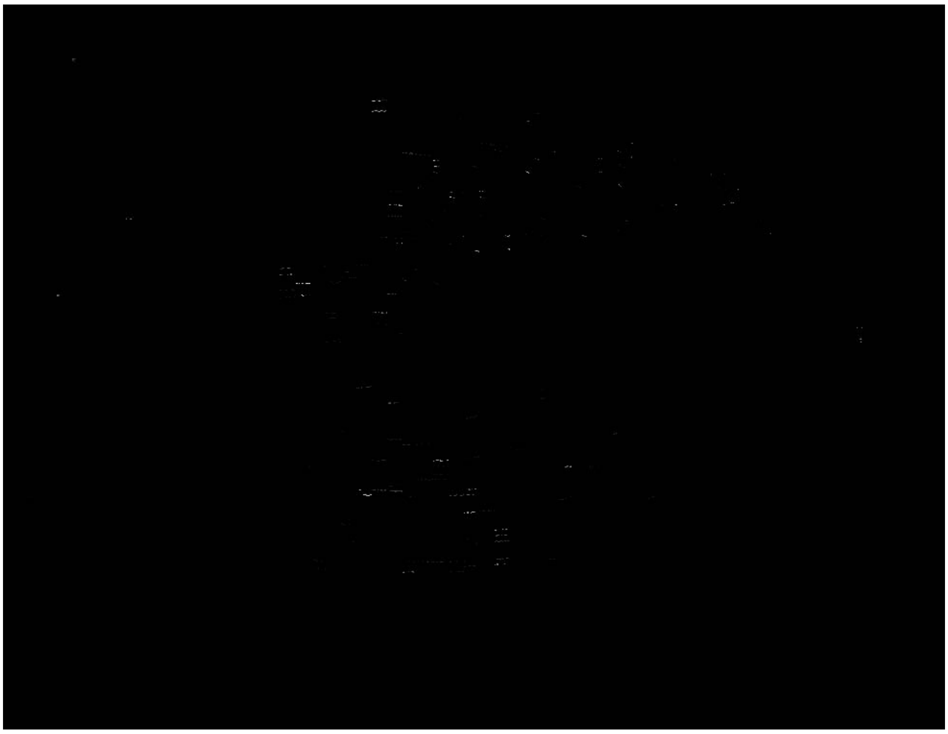
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΚΑΜΠΥΛΗ;

A. S. PARCHOMENKO

Μετάφραση: Κώστα Σκανδάλη
Έκδοση, επιμέλεια: Παναγιώτη Σπύρου



ΑΘΗΝΑ 2011

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΕΤΑΦΡΑΣΗΣ

Το κλασικό αυτό εγχειρίδιο του A. S. Parchomenko, μετέφρασε από τα Πολωνικά[1] ο Κώστας Σκανδάλης, επίκουρος καθηγητής στο Τμήμα Μαθηματικών στο Πανεπιστήμιο της Κρήτης. Αρχικά, είχαμε μια πρόχειρη μετάφραση από την γερμανική[2] έκδοση του βιβλίου που είχαν κάνει οι δρ Δημοσθένης Δριβαλιάρης και ο δρ. Κώστας Χανδρινός (τότε φοιτητές των Μαθηματικών). Οι αρχικές δακτυλογραφήσεις δεν ήσαν χρήσιμες κι έτσι ξανάκανα όλη την δουλειά από την αρχή γι' αυτή την πολυγραφημένη έκδοση εντός του Πανεπιστημίου. Με την ευκαιρία αυτή ευχαριστώ τον μαθηματικό Κώστα Γαβρά που με βοήθησε σε τεχνικά θέματα.

Το βιβλίο ανήκει σε εκείνη την εποχή της ανόδου της σοβιετικής επιστήμης και εκπαίδευσης, που οδήγησε στην αποστολή του πρώτου ανθρώπου στο διάστημα. Η ρωσική έκδοση είναι του 1954[3]. Αναφέρεται στην μετέπειτα ονομαζόμένη Θεωρία των Συνεχών μέρος της οποίας είναι η Θεωρία των Καμπύλων[4]. Το εγχειρίδιο στοχεύει στην εισαγωγή βασικών εννοιών της τοπολογίας με έναν τρόπο, που να αξιοποιεί την εποπτεία, χωρίς να παραιτείται από την αυστηρότητα. Με αυτή την έννοια αποτελεί υποδειγματική διδασκαλία μαθηματικού αντικειμένου, καθόσον ξεδιπλώνει μπροστά στα μάτια του αναγνώστη το φαινόμενο της μετάπλασης εποπτικών εννοιών, που αν και θεωρούνται προφανείς κρύβουν μεγάλο βάθος όταν τις ορίσουμε μαθηματικά.

