πληροφορία για την τοπολογία του επιπέδου. Ισχύει ακόμη ότι:

5.1.2 ΠΡΟΤΑΣΗ *Ενα απλό τόξο δεν χωρίζει το επίπεδο.* $\Box$.

...

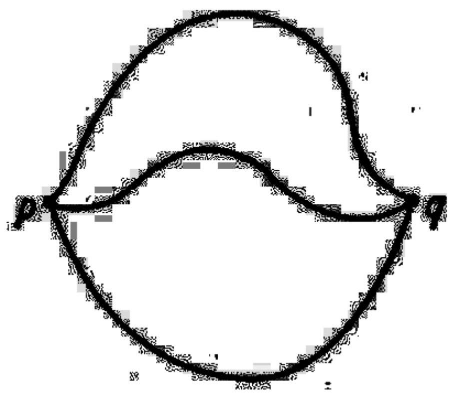
Αν τώρα έχουμε μια τυχαία καμπύλη κι ένα σημείο p, όπως στο Σχήμα 65, μπαίνει το ερώτημα: πότε το σημείο p ανήκει στο εσωτερικό αυτής της καμπύλης και πότε στο εξωτερικό· Ενα απλό κριτήριο είναι να φέρουμε μια ευθεία γραμμή που να ξεκινά από το p. Αν η γραμμή κόψει την καμπύλη σε περιττό αριθμό σημείων τότε το p ανήκει στο εσωτερικό της καμπύλης. Εξαιρούνται τα σημεία που η γραμμή εφάπτεται στην καμπύλη.



Σχήμα 65: Πότε το σημείο p ανήκει στο εσωτερικό αυτής της καμπύλης και πότε στο εξωτερικό;

Μια απλή κλειστή καμπύλη είναι ένωση δύο τόξων τα οποία ενώνουν δύο σημεία p και q και δεν έχουν κοινά σημεία εκτός από τα p και q. Αν πάρουμε, αντί για δύο, τρία τόξα με τις ίδιες ιδιότητες θα έχουμε την λεγόμενη *καμπύλη J* (Σχήμα 66).

Κάθε μία καμπύλη J είναι ομοιομορφική εικόνα του συνόλου που έπιτυγχάνουμε όταν στην περιφέρεια κύκλου S^1 επισυνάψουμε μια διάμετρό



Σχήμα 66: Η *καμπύλη* J.

του. Το σύνολο αυτό έχει σχήμα του γράμματος J. Οταν μια καμπύλη βρίσκεται στο επίπεδο, τότε το συμπλήρωμα της αποτελείται από ένα χωρίο, από τα οποία το ένα δεν είναι φραγμένο και τα υπόλοιπα δύο είναι φραγμένα. Αντίθετα από μια απλή κλείστη καμπύλη, μια καμπύλη J δεν είναι το κοινό σύνορο των χωρίων του συμπληρώματος της. Η τομή των συνόρων των χωρίων του συμπληρώματος μιας καμπύλης J είναι το δισύνολο που αποτελείται από τα σημεία p και q .

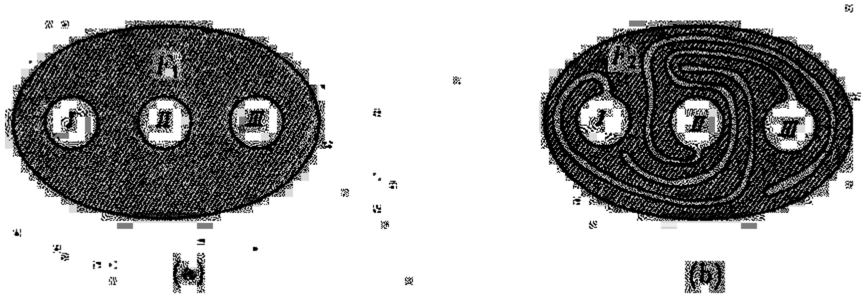
Αν και μπορεί να φαίνεται παράδοξο, υπάρχουν στο επίπεδο καμπύλες που είναι το κοινό σύνορο τριων χωρίων. Θα δώσουμε ένα σχεδίασμα κατασκεύης τέτοιων καμπύλων.

5.1.3 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ας πάρουμε ένα δίσκο D στο επίπεδο, ο οποίος είναι φραγμένος από μια έλλειψη και ας αφαιρέσουμε από αυτόν τα εσωτερικά τριων κύκλων που περιέχονται μέσα στο D και είναι ξένα μεταξύ τους. Θα μας μείνει ένα συνεχές F_1, το οποίο χωρίζει το επίπεδο σε 4 χωρία από τα οποία το ένα δεν είναι φραγμένο (Σχήμα 67(a)) .

Θα κάνουμε επεκτάσεις των περιοχών I, II και III έτσι ώστε, μετά από μία (άπειρη) διαδικασία, να έχουμε ως τομή μίας φθίνουσας ακολουθίας συνεχών

$$F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$$

μία καμπύλη F η οποία θα είναι το κοινό σύνορο των επεκτεταμένων συνόλων I, II και III. Η μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε είναι γνωστή από



Σχήμα 67: Παράδειγμα 5.1.3.

προηγούμενα Παραδείγματα. Θα δώσουμε μόνο ένα σκιαγράφημα της κατασκευής του συνεχούς F. Επεκτείνουμε καθε ένα από τα χωρία I, II και III έτσι ώστε οι κλειστές του θήκες να περιέχονται πάντα μέσα στον δίσκο D, να είναι ξένες μεταξυ τους κι επιπλέον, κάθε σημείο του συνεχούς F_1 να έχει απόσταση το πολύ 1/2 από κάποιο σημείο καθενός από τα σύνολα I, II και III. Με άλλα λόγια κάθε μία από της περιοχές (μετά την επέκταση) πρέπει να πλησιάζει με πυκνότητα 1/2 σε όλα τα σημεία του συνεχούς F_1. Αυτό μπορούμε να το κάνουμε αν συμπληρώσουμε τα χωρία I, II και III με στενά ¨κανάλια¨ ξένα μεταξύ τους κι αρκετά πυκνά στο F_1 (Σχήμα 67(b)). Οταν αφαιρέσουμε από το συνεχές F_1 τα (κατά τέτοιο τρόπο επεκτεταμένα) χωρία I, II και III θα έχουμε ένα συνεχές F_2. Το συνεχές F_3 το έχουμε όταν ζητήσουμε η πυκνότητα να είναι 1/3 κ.λ.π. Το συνεχές F_n προκύπτει από το F_{n-1} μετά από μια επέκταση κι αφαίρεση των χωρίων I, II και III, έτσι ώστε κάθε μια απάυτές να βρίσκεται σε απόσταση το πολύ $1/n$ από κάθε σημείο του συνεχούς F_{n-1}.

Είναι προφανές ότι οσοδήποτε κοντά σε κάθε σημείο της καμπύλης

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

θα βρίσκονται σημεία των χωρίων I, II και III. Κανένα σημείο της καμπύλης δεν θα ανήκει στα χωρία αυτά. Ετσι, λοιπόν, η καμπύλη F θα είναι πραγματικά το κοινό σύνορο για τα τρία χωρία I, II και III. □

...

Η καμπύλη F είναι ένα αδιαχώριστο συνεχές. Ας παρατηρήσουμε ότι αν αλλάζουμε με τον ίδιο τρόπο και το μη φραγμένο τέταρτο χωρίο IV του συμπληρώματος του συνεχούς στο επίπεδο, μπορούμε νάποκτήσουμε μια καμπύλη F που θα είναι κοινό σύνορο για τέσσερις περιοχές I, II, III και IV . Ετσι μπορούμε να κατασκευάσουμε καμπύλες οι οποίες είναι κοινά σύνορα για οποιονδήποτε πεπερασμένο αριθμό χωρίων του επιπέδου.

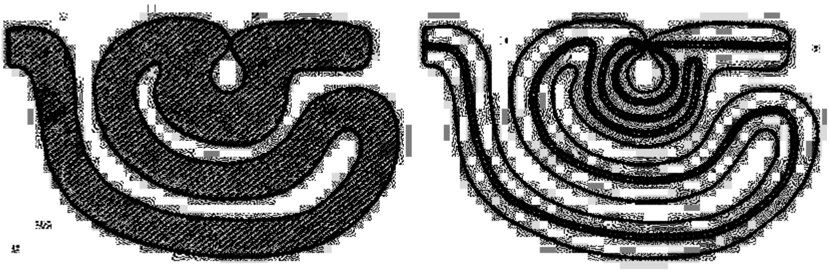
Ομως η καμπύλη F, όπως και κάθε απλή κλειστή καμπύλη (όπως π.χ. η καμπύλη J), περιέχει τόξα, δηλαδή συνεχή, τα οποία δεν διαχωρίζουν το επίπεδο. Ομοια, όπως και για τα κληρονομικά αναποσυνθέσιμα συνεχή (βλέπε σελ. 79), γεννιέται το ερώτημα: αν υπάρχουν κληρονομικές τομές του επιπέδου, δηλαδή καμπύλες τέτοιες ώστε κάθε μη μονοσύνολο συνεχές να είναι τομή του επιπέδου. Θετική λύση στο πρόβλημα έδωσε ο Whyburn το 1930. Κατασκεύασε μια καμπύλη, που ονομάζεται *καμπύλη του Whyburn* , η οποία ήταν το πρώτο παράδειγμα κληρονομικής τομής του επιπέδου. Μια τέτοια καμπύλη είναι συνεχής εικόνα ψευδοτόξου. Εύκολα μπορεί να δει κανεις ότι *το ψευδοτόξο δεν κόβει το επίπεδο.* Εφόσον κάθε μη μονοσύνολο υποσυνεχές ενός ψευδοτόξου είναι ψευδοτόξο (βλέπε σελ. 83) έπεται ότι κανένα συνεχές το οποίο περιέχεται σε ψευδοτόξο δεν είναι τομή του επιπέδου. Από εδώ έπεται ότι μια κληρονομική μη-τομή του επιπέδου μπορεί να μετασχηματιστεί μεσω μιας συνεχούς συνάρτησης σε μια κληρονομική τομή του επιπέδου. Πριν όμως περιγράψουμε την καμπύλη W θα ασχοληθούμε με ευκολότερα παραδείγματα τομών του επιπέδου.

Σχήμα 68: Παράδειγμα 5.1.4

5.1.4 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Αν ‘‘ταυτίσουμε’’ στην συμπυκνωμένη ημιτονοειδή (βλέπε 2.6.3) τα σημεία $(0,-1)$ και $(0,1)$, έτσι ώστε να τα κάνουμε ένα σημείο r, θα έχουμε μια τομή του επιπέδου η οποία αποτελείται από μια απλή κλειστή καμπύλη και μια γραμμή που συμπυκνώνεται προς την καμπύλη αυτή στις διαδοχικές κυμάνσεις (Σχήμα 68(a)) .

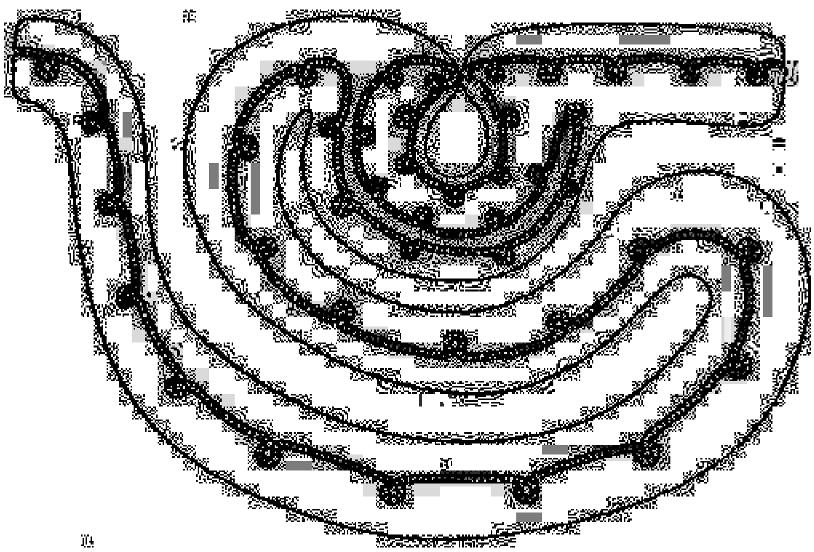
Οταν στη γραμμή αυτή προσθέσουμε ένα τόξο που βγαίνει από το σημείο r και δεν έχει κοινά σημεία με την καμπύλη ούτε με τη γραμμή που συμπυκνώνεται, θα αποκτήσουμε μια καμπύλη Y που κι αυτή είναι μια τομή του επιπέδου (Σχήμα. 68(b)). Η καμπύλη Y έχει την ιδιότητα να διαχωρίζει το επιπέδο μεταξυ των σημείων a και b. Επιπλέον κάθε υποσυνεχές της Y που ενώνει δύο σημεία p και q τα οποία βρίσκονται στη γραμμή και στο τόξο, που συμπληρώσαμε αντίστοιχα, είναι επίσης διαχωρισμός του επιπέδου μεταξύ των σημείων a και b.

Μπορούμε να αποκτήσουμε την Y και με άλλη μέθοδο, ως τομή φθίνουσας (άπειρης) ακολουθίας συνεχών. Αυτά τα συνεχή μπορούμε εύκολα να τα φανταστούμε σαν μακρυές λωρίδες, διαρκώς στενότερες, τέτοιες ώστε κάθε μία να έχει ένα 'κόμβο' και η επόμενη μια πτύχωση παραπάνω από την προηγούμενη (Σχήμα 69). Αυτή η νέα πτύχωση γίνεται μέσα στον κόμβο του προηγούμενου συνεχούς. Η τομή όλων των λωρίδων είναι η καμπύλη Y και η τομή των κόμβων είναι η απλή, κλειστή καμπύλη που περιέχεται στην καμπύλη Y.



Σχήμα 69: Η καμπύλη Y ως τομή φθίνουσας (άπειρης) ακολουθίας συνεχών.

Την καμπύλη W, την κατασκευάζουμε όμοια με τη διαφορά ότι για κάθε επόμενη λωρίδα αυξάνει ο αριθμός των πτυχώσεων στους κόμβους κι αφού διατηρήσουμε τους προηγούμενους κόμβους προσθέτουμε, όλο και πυκνότερα, νέους μικρότερους κόμβους μέσα στην λωρίδα (Σχήμα 70). Χάρη σε αυτό έχουμε εξασφαλίσει ότι ανάμεσα σε οποιαδήποτε σημεία p και q της καμπύλης W θα βρεθεί κάποιος κόμβος σε αρκετά προχωρημένη λωρίδα της άπειρης ακολουθίας. Με άλλα λόγια η καμπύλη W μεταξύ των σημείων p και q θα μοιάζει με την καμπύλη Y. Επομένως κάθε συνεχές που ενώνει τα σημεία p και q και περιέχεται στην καμπύλη W θα είναι τομή του επιπέδου μεταξύ κάποιων σημείων a και b τα οποία δίνονται από τον κόμβο.



Σχήμα 70: Η καμπύλη W.

§. 5.2 ΤΑΞΗ ΔΙΑΚΛΑΔΩΣΗΣ

Λέμε ότι η τάξη διακλάδωσης (συμβολίζουμε ord_pX) μιας καμπύλης X στο σημείο $p \in X$ ικανοποιεί την ανισότητα:

$$ordX_p \leq \mathbf{m}$$

όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό συνολο U τέτοιο ώστε:

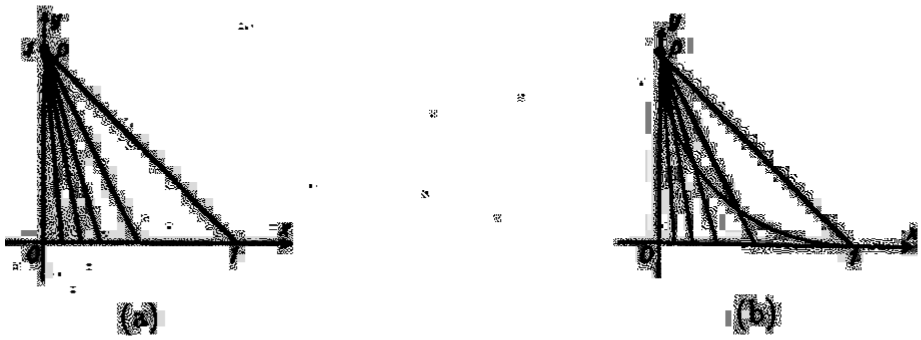
$$(*) \qquad p \in U, \quad diamU < \varepsilon$$

και το σύνορο $clU - U$ έχει πληθάριθμο το πολύ $\mathbf{m}$.

Το **c** πληθάριθμος του συνεχούς, είναι ο μεγαλύτερος πληθάριθμος, ο οποίος μπορεί να είναι τάξη διακλάδωσης. Γνωρίσαμε παραδείγματα καμπύλων, που έχουν την παραπάνω τάξη διακλάδωσης, δηλαδή, δεν ικανοποιούν την ανισότητα:

$$ord_p X \leq \aleph_0.$$

Τέτοια είναι για παραδειγμα, η σκούπα του Cantor, το συνεχές του Brouwer, το συνεχές του Knaster,το χαλί του Sierpiņski. Πραγματικά στις καμπύλες αυτές το σύνορο, κάθε μιας οσοδήποτε μικρής περιοχής του σημείου $p \in X$, έχει πληθάριθμο το συνεχές.



Σχήμα 71: Η αρμονική σκούπα (a) και η ''φθίνουσα'' αρμονική σκούπα (b)

5.2.1 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Οπου το $\aleph_0$ είναι τάξη διακλάδωσης.* Ας ενώσουμε το σημείο:

$$p = (0, 1)$$

του επιπέδου, με ευθύγραμμα τμήματα με καθένα από τα σημεία $(0, 0)$ και $(0, \frac{1}{i})$ του άξονα των x (όπου $i = 1, 2, \ldots$). Η ένωση όλων αυτών των τμημάτων ειναι μια καμπύλη που λέγεται *αρμονική σκούπα* (Σχήμα 71(a)). Αυτή αποτελείται από μια ακολουθία ευθυγράμμων τμημάτων, τα οποία συγκλίνουν τοπολογικά στο κάθετο ευθύγραμμο τμήμα του άξονα των y κι έχουν κοινό σημείο p. Το πλήθος των τμημάτων είναι αριθμήσιμο - στο σημείο αυτό διαφέρει από την σκούπα του Cantor. Η τάξη διακλάδωσης στο σημείο p και σε κάθε σημείο του κάθετου τμήματος είναι $\aleph_0$. Πραγματικά, βλέπουμε εύκολα ότι :

$$ord_p X \leq \aleph_0$$

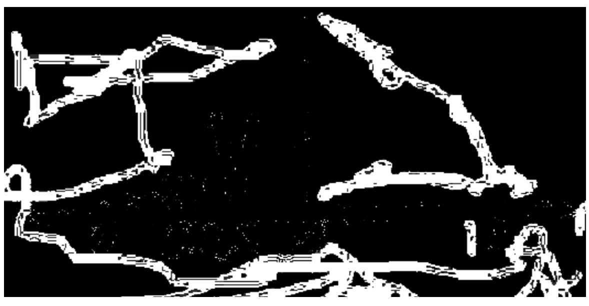
και παρατηρούμε ότι η ανισότητα:

$$ord_p X \leq n$$

δεν ικανοποιείται για κανένα φυσικό αριθμό $n = 1, 2, \ldots$. Επί πλέον στην αρμονική σκούπα το σύνορο κάθε ανοικτού συνόλου, που περιέχει το σημείο p κι έχει διάμετρο μικρότερη από 1, έχει πληθάριθμο $\aleph_0$.

Αλλο παράδειγμα καμπύλης με τάξη διακλάδωσης $\aleph_0$, είναι η συμπυκνωμένη ημιτονοειδής.

5.2.2 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Οι τάξεις διακλάδωσης μιας καμπύλης μπορεί να είναι πεπερασμένες σε κάθε σημείο αλλά να μην είναι φραγμένες, δηλαδή να υπάρχουν σημεία με οσοδήποτε μεγάλη τάξη διακλάδωσης. Τέτοια καμπύλη μπορουμε να κατασκευάσουμε αν πάρουμε, στα σημεία $\frac{1}{i}$ του I, ευθύγραμμα τμήματα, προς το άνω ημιεπίπεδο, τέτοια ώστε να έχουν ένα μόνο κοινό σημείο με το τμήμα I (Σχήμα 72). Τα τμήματα, τα οποία βγαίνουν από δυο διαφορετικά σημεία $\frac{1}{i}$ και $\frac{1}{j}$ είναι ξένα μεταξύ τους κι από κάθε σημείο $\frac{1}{i}$ βγαίνουν $i-1$ τμήματα μήκους $\frac{1}{i}$. Η καμπύλη, η οποία είναι η ένωση του I κι΄ όλων των τμημάτων που προσθέσαμε, έχει στο σημείο $\frac{1}{i}$ τάξη διακλάδωσης $i+1$ για $i = 1, 2, \ldots$



Σχήμα 72: Παράδειγμα 5.2.2.

5.2.3 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ας πάρουμε τώρα υπ'οψη το μέρος της αρμονικής σκούπας, το οποίο βρίσκεται μέσα στον κύκλο με ακτίνα 1 και κέντρο το σημείο $(1, 1)$. Αυτή είναι μια καμπύλη X' στην οποία ανήκει η κορυφή p της αρμονικής σκουπας X, όμως τα ευθύγραμμα τμήματα είναι μικρότερα και το μήκος τους τείνει στο μηδεν (Σχήμα 71(b)). Βλέπουμε ότι, η τάξη διακλάδωσης της X' στο σημείο p δεν είναι πεπερασμένη, αλλά δύσκολα μπορεί να ονομαστεί τάξη διακλάδωσης $\aleph_0$. Πραγματικά, το σημείο p βρίσκεται σε περιοχές του X', οσοδήποτε μικρές, που τα σύνορα τους ειναι πεπερασμένα. Για να πειστούμε αρκεί να θεωρήσουμε τις σφαιρικές περιοχές του σημείου στο X', δηλαδή τα κομμάτια της X' , τα οποία περιέχονται μέσα σε κύκλους με κέντρο το p. Το σύνορο του καθένα από αυτούς τους κύκλους τέμνει την X' μόνο σε πεπερασμένο πλήθος σημείων, το οποίο δεν ισχύει για την αρμονικη σκούπα.

Παρατηρούμε λοιπόν την ύπαρξη μιας ενδιάμεσης τάξης διακλάδωσης μεταξύ φυσικών τάξεων n και της τάξης $\aleph_0$. Αυτή την τάξη ας την συμβολίσουμε με ω. Ακριβέστερα, η τάξη διακλάδωσης μιας καμπύλης X σε ένα σημείο $p \in Q$ ικανοποιεί την ανισότητα:

$$ord_p X \leq \omega,$$

όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό συνολο U στο X τέτοιο ώστε, το U να ικανοποιεί την συνθήκη (*) και το σύνορο $clU - U$ να είναι πεπερασμένο. Είδαμε, οτι η τάξη ω είναι μεγαλύτερη από κάθε πεπερασμένη τάξη και μικροτερη από την τάξη $\aleph_0$.

Ολες λοιπόν οι τάξεις διακλαδώσεων καμπυλών μπορούν να διαταχθούν ως εξής:

$$(**) \qquad 1 < 2 < \ldots\ldots < n < \ldots\ldots < w < \aleph_0 < \mathbf{c},$$

όπου πριν από το w βρίσκεται άπειρο πλήθος όρων. Ας παρατηρήσουμε στο περιθώριο, ότι η παραπάνω ακολουθία είναι καλά διατεταγμένη κι ο διατακτικός της αριθμός ειναι $w_0 + 3$.

Εστω ότι $\mathbf{m}$ είναι ένας όρος της ακολουθίας (**). Λέμε, ότι μια καμπύλη Q έχει, σ'ενα σημείο $p \in Q$, *τάξη διακλάδωσης* $\mathbf{m}$, δηλαδή:

$$ord_p X = \mathbf{m},$$

όταν ικανοποιεί την ανισότητα:

$$ord_p Q \leq \mathbf{m}$$

και δεν ικανοποιούνται οι ανισότητες:

$$ord_p X \leq \mathbf{k}$$

για κανένα $\mathbf{k} < \mathbf{m}$ της ακολουθίας (**). Στα παραδείγματα, που είδαμε πρίν, συναντήσαμε σημεία με όλες τις δυνατές τάξεις διακλάδωσης.