Παρόμοια προσέγγιση στην Τοπολογία έχει το βιβλίο του πολωνού A. Lelek, Zbiory, P.Z.W.S, Warszawa, 1964, ελληνική μετάφραση Κ. Σκανδάλη, επιμέλεια Τ. Σπύρου, ελληνικός τίτλος, "Εισαγωγή στα Σύνολα και την Τοπολογία", εκδόσεις Τροχαλία 1995.

Παναγιώτης Σπύρου

Οκτώβρης 2006

---

[1] Co To jest linya, Warszawa 1961, PWN.

[2] Was ist eine Kurve? Veb Deutscher Verlag Der Wissenschaften, Berlin 1957

[3] A.C. Пархомико, Что такое лциця, Москва, 1954.

[4] Βλέπε K. MENGER, Kurventheorie, Teubner, Leibzig u. Berlin, 1932,
G. Whynburn, Analytic Topology, Amer. Math. Soc. Colloq. Publications 28 (1942),
G. Whynburn ,What is a curve? Studies in Mathematics 5, p 23 Math. Ass. of Am. 1968.
S. M. Nadler JR., Continuum Theory, Marcel Dekker 1992
J. J. Charatonik, "History of Continuum Theory", in: C. E. Aull and R. Lowen (eds.), Handbook of the History of General Topology, vol. 2, p. 703-786. Kluwer Academic Publishers 1998.
Δ. Λάππα, & Π. Σπύρου, Από την ιστορία της καμπύλης, Μαθηματική Επιθεώρηση 53 (200), σελ 11–22.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Υπάρχουν ελάχιστα πανεπιστημιακά εγχειρίδια στην Σοβιετική Ένωση[5], καθώς και στην σχολική βιβλιογραφία που ασχολούνται με βασικές έννοιες των Μαθηματικών. Η λογοτεχνία αυτού του είδους είναι απαραίτητη, για την επιμόρφωση των καθηγητών και των δασκάλων. Ο δάσκαλος πρέπει να έχει μια πλήρη και σαφή κατανόηση των μαθηματικών εννοιών ανεξάρτητα του κατά πόσο αυτές εμπεριέχονται μέσα στην ύλη που θα πρέπει να μεταδώσει.

Το παρόν βιβλίο είναι αφιερωμένο στην μελέτη μιας από τις βασικότερες έννοιες των Μαθηματικών, της έννοιας της καμπύλης. Η έννοια αυτή, φαίνεται εκ πρώτης όψεως απλή. Ωστόσο, για τον γενικό και πλήρη ορισμό της είναι απαραίτητες σημαντικές γνώσεις από την θεωρία των σημειοσυνόλων, η οποία έχει αναπτυχθεί ιδιαίτερα στα τελευταία 50 χρόνια. Μέσα από αυτή την θεωρία γίνεται σαφές ότι το πρόβλημα του ορισμού της έννοιας της καμπύλης, το οποίο είχε τεθεί ήδη από την αρχαιότητα, μπόρεσε να λυθεί πλήρως και γενικώς στα 20 πρώτα χρόνια του 20ου αιώνα. Η επιτυχία της λύσης αυτού του παλιού προβλήματος οφείλεται στον σοβιετικό μαθηματικό P. S. Uryshon[6].

Το μικρό αυτό εγχειρίδιο απευθύνεται κατά πρώτον στους φοιτητές των Πανεπιστημίων και των Παιδαγωγικών Ινστιτούτων, ως συμπλήρωμα στις γενικές παραδόσεις της Θεωρίας Συνόλων και Τοπολογίας. Απευθύνεται επίσης στους καθηγητές Γυμνασίων και Λυκείων, που θέλουν να διευρύνουν τις γνώσεις τους.

Το βιβλίο αποτελείται από 4 Κεφάλαια. Το Κεφάλαιο I περιέχει μια περίληψη της ανάπτυξης της έννοιας της καμπύλης και δείχνει την ανάγκη χρήσης της Θεωρίας των συνόλων και τοπολογίας για τον γενικό ορισμό αυτής της έννοιας. Το Κεφάλαιο II είναι αφιερωμένο στις βασικές έννοιες της Θεωρίας των Συνόλων. Δύσκολες είναι η Πρόταση 5 της § 5 καθώς και οι Προτάσεις 2 και 3 της § 6 .Αυτή την ύλη μπορεί κανείς να την παραλείψει σε πρώτη ανάγνωση και, εάν αυτό κρίνεται απαραίτητο για την κατανόηση των επομένων, χρειάζεται έπειτα να επανέλθει σ' αυτή. Στο Κεφάλαιο III ερευνάται ο ορισμός της καμπύλης κατά Cantor, που επιτρέπει να διαπραγματευτούμε πλήρως την περίπτωση των επιπέδων καμπύλων. Τελικά, το Κεφάλαιο IV περιέχει τον γενικό ορισμό της έννοιας της καμπύλης και τις βασικές ιδιότητες που προκύπτουν απ' αυτόν.