Αφού έχει εισαχθεί η έννοια της τάξης διακλάδωσης μπορούμε να ταξινομήσουμε τις καμπύλες και τα σημεία τους. Μια καμπύλη λέγεται *κανονική* όταν:

$$ord_p X \leq w$$

για κάθε $p \in Q$. Μια κανονική καμπύλη πρέπει λοιπόν σε κάθε σημείο της να έχει τάξη διακλάδωσης πεπερασμένη ή ίση με το w (για παράδειγμα οι καμπύλες των σχημάτων 71(β) και 72). Μια καμπύλη Q ονομάζεται *ρητή* αν:

$$ord_p X \leq \aleph_0$$

για κάθε $p \in Q$. Προφανώς όλες οι κανονικές καμπύλες είναι ρητές. Ρητές και μή κανονικές καμπύλες είναι π.χ. η αρμονική σκούπα κι η συμπυκνωμένη ημιτονοειδης. Μη ρητές ειναι όλες οι αναποσυνθέσιμες καμπύλες καθώς, η σκούπα του Cantor , ή το χαλί του Sierpinski . Το αδιάσπαστο συνεχές, το οποίο περιγράψαμε στο Παράδειγμα 3.1.5 είναι μή ρητή καμπύλη.

Θάρχίσουμε την ταξινόμηση των σημείων στις καμπύλες από τις κατώτερες τάξεις διακλάδωσης. Ενα σημείο p μιας καμπύλης Q, λέγεται *τελικό σημείο* της καμπύλης όταν:

$$ord_p X = 1$$

Μια καμπύλη μπορεί να μην έχει τελικό σημείο - π.χ. η τάξη διακλάδωσης μιας απλής, κλειστής καμπύλης σε κάθε σημείο της είναι ίση με 2, ενώ στο χαλί του Sierpinski , σε κάθε σημείο του έχουμε τάξη διακλάδωσης $\mathbf{c}$. Η άκρη ενός τόξου είναι, με την παραπάνω έννοια, τελικό σημείο. Ενα σημείο p, μιας καμπύλης Q, λέγεται *σημείο διακλάδωσης* της καμπύλης αυτής όταν:

$$ord_p X \geq 3$$

Μια απλή, κλειστή καμπύλη δεν έχει τελικά σημεία ούτε σημεία διακλάδωσης. Επίσης, ένα τόξο δεν έχει σημεία διακλάδωσης. Η έλλειψη σημείων διακλάδωσης είναι χαρακτηριστική για τα δυο τελευταία παραδείγματα.

5.2.4 ΘΕΩΡΗΜΑ (Menger). *Αν μια τοπικά συνεκτική καμπύλη X έχει στο σημείο p τάξη διακλάδωσης:*

$$ord_r X \geq \mathbf{m}$$

όπου $\mathbf{m} = n$ (είτε $\mathbf{m} = w$), τότε στο Q υπάρχουν n τόξα (είτε άπειρα το πλήθος τόξα, αντίστοιχα) για τα οποία το p είναι κοινή άκρη και τα οποία δεν έχουν άλλο κοινό σημείο εκτός από το p.□

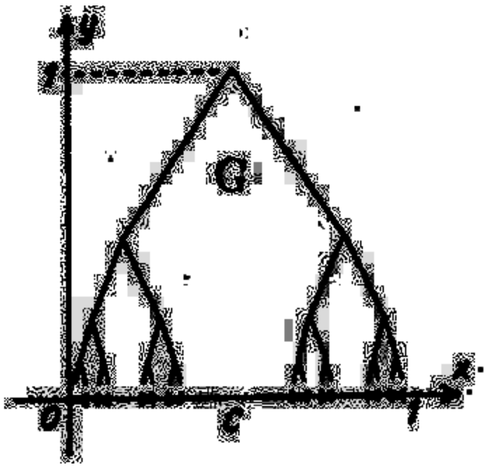
Η αρμονική σκούπα, της οποίας η τάξη διακλάδωσης στο σημείο p είναι $\aleph_0$, περιέχει άπειρο πλήθος τέτοιων τόξων και μάλιστα με διάμετρο μεγαλύτερη από 1. Εδώ μπορεί κανείς να κάνει την σκέψη, ότι αν πάρουμε στο θεώρημα του Menger $\mathbf{m} = \aleph_0$, τότε θα έπρεπε να έχουμε άπειρο πλήθος τόξων με διάμετρο μεγαλύτερη από έναν αριθμό $e > 0$, τα οποία να είναι ξένα έξω από το σημείο p. Αυτό όμως δεν συμβαίνει όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα.

5.2.5 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Εστω ότι Q είναι η καμπύλη, που κατασκευάζεται ως εξής: Μοιράζουμε το τμήμα I σε 2^i ίσα τμήματα και καθένα από αυτά το παίρνουμε να είναι διάμετρος ημιπεριφέρειας κύκλου του πάνω ημιεπιπέδου. Το ίδιο τμήμα I το διαιρούμε σε 3^i ίσα τμήματα και τα θεωρούμε διαμέτρους ημιπεριφερειών κύκλου του κάτω ημιεπιπέδου. Αυτό το κάνουμε, για κάθε $i = 1, 2, \ldots$. Η καμπύλη Q είναι ένωση του τμήματος I κι όλων των άνω και κάτω ημιπεριφερειών κύκλων οι οποίες αποτελούν μια αριθμήσιμη οικογένεια (Σχήμα 73).

Μπορεί να δει κανείς ότι η Q είναι τοπικά συνεκτική κι ότι, για κάθε $e > 0$ στην Q υπάρχει μόνο πεπερασμένος αριθμός ανά δύο ξένων συνεχών με διάμετρο μεγαλύτερη από το e. Ενώ η τάξη διακλάδωσης στην Q, σε κάθε σημείο του τμήματος I είναι $\aleph_0$. Αρα, η καμπύλη Q είναι ρητή και μη-κανονική. Προφανώς περιέχει απλές κλειστές καμπύλες. Αυτό είναι απαραίτητο, για να έχουμε συγχρόνως τοπική συνεκτικότητα και μη-κανονικότητα.

Σχήμα 73: Παράδειγμα 5.2.5.

Τα τοπικά συνεκτικά συνεχή, τα οποία δεν περιέχουν καμία απλή κλειστή καμπύλη τα ονομάζουμε *δενδρίτες*. Κάθε δενδρίτης είναι και κανονική καμπύλη. Το πιο απλό παράδειγμα δενδρίτη είναι ένα τόξο. Η αρμονική σκούπα δεν είναι δενδρίτης, αφού δεν είναι τοπικά συνεκτική. Το χαλί του Σιερπινσκι δεν είναι δενδρίτης, γιατί περιέχει απλές κλειστές καμπύλες. Οι δενδρίτες μπορούν να έχουν σημεία, με οποιαδήποτε διακλάδωση πεπερασμένης τάξης (Σχήμα 72) κι επίσης σημεία με τάξη διακλάδωσης w (Σχήμα 71(β».



Σχήμα 74: Παράδειγμα 5.2.6.

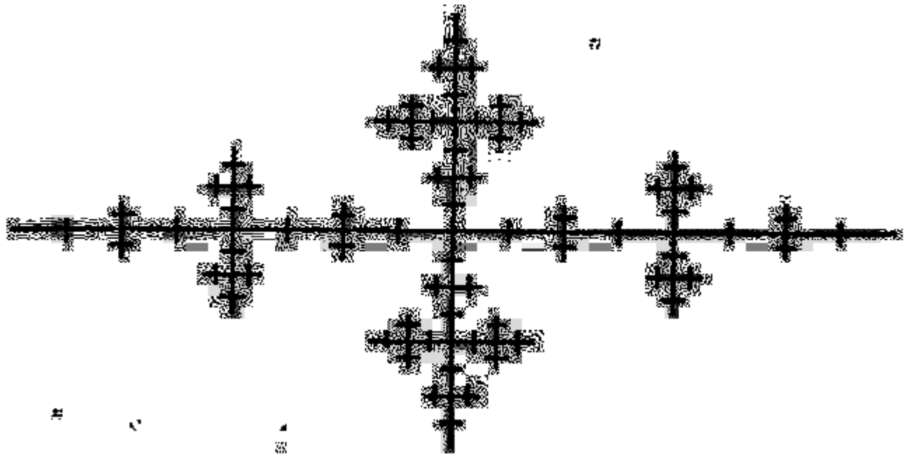
5.2.6 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Τα τελικά σημεία ενός δενδρίτη μπορούν νάποτελούν για παράδειγμα, όλο το σύνολο του Cantor . Τέτοιος δενδρίτης G

κατασκευάζεται στο άνω ημιεπίπεδο αν τοποθετήσουμε το σύνολο C του Cantor στο άξονα των q κι ενώσουμε την κορυφή $(\frac{1}{2}, 1)$ με ευθύγραμμα τμήματα έτσι ώστε, κάθε τμήμα πριν την διακλάδωση του να φθάνει μέχρι το σημείο με τετμημένη x ίση με την τετμημένη x του μέσου του εκάστοτε διαστήματος από την προσέγγιση του συνόλου Cantor . (Σχήμα 74).

Εχουμε αριθμήσιμο πλήθος τμημάτων και το μήκος τους τείνει στο μηδέν. Ο δενδρίτης G είναι ένωση των τμημάτων του άνω ημιεπιπέδου και του συνόλου του ἄντορ. Από την κορυφή προς κάθε σημείο $c \in C$ οδηγεί ένας δρόμος στο G και κάθε τέτοιο σημείο είναι τελικό σημείο του δενδρίτη G (βλέπε επίσης σημείωση 2.3.1).

5.2.7 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Το κοιμητήριο του Janiszewski* . Θα περιγράψουμε τώρα άλλον δενδρίτη στον οποίο το σύνολο των τελικών σημείων θα είναι ακόμη πιο πλούσιο. Θα είναι μάλιστα πυκνό σε όλο τον δενδρίτη. Επίσης, το σύνολο των σημείων διακλάδωσης θα είναι πυκνό στον δενδρίτη. Στη μέση του τμήματος I παίρνουμε ένα μικρότερο τμήμα J κάθετο προς το I και τέτοιο ώστε το σημείο τομής να είναι στη μέση του τμήματος J. Η ένωση $I \cup J$ είναι ένας δενδρίτης με σχήμα σταυρού, ο οποίος έχει τέσσερα χέρια. Σε κάθε ένα από αυτά κάνουμε το ίδιο που κάναμε νωρίτερα με το τμήμα I, δηλαδή προσθέτουμε ένα κάθετο τμήμα προς αυτό, το οποίο τέμνεται με αυτό στην μέση, κι είναι πιο κοντό. Οταν προσθέσουμε τα νέα τμήματα έχουμε πάλι ένα δενδρίτη, ο οποίος αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα και με τα οποία ξανακάνουμε την ίδια διαδικασία όπως με το I. Ενώνουμε όλα τα τμήματα κ.ο.κ.

Αν το μήκος των νέων τμημάτων τείνει αρκετά γρήγορα στο μηδέν, τότε αν πάρουμε την κλειστή θήκη όλων των τμημάτων θα έχουμε τον ζητούμενο δενδρίτη (Σχήμα 75). Κατά την κατασκευή τα μήκη των τμημάτων χρειάζεται να συγκλίνουν γρήγορα προς το μηδέν, για να μην εμφανιστούν στην κλειστή θήκη της ένωσης απλές κλειστές καμπύλες. Εύκολα βλέπει κανείς ότι το σύνολο των τελικών σημείων και το σύνολο των σημείων διακλάδωσης είναι πυκνά στον οριακό δενδρίτη. Πραγματικά, στις διαδοχικές προσεγγίσεις τα τελικά σημεία και τα σημεία διακλάδωσης είναι όλο και



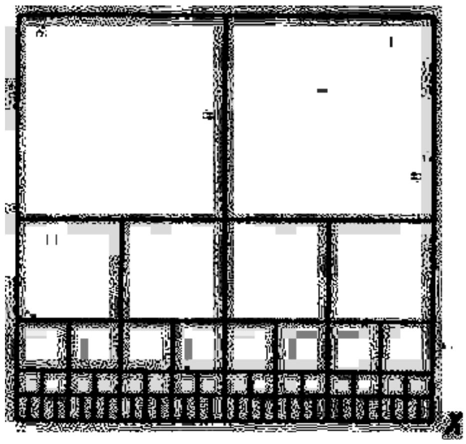
Σχήμα 75: Παράδειγμα 5.2.7.

πυκνότερα, αλλά πεπερασμένα. Το σύνολο όλων των σημείων διακλάδωσης, στον οριακό δενδρίτη είναι αριθμήσιμο, αφού αποτελείται μόνο από τα σημεία διακλάδωσης, που έχουν οι δενδρίτες της προσέγγισης. Το σύνολο των τελικών σημείων του δενδρίτη δεν είναι αριθμήσιμο. Εκτός από τα τελικά σημεία των προσεγγίσεων περιέχει υπεραριθμήσιμο πλήθος νέων σημείων, προς τα οποία τα παραπάνω σημεία συγκλίνουν. Στον οριακό δενδρίτη έχουμε τάξεις διακλάδωσης, ίδιες με αυτές των δενδριτών της προσέγγισης, δηλαδή: 1,2 και 4.

Το γεγονός, ότι το σύνολο των σημείων διακλάδωσης είναι αριθμήσιμο δεν είναι χαρακτηριστικό μόνο του δενδρίτη του παραδείγματος. Αποδεικνύεται ότι σε κάθε δενδρίτη το σύνολο των σημείων διακλάδωσης είναι αριθμήσιμο.

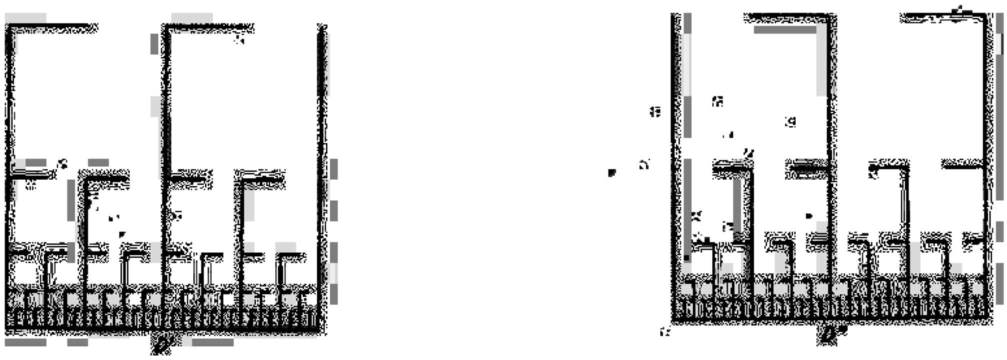
Στο τελευταίο παράδειγμα, οι δενδρίτες της προσέγγισης αποτελούσαν μια αύξουσα ακολουθία κι ο οριακός δενδρίτης ήταν η κλειστή θήκη της ένωσης, της ακολουθίας αυτής. Γιάυτό ήταν εύκολο να διατηρηθούν οι τάξεις διακλάδωσης. Οταν ενώνουμε καμπύλες, η τάξη διακλάδωσης μπορεί να αυξηθεί και δεν είναι υποχρεωτικά περιορισμένη, από το άθροισμα των τάξεων διακλάδωσης των καμπύλων που ενώνουμε.

5.2.8 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Ας πάρουμε μια τοπικά συνεκτική καμπύλη Q, η οποία αποτελείται από την περίμετρο ενός τετραγώνου κι από άπειρο πλήθος ευθυγράμμων τμημάτων, που περιέχονται στο τετράγωνο κι είναι παράλληλα στις πλευρές του τετραγώνου (Σχήμα 76).



Σχήμα 76: Παράδειγμα 5.2.8

Μια ακολουθία τμημάτων συγκλίνει τοπολογικά στην κάτω πλευρά του τετραγώνου ενώ μια άλλη ακολουθία αποτελείται από τμήματα κάθετα σε αυτή την πλευρά και με μήκη, που τείνουν στο μηδέν. Τα τμήματα της δεύτερης ακολουθίας τα παίρνουμε, για να είναι τοπικά συνεκτική η καμπύλη Q. Προφανώς, η τάξη διακλάδωσης της Q σε κάθε σημείο της κάτω πλευράς του τετραγώνου είναι ίση με $\aleph_0$. Ομως, η Q είναι ένωση δυο δενδριτών D' και D'' , ο καθένας από τους οποίους έχει τάξεις διακλάδωσης το πολύ 3 (Σχήμα 77).



Σχήμα 77: Η X ως ένωση δυο δενδριτών D' και D''.

Οι δενδρίτες D' και D'' περιέχουν την κάτω πλευρά του τετραγώνου, μέσα στην κλειστή θήκη των τελικών τους σημείων καθώς επίσης και στην κλειστή θήκη των σημείων διακλάδωσης. Αυτό μας δείχνει, ότι η ένωση δυο κανονικών καμπυλών δεν είναι υποχρεωτικά κανονική.

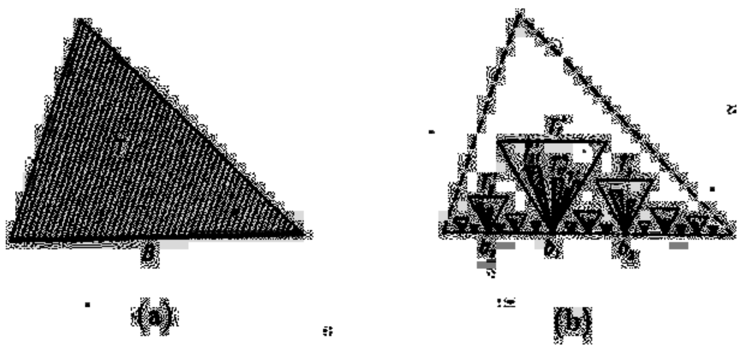
§5.3 ΚΑΘΟΛΙΚΟΣ ΔΕΝΔΡΙΤΗΣ

Το 1923 ο Ważewski κατασκεύασε στο επίπεδο τον καθολικό δενδρίτη D, ο οποίος περιέχει (ομοιομορφικά) όλους τους δενδρίτες. Για κάθε δενδρίτη D', που δεν βρίσκεται υποχρεωτικά στο επίπεδο, μπορούμε να βρούμε ένα δενδρίτη ομοιομορφικό με τον D', που να περιέχεται στον D. Ετσι λοιπόν, από την τοπολογική άποψη η εξέταση των δενδριτών ανάγεται στην εξέταση ενός συγκεκριμένου δενδρίτη, του καθολικού δενδρίτη, ο οποίος επιπλέον μπορεί να κατασκευαστεί στο επίπεδο.

5.3.1 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. *Καθολικός δενδρίτης.* Ας πάρουμε και πάλι την τομή μιας φθίνουσας ακολουθίας συνεχών

$$D_1 \supset D_2 \supset \ldots \supset D_n \supset \ldots$$

Εστω ότι T είναι ένα τρίγωνο με διακεκριμένη την μια πλευρά B (Σχήμα 78(α».



Σχήμα 78: Παράδειγμα 5.3.1.

Θα ορίσουμε έναν μετασχηματισμό W, ο οποίος αν εφαρμοστεί στο τρίγωνο T δίνει ως αποτέλεσμα μια άπειρη ακολουθία τριγώνων με διακεκριμένες πλευρές τα οποία περιέχονται στο αρχικό τρίγωνο. Ας πάρουμε στο τμήμα B ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο, το οποίο δεν περιέχει τα άκρα του διαστήματος B. Τα σημεία, του παραπάνω συνόλου, μπορούμε να τα αριθμήσουμε με μια άπειρη ακολουθία:

$$b_1, b_2, \ldots, b_m, \ldots$$

και να κατασκευάσουμε από αυτά, προς το εσωτερικό του T, τα τρίγωνα:

$$T_1', T_2', \ldots, T_m', \ldots$$

ανά δύο ξένα και με διαμέτρους που να τείνουν στο μηδέν (Σχήμα 78(β».

Πραγματικά, αρκεί στα σημεία b_m να σχηματίσουμε ζεύγη ευθειών, που να τέμνουν το τμήμα B και στις γωνίες, που έχουμε, να πάρουμε αρκετά χαμηλά τρίγωνα. Κάθε ένα τρίγωνο T_m', $m = 1, 2, \ldots$, έχει ένα ακριβώς κοινό σημείο με το τμήμα B, το σημείο b_m, που είναι η κορυφή του τριγώνου T_m'. Μέσα στο τρίγωνο T_m' κατασκευάζουμε τα τρίγωνα T_{m_i}' με διάμετρο, που τείνει στο μηδέν (Σχήμα 78(β». Κάθε τρίγωνο T_{m_i}' έχει μια κορυφή στο σημείο b_m κι εκτός από το σημείο αυτό είναι ξένο με κάθε άλλο τρίγωνο T_{m_i}'. Τα τρίγωνα T_{m_i}' στο σημείο b_m θυμίζουν την κομμένη αρμονική σκούπα (Παράδειγμα 5.2.4). Την διπλή ακολουθία T_{m_i}' μπορούμε να την αριθμήσουμε ως μια ακολουθία:

$$T_1, T_2, \ldots, T_k, \ldots$$

έτσι ώστε οι διάμετροι $diamT_k$ των τριγώνων να τείνουν στο μηδέν και να ικανοποιούν την ανισότητα:

$$(***) \qquad diamT_k < \frac{1}{2} diamT$$

για κάθε $k = 1, 2, \ldots$. Σε κάθε τρίγωνο T_k διακρίνουμε από μια πλευρά B_k, της οποίας μια άκρη βρίσκεται στο τμήμα B. Ο μετασχηματισμός W είναι η αντιστοιχία προς τα τρίγωνα T_k με τις διακεκριμένες πλευρές B_k από το τρίγωνο T με την πλευρά B.

Ας συμβολίσουμε με D_1 την ένωση της πλευράς B κι όλων των τριγώνων $T_k, k = 1, 2, \ldots$. Κάνουμε τώρα τον μετασχηματισμό W, σε καθένα από τα τρίγωνα T_k. Ετσι θα έχουμε νέα τρίγωνα με διακεκριμένες πλευρές - άπειρα το πλήθος - μέσα σε κάθ'ενα από τα τρίγωνα T_k. Συμβολίζουμε με D_2 την ένωση της πλευράς B όλων των πλευρών B_k και όλων των νέων τριγώνων. Το D_2 είναι λοιπόν ένα συνεχές το οποίο περιέχεται στο D_1. Σε καθένα από τα νέα τρίγωνα πάλι κάνουμε το μετασχηματισμό W κ.ο.κ. Στο n-στο βήμα της κατασκευής εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό W σε καθένα από τα τρίγωνα του προηγουμένου βήματος ενώ στη συνέχεια παίρνουμε ως D_n την ένωση, των διακεκριμένων πλευρών όλων των προηγούμενων τριγώνων και των τριγώνων του n-στου βήματος. Ως αποτέλεσμα έχουμε μια άπειρη φθίνουσα ακολουθία συνεχών n, κι ορίζουμε το συνεχές:

$$D = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n.$$

5.3.2 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Το συνεχές D είναι καθολικός δενδρίτης.*

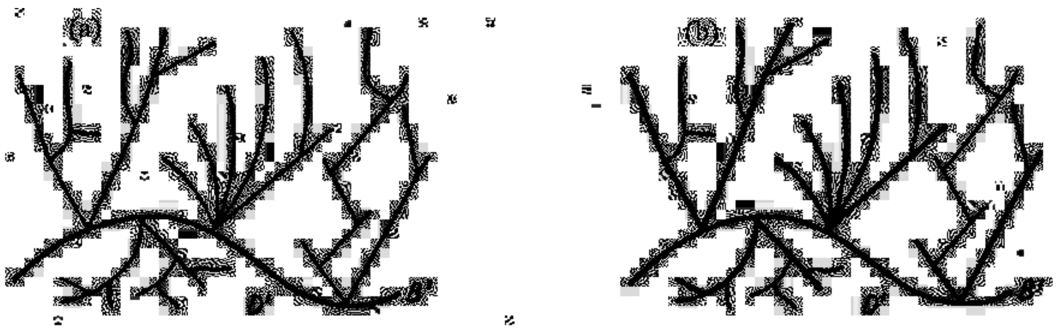
ΑΠΟΔΕΙΞΗ. Πρώτα, είναι εύκολο να δεί κανείς ότι το D είναι τοπικά συνεκτικό. Πραγματικά, τοπικά η δομή του D δεν διαφέρει από την δομή ολόκληρου του D, άρα οσοδήποτε μικρά κομμάτια του D είναι επίσης συνεχή κι από το θεώρημα Sierpiņski (4.1.6) έπεται η τοπική συνεκτικότητα. Το συνεχές D δεν περιέχει καμμιά απλή κλειστή καμπύλη. Αυτό συμπεραίνεται από το γεγονός ότι τα τρίγωνα που αποτελούν το D_n έχουν (βλέπε την (***» διάμετρο μικρότερη από το $diam\frac{T}{2^n}$ κι επομένως μια απλή κλειστή καμπύλη, που περιέχεται το D_n θα πρέπει να έχει διάμετρο φραγμένη από τον αριθμό αυτό. Επειδή όμως:

$$lim_{n\to\infty}\frac{diamT}{2^n} = 0$$

καμιά κλειστή καμπύλη δεν μπορεί να περιέχεται σε όλα τα συνεχή D_n. Ετσι δείξαμε ότι το D είναι δενδρίτης.