Από την γενική Θεωρία των Συνόλων και από την Τοπολογία δίνονται μόνο βασικές έννοιες και θεωρήματα. Για παραπέρα ενασχόληση με το θέμα προτείνουμε το βιβλίο του P.

---

[5] Ο συγγραφέας αναφέρεται στην κατάσταση που επικρατούσε στην δεκαετία του 40 (Σ. Ε)

S. Alexadroff, «Εισαγωγή στην γενική Θεωρία των Συνόλων και Συναρτήσεων», ιδιαίτερα στα Κεφάλαια I, VI και VII.

Για τους αναγνώστες που θέλουν ν' ασχοληθούν διεξοδικά με την έννοια της καμπύλης θα θέλαμε να συστήσουμε την εργασία του P. S. Uryshon, 'Περί πολλαπλοτήτων του Cantor' Über die Cantorschen Manngfaltigkeiten, Teil II, Cantorsche Kurven. Αυτή η εργασία περιέχεται στο 2ο τόμο των έργων του P. S. Uryshon, τα οποία εκδόθηκαν με τον τίτλο «Über Topologie und andere Gebiete der Mathematik», Μόσχα 1951.

---

[6] Τον ίδιο καιρό, ανεξάρτητα, το ίδιο αποτέλεσμα πέτυχε και ο Αυστριακός μαθηματικός K. Menger

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι

Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

§ 1. 1. Ιστορική περίληψη

Η καμπύλη είναι ένα από τα θεμελιώδη αντικείμενα γεωμετρικής μελέτης. Αυτό οφείλεται πρώτ' απ' όλα στο ότι η έννοια της καμπύλης προέκυψε μέσα από την πρακτική δραστηριότητα των ανθρώπων κατά την δημιουργία σχεδίων, τον προσδιορισμό των ορίων αγροτεμαχίων και τη μελέτη των τροχιών κινουμένων σωμάτων. Μετά την εμφάνισή της στην πράξη, η έννοια της καμπύλης βρίσκει πολλές εφαρμογές στη μαθηματική περιγραφή φυσικών φαινομένων και τεχνικών διαδικασιών.

Η έννοια της καμπύλης τραβούσε την προσοχή των μαθηματικών από τα αρχαία χρόνια μέχρι τις μέρες μας. Προσπαθούσαν να την ορίσουν αυστηρά μαθηματικά, να προσδιορίσουν δηλαδή τα κοινά χαρακτηριστικά των πραγμάτων που στην πράξη ονομάζουμε καμπύλες. Οι προσπάθειες αυτές ολοκληρώθηκαν μόλις στους νεότερους χρόνους με τις εργασίες του σοβιετικού μαθηματικού P. S. Urysohn (1898-1924), ο οποίος κατάφερε στα είκοσι πρώτα χρόνια του 20ου αιώνα, να δώσει το γενικότερο ορισμό της έννοιας της καμπύλης, που μας επιτρέπει να κατανοήσουμε πλήρως την ουσία της έννοιας αυτής. Οι εργασίες του Urysohn προέκυψαν όμως μόνο ως αποτέλεσμα μιας θεμελιώδους και κριτικής ανάλυσης του περιεκτικού επιστημονικού υλικού που είχε συγκεντρωθεί με τον καιρό. Για να κατανοήσουμε τη φυσικότητα και την αναγκαιότητα του σύγχρονου ορισμού της καμπύλης, θα πρέπει να παρακολουθήσουμε την εξέλιξη της έννοιας αυτής στην πορεία της γενικότερης ανάπτυξης των Μαθηματικών.

Ο Ευκλείδης στα "Στοιχεία" ορίζει την καμπύλη (γραμμή) ως "μήκος χωρίς πλάτος" (Ορισμός 2) ή ως "πέρας μιας επιφάνειας" (Ορισμός 6). Οι ορισμοί αυτοί, παρόλο που αντικατοπτρίζουν σε κάποιο βαθμό ιδιότητες μιας καμπύλης, δε μπορούν να οδηγήσουν σε μια μαθηματική μελέτη της έννοιας γιατί στηρίζονται σε άλλες έννοιες που με τη σειρά τους χρειάζονται ορισμό. Για να μελετηθεί μαθηματικά ένα αντικείμενο πρέπει κανείς να το εκφράσει ιδιαιτέρα, όπως λέμε, αξιωματικά, να επισημάνει δηλαδή μια σειρά από ιδιότητές του, από τις οποίες όλες οι άλλες να προκύπτουν με λογικά μέσα.