Για νάποδείξουμε ότι το D είναι καθολικός δενδρίτης, ας παρατηρήσουμε πρώτα, ότι η τάξη διακλάδωσης του D σε κάθε σημείο b_m της πλευράς B είναι w. Από το b_m βγαίνει άπειρο πλήθος τόξων μέσα στο D, που είναι οι διακεκριμένες πλευρές των τριγώνων T'_{m_i}. Τα σημεία b_m αποτελούν πυκνό υποσύνολο του B. Κάθε διακεκριμένη πλευρά ενός τριγώνου, που πήραμε στην κατασκευή του συνόλου D_n περιέχεται σε όλα τα σύνολα D_k για $k \geq n$, άρα περιέχεται στο δενδρίτη D. Μια τέτοια πλευρά αντιστοιχεί στην πλευρά B του αρχικού τριγώνου. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι ο δενδρίτης D έχει τάξη διακλάδωσης w στα σημεία ενός πυκνού υποσυνόλου κάθε διακεκριμένης πλευράς.

Εστω ότι D' είναι τυχαίος δενδρίτης. Θα δείξουμε ότι μπορεί να ορισθεί ένας ομοιομορφισμός h, ο οποίος νάπεικονίζει τον D' σε υποσύνολο του D. Ας πάρουμε μέσα στο D' ένα μέγιστο τόξο B', που ενώνει δυο τελικά σημεία του D' (Σχήμα 79(α».



Σχήμα 79: Θεώρημα 5.3.2.

Τον ομοιομορφισμό h θα τον ορίσουμε σταδιακά. Εστω ότι η είναι τέτοιος ώστε να μετασχηματίζει το τόξο B' σ'ενα τμήμα B του D έτσι ώστε τα σημεία διακλάδωσης του δενδρίτη D', τα οποία ανήκουν στο τόξο B', να μετασχηματίζονται σε σημεία διακλάδωσης του δενδρίτη D. Αυτό είναι δυνατό διότι τα σημεία διακλάδωσης του D, τα οποία βρίσκονται στο τμήμα B είναι πυκνά στο B. Η διαφορά $D' - B'$ αποτελείται από αριθμήσιμο πλήθος συνιστωσών, που η κλειστή τους θήκη είναι δενδρίτης κι έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με το μέγιστο τόξο B'. Σε κάθε τέτοιο δενδρίτη διαλέγουμε ένα μέγιστο τόξο, που ξεκινάει από το B' (βλέπε Σχήμα 79(β». Εστω ότι ο ομοιορφισμό h απεικονίζει αυτά τα τόξα σε αντίστοιχα τμήματα του δενδρίτη D, τα οποία φθάνουν στο τμήμα B. Τώρα θεωρούμε την διαφορά $D' - B'$, όπου B', (η παχειά γραμμή στο Σχήμα 79(β)) είναι η ένωση του τόξου B' κι όλων των επιλεγμένων μεγίστων τόξων, τα οποία φθάνουν στο B' κ.ο.κ. Παρατηρούμε ότι σε κάθε βήμα, της παραπάνω διαδικασίας, αποκτούμε απεικονίσεις τόξων σε τμήματα του δενδρίτη, τα οποία μας δίνουν όλο και καλύτερη προσέγγιση της εικόνας του δενδρίτη D'. Ο ομοιομορφισμός h είναι οριακός στην παραπάνω διαδικασία. $\square$

6. ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗΣ

καί πολλά μέλλει να μάθεις

án τό Άσήμαντο εμβαθύνεις

ΟΔΥΣΣΕΑ ΕΛΥΤΗ

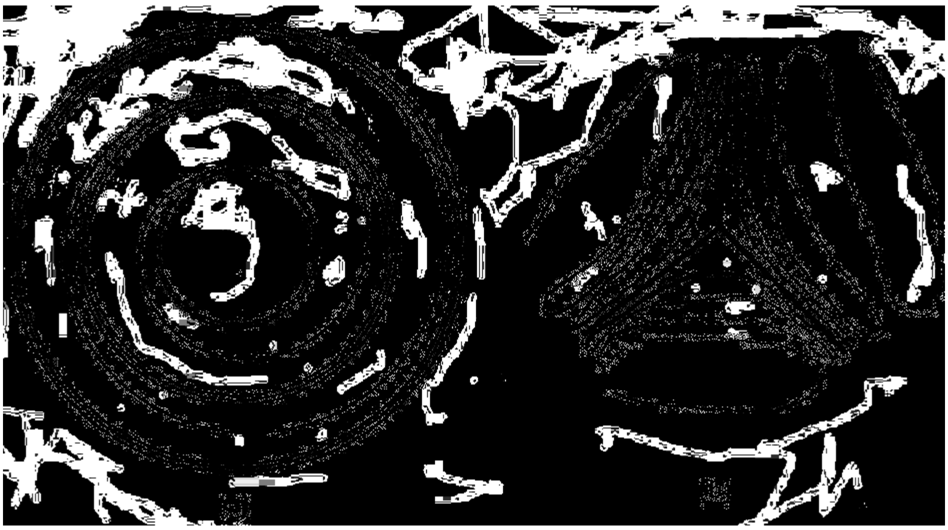
§. 6.1 Η ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

Το κύριο πρόβλημα της μελέτης των Καμπύλων είναι το πρόβλημα της Ταξινόμησης τους. Η ανάγκη της Ταξινόμησης είναι το κύριο αίτημα που αντιμετωπίζουμε σόλόκληρη την επιστήμη και την φιλοσοφία. Η ταξινόμηση είναι, ίσως, ταυτόσιμη με την Αφαίρεση και την αναζήτηση της εσωτερικής ιεράρχησης των εννοιών. Υπονοεί τις κατηγορίες του ΑΥΤΟ και του ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟ. Η αξία της ταξινόμησης στην επιστήμη προέχει ίσως κι εκείνης της Εφαρμογής. Η έρευνά μας δεν είναι παρά μια προσπάθεια μετασχηματισμού του Χάους σε Τάξη. Η τάση αυτή είναι που καθιστά συχνά την σύγχρονη επιστήμη απ΄τη μια ατέλειωτη περιπέτεια κι από την άλλη μια μουσιακή καταγραφή. Η επιστήμη συχνά αναλίσκεται στην αναζήτηση λεπτομερειών, που αν δεν τις κατανοεί κανείς μέσα στο γενικότερο γνωσιολογικό πλαίσιο, φαντάζουν ως μια ατέλειωτη ¨Αρχειοθεσία του Ασήμαντου!¨.

Η περιπέτεια της αναζήτησης των καμπύλων και των ιδιοτήτων τους είναι το ίδιο ενδιαφέρουσα όπως η αναζήτηση κάποιων ορυκτών ή ακόμη κάποιων ειδών του ζωϊκού βασιλείου. Η αξία της μελέτης τους είναι πρώτα απ'ολα αισθητική. Τ'αλλα έρχονται μετά. Η ταξινόμηση των καμπύλων γίνεται με βάση τις δομικές τοπολογικές ιδιότητες, ιδιότητες δηλαδή, που μένουν αναλλοίωτες κάτω από τους ομοιομορφισμούς. Η έννοια της συνεχούς συνάρτησης είναι έννοια πολύ πιο ασθενής από τους ομοιομορφισμούς κι ενδιάμεσα παρεμβάλεται ένας μεγάλος αριθμός συναρτήσεων (ανοικτές, μονότονες κ.ά) που διατηρούν ή όχι κάποιες αναλλοίωτες των ομοιομορφισμών. Ακόμη, έχουν ενδιαφέρον άλλες ιδιότητες οι οποίες και πάλι προσδιορίζονται μέσω των συνεχών συναρτήσεων, όπως είναι η ιδιότητα να έχει ένας χώρος σταθερό σημείο, να είναι ομοιογενής, να μπορεί με συνεχή τρόπο να συσταλεί σε σημείο κ.ά. Στο κεφάλαιο αυτό θάναφερθούμε ενδεικτικά σε κάποιες ταξινομήσεις για να γίνει κατανοητό το γενικότερο πλαίσιο μέσα στο αποίο εντάσονται τα μαθηματικά αντικείμενα που μελετήσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια.

...

Αρχίζουμε με μια σύνοψη ορισμών των συνεχών καμπύλων. Ενα συνεχές Q λέγεται ότι είναι *μονοσυμφυές* αν για κάθε δυο συνεχή Q_1 και Q_2 τέτοια ώστε $Q_1 \cup X_2 = X$, η τομή τους $X_1 \cap X_2$ να είναι συνεχές. Αν αυτό δεν συμβαίνει το συνεχές λέγεται *πολυσυμφυές*. Ενα συνεχές Q είναι *κληρονομικά μονσυμφυές* αν κάθε υποσυνεχές του είναι μονοσυμφυές. Είναι προφανές από τον ορισμό ότι *ένα κληρονομικά μονοσυμφυές είναι μονοσυμφυές*, αλλά το αντίστοφο δεν ισχύει όπως μπορούμε να δούμε από το Σχήμα 80.



Σχήμα 80: (a) Μονοσυμφυές αλλά όχι κληρονομικά (b) λ-δενδροειδές με τρίοδο.

Τις έννοιες αποσυνθέσιμο, αναποσυνθέσιμο και κληρονομικά αναποσυνθέσιμο τις έχουμε ορίσει στην σελίδα 69, 71 και 76 αντίστοιχα. Εστω ότι Q και U είναι μετρικοί χώροι κι έστω ότι οι συναρτήσεις $f_0, f_1 : X \to Y$ είναι συνεχείς. Θα λέμε ότι η συνάρτηση f_0 είναι *ομοτοπική* προς την συνάρτηση f_1 αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $H : X \times I \to Y$, η οποία λέγεται *ομοτοπία* από f_0 προς την f_1, και τέτοια ώστε $H(x, 0) = f_0(x)$ και $H(x, 1) = f_1(x)$ για κάθε $x \in X$. Γράφουμε τότε ότι $f_0 \simeq f_1$. Ενα συνεχές Q λέγεται ότι είναι *ακυκλικό* αν κάθε συνάρτηση της Q επί του κύκλου δεν είναι ουσιαστική (δηλαδή, είναι ομοτοπική προς την σταθερά συνάρτηση).

Ενα συνεχές Q ονομάζεται *δενδρόμορφο (τοξόμορφο)* αν για κάθε $e > 0$ υπάρχει συνάρτηση $f : X \to Y$ τέτοια ώστε η $diam f^{-1}(y) < e$ για κάθε σημείο $y \in Y$ και U να είναι 1-διάστατο πολύεδρο που δεν περιέχει απλή κλειστή καμπύλη (αντίστοιχα, U είναι τόξο). Τα τοξόμορφα λέγονται ενίοτε και *αλυσιδοειδή* ή *οφειοειδή*.

Το ψευδοτόξο το ορίσαμε στην σελίδα 78. Ενα συνεχές κληρονομικά αποσυνθέσιμο και κληρονομικά μονοσυμφυές λέγεται *λ-δενδρειδές*. Ενα κατά τόξα συνεκτικό και κληρονομικά μονοσυμφυές συνεχές είναι ένα *dendroeid′ec*. Οι ρητές και οι καμπύλες έχουν ορισθεί στην σελίδα 115, ο δενδρίτης στην 1174. *Τρίοδος T* ονομάζεται ένα συνεχές για το οποίο υπάρχουν τρία υποσυνεχή X_1, X_2 και X_3 τέτοια ώστε:

$$T = X_1 \cup X_2 \cup X_3, \quad X_1 \cap X_2 \cap X_3 = X_1 \cap X_2 = X_2 \cap X_3 = X_3 \cap X_1$$

κι η τομή τους είναι γνήσιο υποσυνεχές καθένα από αυτά. Ενα συνεχές είναι *ατριοδικό* αν δεν περιέχει τρίοδο. Το τόξο ή ο κύκλος είναι ατριοδικά συνεχή.

Ενα συνεχές λέγεται ότι είναι *κληρονομικά διαχωρίσιμο από σημεία* αν κάθε υποσυνεχές του περιέχει ένα σημείο το οποίο χωρίζει το υποσυνεχές αυτό.

Γράφημα (γραμμικό) λέγεται ένα συνεχές Q αν είναι ένωση από ένα πεπερασμένο αριθμό τόξων τα οποία είναι ανά δύο ξένα εκτός από τα τελικά τους σημεία.

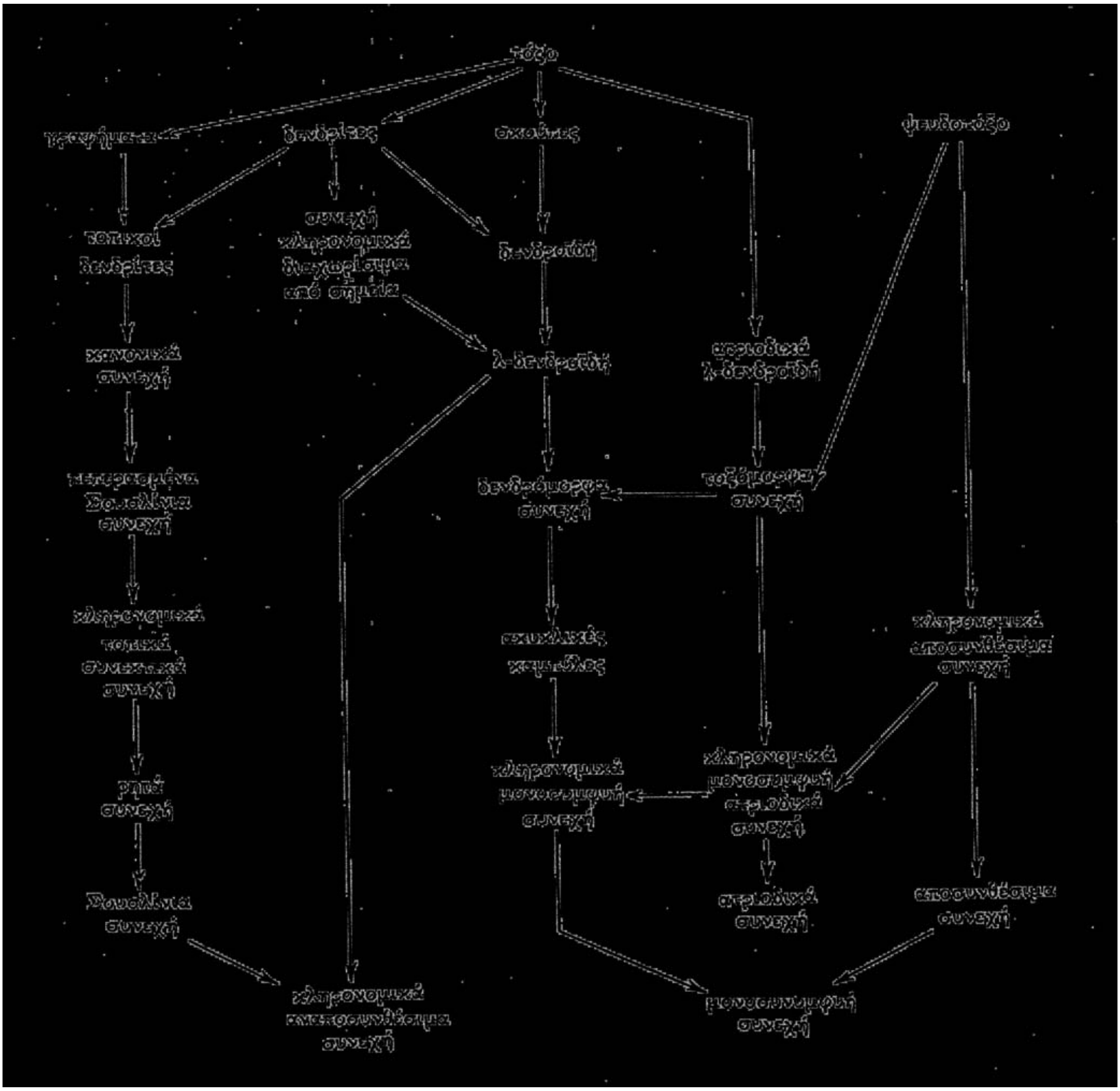
Ενα δενδροειδές που έχει ένα μόνο σημείο διακλάδωσης (βλέπε σελίδα

115) ονομάζεται *σκούπα* με το σημείο διακλάδωσης ως *κορυφή*.

Ενα συνεχές Q ονομάζεται *πεπερασμένο Σουσλίνιο συνεχές* αν για κάθε αριθμό $e > 0$, οποιαδήποτε συλλογή από ανά δυο ξένα υποσυνεχή του Q με διαμέτρους μεγαλύτερες από e είναι πεπερασμένη. Ενα συνεχές λέγεται ότι είναι *Σουσλίνιο* αν κάθε συλλογή από ανά δυο ξένα υποσυνεχή του είναι αριθμήσιμη.

Ενα συνεχές καλείται *τοπικός δενδρίτης* αν κάθε σημείο του έχει μια περιοχή η θήκη της οποίας είναι δενδρίτης. Ο επόμενος Πίνακας του T. Maçkowiak [13] προσφέρει μια γενική ταξινόμηση κάποιων βασικών κατηγοριών συνεχών. Η σχέση του βέλους είναι μια σχέση εγκλεισμού δηλαδή η κατηγορία από την οποία ξεκινά το βέλος είναι υποκατηγορία εκείνης προς την οποία δείχνει.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗΣ ΤΩΝ ΣΥΝΕΧΩΝ



§. 6.2 Η ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Η έννοια της συνάρτησης είναι βασική σε όλα τα μαθηματικά. Στην τοπολογία το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής: Τί είδους συναρτήσεις διατηρούν όλες τις τοπολογικές ιδιότητες (εκτός των ομοιομορφισμών) και ιδιαίτερα όταν εφαρμόζονται πάνω σε ειδικές κατηγορίες χώρων όπως είναι οι καμπύλες ή οι πολλαπλότητες· Ενδεικτικά θάναφέρουμε παρακάτω μια ταξινόμηση συναρτήσεων που ανήκει και πάλι στον Τ. Μαξκοωιακ [13]

...

Μια συνάρτηση f από ένα τοπολογικό χώρο Q επί ενός τοπολογικού χώρου U λέγεται ότι είναι είναι

1. *ανοικτή* αν η f απεικονίζει κάθε ανοικτό σύνολο του Χ επί ενός ανοικτού συνόλου στο U.

2. *ατομική* αν για κάθε υποσυνεχές K του Q τέτοιο ώστε το σύνολο $f(K)$ να είναι όχι μονοσύνολο, έχουμε ότι $K = f^{-1}(f(K))$.

3. *μονότονος* αν για κάθε $y \in Y$, το σύνολο $f^{-1}(y)$ να είναι συνεκτικό ή ισοδύναμα, αν η αντίστροφη εικόνα οποιουδήποτε υποσυνεχούς Y είναι υποσυνεχές.

4. *συρρέουσα* αν για κάθε υποσυνεχές Q του U κάθε συνιστώσα της αντιστρόφης εικόνας $f^{-1}(Q)$ απεικονίζεται με την f επί του Q.

5. *ημι-συρρέουσα* αν για κάθε υποσυνεχές Q στο U και για κάθε δυο συνιστώσες C_1 και C_2 της αντίστροφης εικόνας $f^{-1}(Q)$ είτε $f(C_1) \subset f(C_2)$ ή $f(C_2) \subset f(C_1)$.

6. *ασθενώς συρρέουσα* αν για κάθε υποσυνεχές Q στο U υπάρχει συνιστώσα του C ή $f^{-1}(Q)$ τέτοια ώστε $f(C) = Q$.

7. *συνδέουσα* αν για κάθε υποσυνεχές Q του Y και για κάθε δυο συνιστώσες C_1 και C_2 του συνόλου $f^{-1}(Q)$ έχουμε ότι $f(C_1) \cap f(C_2) \neq \emptyset$.

8. *ατριοδική* αν για κάθε υποσυνεχές Q του Y υπάρχουν δυο συνιστώσες C_1 και C_2 του συνόλου $f^{-1}(Q)$ τέτοιες ώστε $f(C_1) \cup f(C_2) = Q$ και για κάθε συνιστώσα C του συνόλου $f^{-1}(Q)$ έχουμε είτε $f(C) = Q$ ή $f(C) \subset f(C_1)$ ή $f(C) \subset f(C_2)$.

9. Εστω δυο κλασεις συναρτήσεων Β και Γ ορίζουμε την κλάση γινόμενο,

$$BG = \{gf : g \in B, f \in G\}$$

   AM-συνάρτηση λέγεται μια συνάρτηση που προκύπτει από το γινόμενο μιας ανοικτής και μιας ανοικτής και μιας μονότονης συνάρτησης και *MA-συνάρτηση* λέγεται μια συνάρτηση που προκύπτει από το γινόμενο μιας μονοτόνου και μιας ανοικτής.

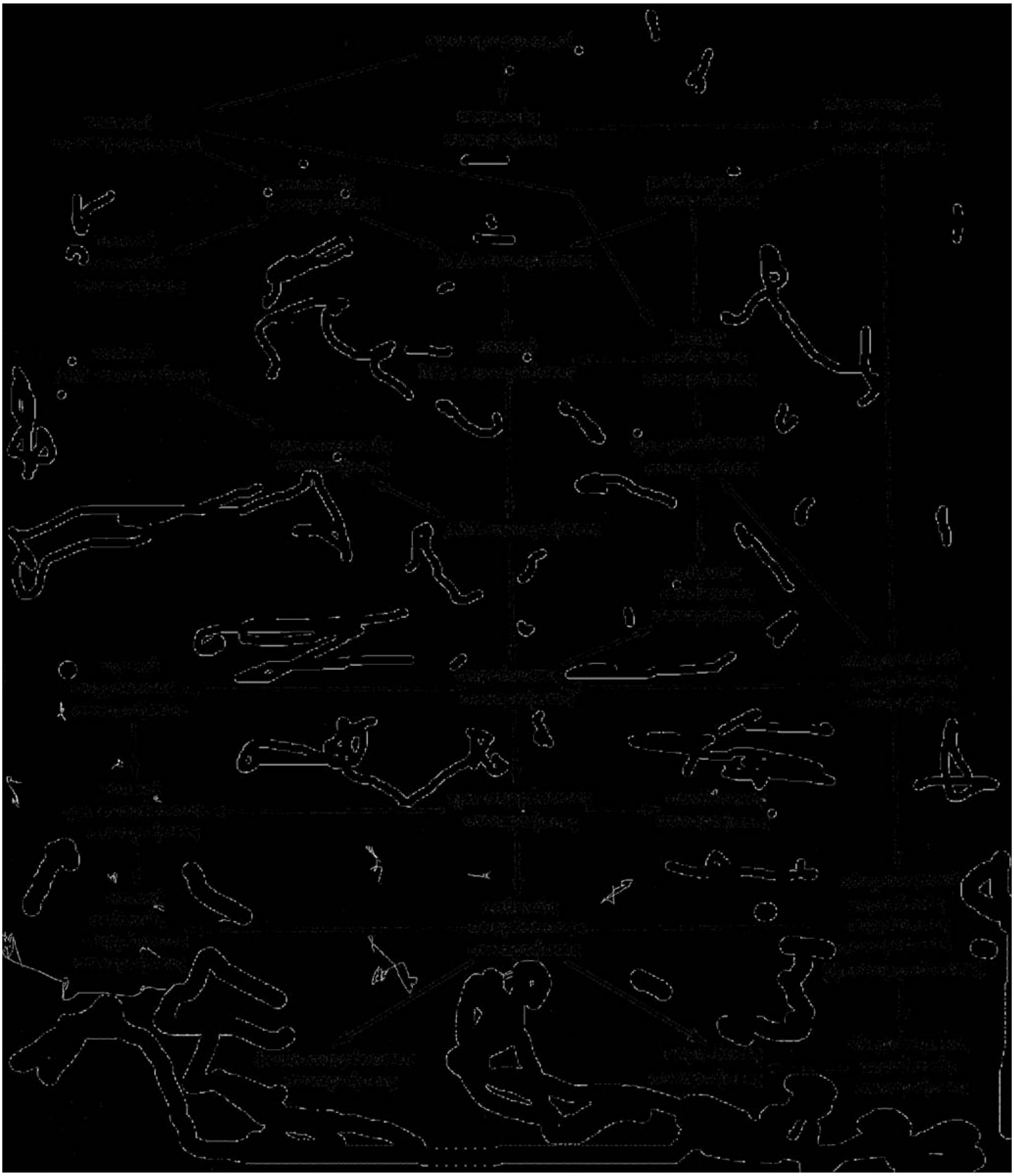
10. *κληρονομική B* λέμε μια συνάρτηση $f : X \to Y$ που ανήκει στην τάξη B και για κάθε υποσυνεχές $K \subset X$ ο περιορισμός $f \mid K$ ανήκει στην κλάση B.

11. *τοπικότητα* μιας συνάρτησης. Εστω ότι B είναι μια κλάση συναρτήσεων κι έστω μια συνάρτηση f μεταξύ δυο χώρων Q και U.Ορίζουμε την f ως *τοπικά* Β αν για κάθε σημείο $x \in X$ υπάρχει περιοχή V του σημείου x τέτοια ώστε $f(V)$ είναι μια κλειστή περιοχή του $f(x)$ κι ο περιορισμός της συνάρτησης $f \mid V$ ανήκει στην κλάση B.

12. *ως-μονότονος* αν για κάθε υποσυνεχές Q στο U με μή κενό εσωτερικό, το συνόλο $f^{-1}(Q)$ έχει ένα πεπερασμένο αριθμό συνιστωσών κι η f νάπεικονίζει κάθε μια από αυτές επί του Q.

13. *ασθενώς μονότονη* αν για κάθε συνεχές Q στο U με μή κενό εσωτερικό κάθε συνιστώσα της αντίστροφης εικόνας $f^{-1}(Q)$ απεικονίζεται με την f επί του Q.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ



§. 6.3 ΣΥΣΤΑΛΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΕΚΛΕΞΙΜΟΤΗΤΑ

Εστω ότι $x_0 \in X$. Λέμε ότι ο χώρος Q είναι *συστελόμενος προς το σημείο* x_0 αν η ταυτότική συνάρτηση $id : X \to Y$ είναι ομοτοπική προς την σταθερά συνάρτηση $c : X \to Y$, όπου $c(X) = \{x_0\}$. Αν ο χώρος Q είναι συστελόμενος προς ένα σημείο x_0, τότε προφανώς για κάθε σημείο $x_1 \in X$ υπάρχει στον Q ένα μονοπάτι από το x_1 προς το x_0 κι ο χώρος είναι επίσης συστελόμενος και προς το x_1.

6.3.1 ΠΡΟΤΑΣΗ. *Κάθε συστελόμενος χώρος είναι κατά μονοπάτια συνεκτικός.* □

...

Για ένα τοπολογικό χώρο Q συμβολίζουμε με 2^X τον χώρο που αποτελείται από όλα τα κλειστά και μή κενά σύνολα του Q κι εφοδιασμένο με την τοπολογία του Vietoris (βλέπε [17] σελίδα 215). Ο υπόχωρος του 2^Q που αποτελείται απ'ολα τα μή κενά κλειστά και συνεκτικά υποσύνολα του Q συμβολίζεται με $C(X)$. Μια *συνεχής επιλογή* για την οικογένεια $\mathcal{A} \subset 2^X$ ορίζεται ως μια συνεχής συνάρτηση $s : \mathcal{A} \to X$ τέτοια ώστε $s(A) \in A$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Υπάρχει το γενικό ανοικτό πρόβλημα E. Michael (1951): *Για ποιούς χώρους Q υπάρχουν συνεχείς επιλογές για τον* 2^Q· Στην περίπτωση των συνεχών υπάρχει το εξής Θεώρημα.

6.3.2 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ενας μετρικός χώρος Q δέχεται μια συνεχή εκλογή για τον* 2^Q *αν και μόνο αν ο Q είναι τόξο.* □

Αν τώρα στην θέση του 2^Q θέσουμε τον χώρο $C(X)$ υπάρχει το εξής πρόβλημα:

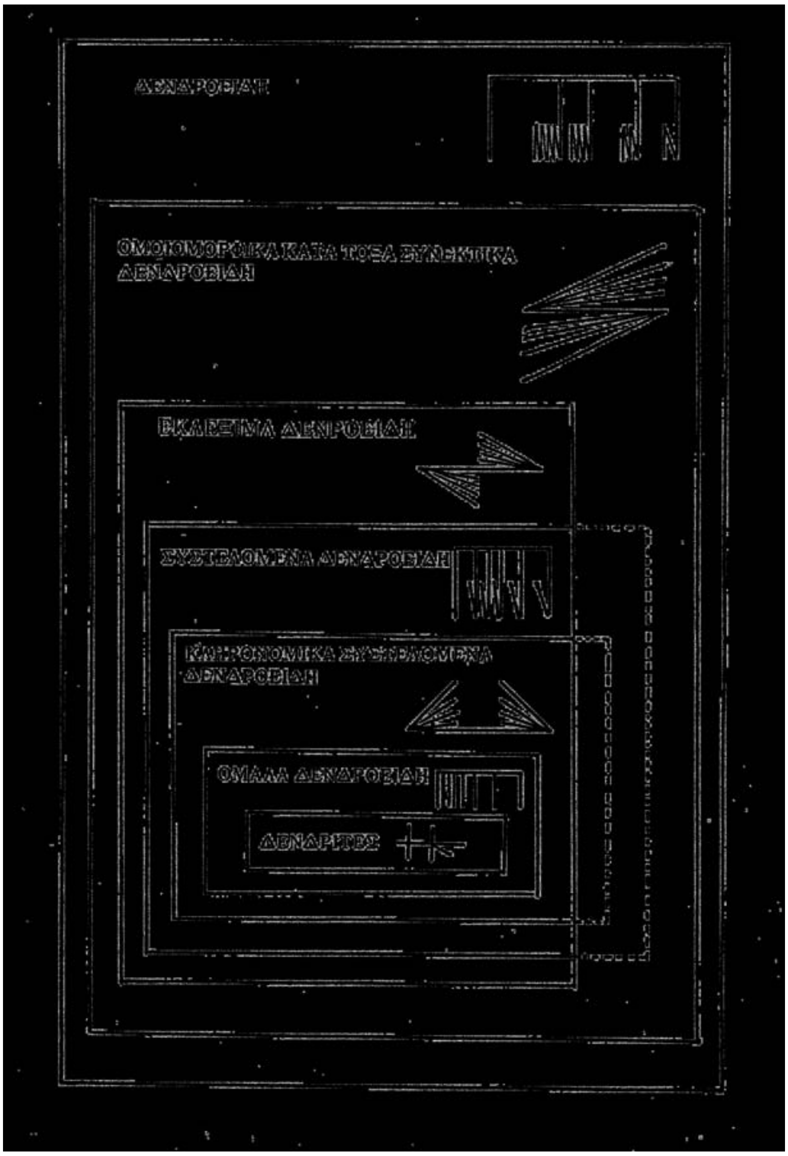
6.3.3 ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Να δώσετε ένα εσωτερικό χαρακτηρισμό των συνεχών Q που δέχονται συνεχείς εκλογές για τον υπερχώρο $C(X)$ των υποσυνεχών του.* □

Ενα τοπολογικός χώρος Q λέγεται ότι είναι *εκλέξιμος* αν δέχεται μια συνεχή εκλογή από τον υπερχώρο $C(X)$ (όλων των μή κενών κλειστών συνεκτικών υποσυνόλων).

6.3.4 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Ενας μετρικός τοπικά συνεκτικός χώρος είναι εκλέξιμος αν και μόνο αν είναι δενδρίτης.* □

Ενα δενδρειδές Q λέγεται *ομαλό* αν υπάρχει ένα σημείο $p \in X$ (το οποίο ονομάζεται αρχικό σημείο του Q τέτοιο ώστε για κάθε συγκλίνουσα ακολουθία $a_n \to a$ σημείων του Q η ακολουθία των τόξων pa_n συγκλίνει στο pa. Η αρμονική σκούπα είναι ομολό δενδροειδές συστελόμενο και εκλέξιμο. Στο Σχήμα 81 όλοι οι δενδροειδείς είναι μή ομαλοί και μή εκλέξιμοι. Εξάλλου το δενδροειδές του Σχήματος 81(e) είναι μή ομοιομορφικά κατά τόξα συνεκτικό. Ενα συνεχές Q είναι *ομοιομορφικά κατά τόξα συνεκτικό* αν είναι κατά τόξα συνεκτικό και για κάθε θετικό αριθμό e υπάρχει φυσικός αριθμός k τέτοιος, ώστε κάθε τόξο που περιέχεται στο Q να μπορεί να χωρισθεί σε k το πολύ τόξα, με διάμετρο μικρότερη του e.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗΣ ΤΩΝ ΔΕΝΔΡΟΕΙΔΩΝ



6.3.5 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Κάθε εκλέξιμο δενδροειδές είναι μια συνεχής εικόνα της σκούπας του ἄντορ, και άρα είναι ομαλά κατά τόξα συνεκτικό.* □

...

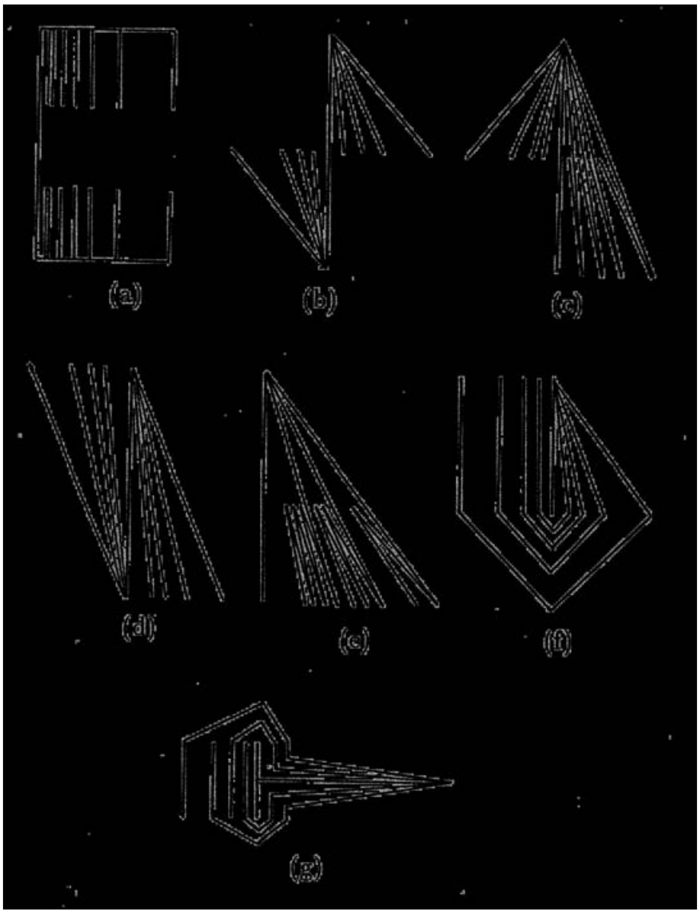
Προβλήματα ανοικτά σχετικά με τους παραπάνω όρους είναι:

6.3.6 ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Η εικόνα μιας εκλέξιμης σκούπας είναι εκλέξιμο συνεχές.*
□

6.3.7 ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Από την συσταλτικότητα των δενδροειδών επεται η εκλεξιμότητα·* □

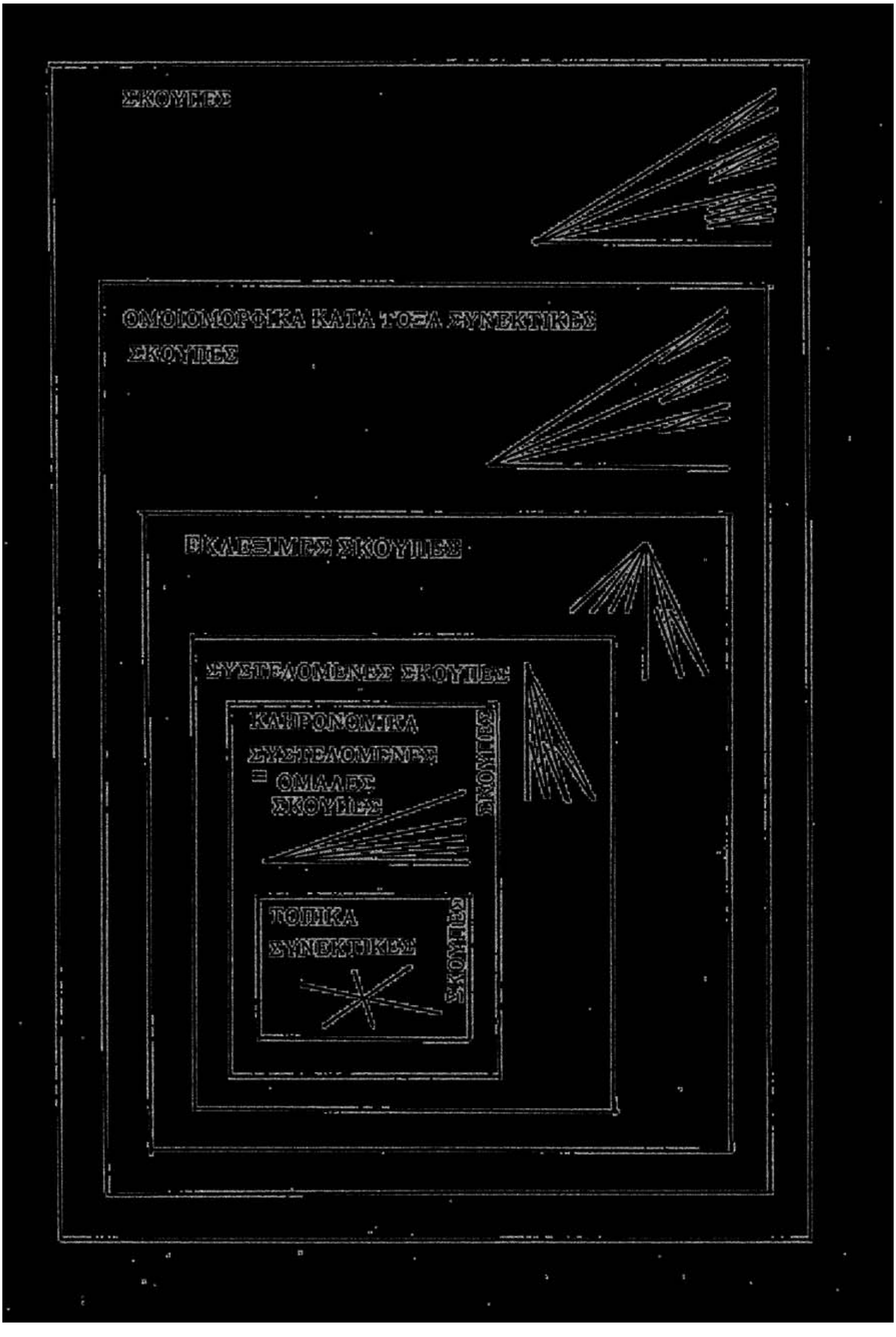
6.3.8 ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Από την κληρονομική συσταλτικότητα των δενδροειδών έπεται η εκλεξιμότητα·* □

Οι δυο πίνακες αποτελούν μια πρόταση του J.J. Charatonik [1] για την ταξινόμηση των δενδροειδών και ο δεύτερος ειδικότερα για τις σκούπες.



Σχήμα 81: Παραδείγματα δενδροειδών.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΣΚΟΥΠΕΣ



§. 6.4. ΕΠΙΠΕΔΟΤΗΤΑ

Ενα βασικό πρόβλημα της θεωρίας των συνεχών είναι αυτό της επιπεδότητας, δηλαδή για το ποιές καμπύλες μπορούν να εμφυτευθούν στο επίπεδο. Εξάλλου υπάρχει το Θεώρημα των Menger-Nobeling , άμεσο Πορισμά του οποίου είναι το επόμενο.

6.4.1 ΠΟΡΙΣΜΑ. *Για κάθε καμπύλη Q υπάρχει ομοιομορφισμός* $h : X \to h(X) \subset I^3$. □

Κάθε καμπύλη του χώρου $\Re^n$ για οποιουδήποτε n έχει μία ομοιομορφική εικόνα στον τρισδιάστατο χώρο και μάλιστα υποσυνεχές του σφουγκαριού του Μενγερ. Κατά συνέπεια το μόνο που μένει μετά από ένα τέτοιο Θεώρημα είναι να γνωρίζουμε ποιές καμπύλες είναι επίπεδες.

Λέμε ότι ένα συνεχές A *εμφυτεύεται στο επίπεδο* αν υπάρχει ομοιομορφισμός $h : A \to h(A) \subset \Re^2$. Ενα τέτοιο συνεχές θα το λέμε *επίπεδο συνεχές*.

Παρατηρούμε ότι η επιπεδότητα είναι ιδιότητα κληρονομική, σε κάθε υποσυνεχές ενός συνεχούς. Με άλλα λόγια αν ένας συνεχές περιέχει ένα μή επίπεδο υποσυνεχές τότε δεν είναι επίπεδο. Βασικό είναι το επόμενο ανοικτό πρόβλημα.

6.4.2 ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Να δωθεί ένας εσωτερικός χαρακτηρισμός των επιπέδων συνεχών.* □

Εχουμε τα επόμενα αποτελέσματα.

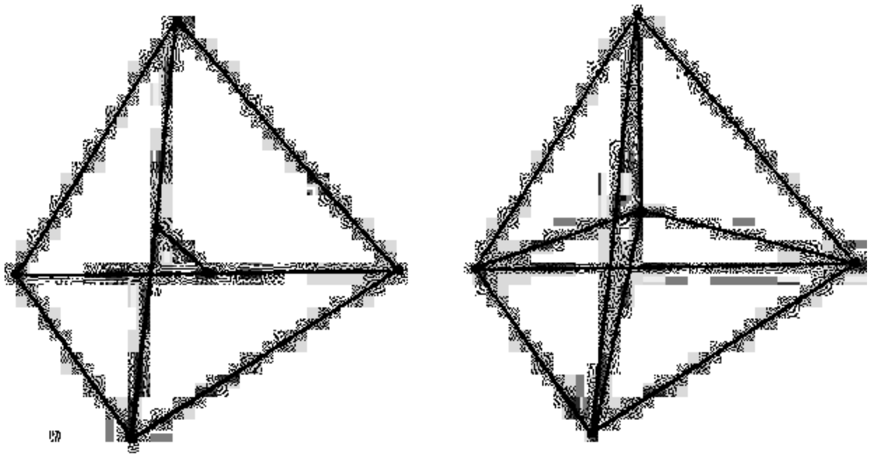
6.4.3 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Αν ένα συνεχές περιέχει μή αριθμήσιμα πλήθος τριοδικών υποσυνεχών, τοτε δεν είναι επίπεδο.* □

6.4.4 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Κάθε τοξόμορφο συνεχές είναι επίπεδο.* □

Από την κατασκευή του καθολικού δενδρίτη στο επίπεδο (βλέπε σελίδα 107), έπεται ότι:

6.4.5 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Κάθε δενδρίτης είναι επίπεδος.* □

Για την συγκεκριμένη οικογένεια των τοπικών δενδριτών ο Κυρατοωσκι έδωσε τον χαρακτηρισμό χρησιμοποιώντας τα δυο γραφήματα που απεικονίζονται στο Σχήμα 82.



Σχήμα 82: Τα γραφήματα του Kuratowski K_1, K_2.

6.4.6 ΘΕΩΡΗΜΑ. (Kuratowski) *Ενα τοπικός δενδρίτης (ή ειδικότερα γράφημα) δεν είναι επίπεδος αν και μόνο αν περιέχει κάποιο γράφημα ισομορφικό προς τα γραφήματα του σχήματος 82.* $\square$

§. 6.5 ΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΑ ΣΥΝΕΧΩΝ ΚΑΙ Η ΙΔΙΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Ενα μετρικό χώρο τον ονομάζουμε *τοπολογικά ομοιογενή* αν για κάθε ζεύγος σημείων $x, y \in X$ υπάρχει ομοιομορφισμός $h : X \to X$ τέτοιος ώστε $h(x) = y$. Για παράδειγμα η σφαιρική επιφάνεια S^n είναι τοπολογικά ομοιογενής για κάθε n. Δεν είναι τοπολογικά ομοιογενής η σφαίρα $\overline{B}^n$ για $n > 0$. Εχει αποδειχθεί ότι η από τον R. D. Anderson (1958) ότι η καμπύλη το σφουγγάρι του Menger είναι ομογενής καμπύλη, ενώ η καμπύλη του Sierpiŋski δεν είναι. Εξάλλου ο R. H. Bing (1948) έχει δείξει ότι:

6.5.1 ΘΕΩΡΗΜΑ *Κάθε ψευδοτόξο είναι τοπολογικά ομοιογενές.*

Αρα αφου το ψευτοτόξο είναι επίπεδο, υπάρχουν τοπολογικά ομογενή συνεχή κι άλλα εκτός της απλής κλειστής καμπύλης. Ωστόσο το πρόβλημα ταξινόμησης των ομογενών συνεχών είναι ακόμη άλυτο.

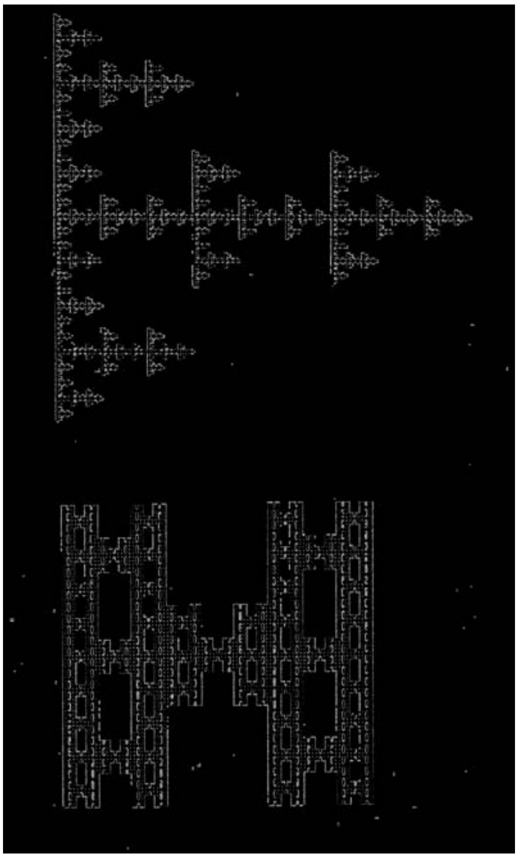
...

Αν $f : X \to X$, τότε κάθε σημείο $x \in X$ που ικανοποιεί την εξίσωση $f(x) = x$ ονομάζεται *σταθερό σημείο* της συνάρτησης f. Αν κάθε συνεχής συνάρτηση ενός μετρικού χώρου έχει σταθερό σημείο, τότε λέμε ότι ο χώρος έχει την *ιδιότητα του σταθερού σημείου*. Για τις καμπύλες έχουμε τα εξής σημαντικά. Εχεί αποδειχθεί από τον K.Borsuk (1932) ότι:

6.5.2 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Κάθε δενδρίτης έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείο*

κι αργότερα (1954) ότι:

6.5.3 ΘΕΩΡΗΜΑ. *Κάθε δενδροειδής έχει την ιδιότητα του σταθερού σημείου.*



Σχήμα 83:

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. J.J. Charatonik, Planability of Continua . ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ 1986.

2. ————, On continuous selections for the hyperspace of subcontinua . στο ίδιο.

3. ————, History of continuum theory, in: C. E. Aull and R. Lowen (eds.), Handbook of the History of General Topology, vol. 2, p. 703-786. Kluwer Academic Publishers 19 .

4. W.J. Charatonik, On Self- homeomorphism spaces, Topology and Applications 55 (1994) 215-238 .

5. E Chech, Point Sets, A. P. C. Prague 1969 .

6. R.Engelking-K.Sieklucki, Topology, A Geometric Approach, Helderman Verlag Berlin 1992.

7. R.Engelking, General Topology, P. W. N. 1977.

8. Π. Ζερβού, Απειροστικός Λογισμός, 1917.

9. J. Hoocking - G.S. Young, Topology, Dover, 1988.

10. K.Kuratowski, Introduction to set theory and topology, Pergamon Press , 1961.

11. ————, Topology I, II, Academic Press 1968.

12. A. Lelek, Zbior, P.Z.W.S, Warszawa , 1964. Στα Πολωνικά.

13. Maçkowiak, Continuous mappings on continua, dissertationes Mathematicae , 1979.

14. R. R. Moore, Foundations of Point Set Theory, A. M. S. 1962 .

15. Sam B. Nadler, Continuum Theory: an introduction. M. Dekker 1992.

16. Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας, Β. Φαρμάκη. Γενική Τοπολογία Συναρτησιακή Ανάλυση, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 1988.

17. Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας, Απειροστικός Λογισμός, Αθήνα 1987.

18. L. A. Steen - J. A. Seebach, jr, Counterexamples in topology, Springer-Verlag 1978.

19. R.L. Whilder, Topology of Manifolds AMS 1949.

20. G. Whyburn Analytic Topology, Amer. Math. Soc. Colloq. Publications 28 (1942)

21. G. Wyburn-E. Duda, Dynamic Topology, Springer-Verlag 1979.

22. S. Willard, General Topology, Addison- Wesley 1970.

23. Θ. Χρυσάκη. Γραμμική Αλγεβρα και Αναλυτική Γεωμετρία, Αθήνα 1990.