Με το τότε στάδιο ανάπτυξης της επιστήμης και τα αιτήματα που έθετε η πρακτική, ο Ευκλείδης δεν μπορούσε να δώσει τον ορισμό της καμπύλης σε γενική μορφή, αλλά περιορίστηκε σ' αυτή την αναφορά στις παραπάνω γενικές διαπιστώσεις και στα "Στοιχεία" συγκέντρωσε την προσοχή του στις δύο απλούστερες και συχνότερα χρησιμοποιούμενες καμπύλες: την ευθεία και τον κύκλο. Αυτό όμως δε σημαίνει ότι στην αρχαιότητα δεν ήταν γνωστές άλλες καμπύλες εκτός από την ευθεία και τον κύκλο. Ήδη, πολύ πριν τον Ευκλείδη ήταν γνωστές άλλες καμπύλες, όπως η τετραγωνίζουσα του Δεινοστράτους. Εκατό χρόνια αργότερα, ο Απολλώνιος δημιούργησε μια αναλυτική θεωρία κωνικών τομών: ελλείψεις, υπερβολές και παραβολές (από τον Απολλώνιο προέρχονται επίσης οι ονομασίες) καμπύλες που προκύπτουν από την τομή της επιφάνειας ενός κώνου με ένα επίπεδο. Επίσης, στη Μηχανική ήταν αναγκαία η μελέτη καμπυλών (σπείρα του Αρχιμήδη). Όλα αυτά όμως ήταν μεμονωμένα γεγονότα, που δεν οδήγησαν ούτε σε ένα γενικό ορισμό της καμπύλης ούτε σε μεθόδους για τη μελέτη τους. Το αποφασιστικό βήμα σ' αυτή την κατεύθυνση το έκανε ο Descartes (1596-1650). Η καταιγιστική ανάπτυξη του εμπορίου και της βιομηχανίας, την εποχή εκείνη, συνεισέφερε σε μια γρήγορη ανάπτυξη της τεχνικής, που απ' την πλευρά της οδήγησε σε μια ασύγκριτα έντονη ανάπτυξη των φυσικών επιστημών και κυρίως της Μηχανικής. Η ανάπτυξη όμως αυτή απαιτούσε μαθηματικά μέσα που χρειαζόταν η Μηχανική για την ακριβή διατύπωση των νόμων της. Ο Descartes έπαιξε σημαίνοντα ρόλο στην ανάπτυξη αυτών των μαθηματικών μέσων.

Οι ιδέες του Descartes είχαν καθολική επιρροή στην ανάπτυξη όλων των Μαθηματικών. Ιδιαίτερα, η μέθοδος των συντεταγμένων που εισήγαγε επέτρεψε για πρώτη φορά να οριστεί η έννοια της καμπύλης σε πολύ γενική, για την εποχή εκείνη, μορφή. Γι' αυτό τον λόγο θ' αναφερθούμε εκτενέστερα σ' αυτόν τον ορισμό. Αν επιλέξουμε ένα σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο, μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε σημείο του επιπέδου αυτού ένα ζεύγος πραγματικών αριθμών, τις συντεταγμένες του. Με τον τρόπο αυτό αντιστοιχούν σε διαφορετικά σημεία διαφορετικά ζεύγη αριθμών. Σε κάθε ζεύγος αριθμών αντιστοιχεί ένα καλά ορισμένο σημείο του επιπέδου, συντεταγμένες του οποίου είναι οι αριθμοί αυτοί. Έτσι, προκύπτει μια *αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία* ανάμεσα στο σύνολο των σημείων του επιπέδου από τη μία μεριά και στο σύνολο των ζευγών πραγματικών αριθμών από την άλλη. Αυτή η αντιστοιχία μας επιτρέπει για κάθε καμπύλη να φτιάχνουμε μια *εξίσωση*, να βρούμε δηλαδή μια σχέση ανάμεσα στις συντεταγμένες των σημείων της, μια σχέση που την ικανοποιούν τα σημεία της καμπύλης και μόνον αυτά. Έτσι για παράδειγμα, ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα r έχει την εξίσωση

$$x^2 + y^2 = r^2$$

η διχοτόμος του πρώτου και τρίτου τεταρτημορίου την εξίσωση x - y = 0, κλπ.

Η δυνατότητα εύρεσης για κάθε καμπύλη της αντίστοιχης εξίσωσης, μας δίνει μία πολύ γενική και με καλές προοπτικές μέθοδο για τη μελέτη των ήδη γνωστών καμπυλών. Ομως σχετικά με το γενικό ορισμό της έννοιας της καμπύλης δεν αποκομίζουμε τίποτα καινούργιο προτού εξετάσουμε το θέμα "αντίστροφα" κατά τον ακόλουθο τρόπο:

Έστω ότι μας έχει δοθεί μια εξίσωση με δύο αγνώστους. Αφού μεταφέρουμε όλους τους όρους της στην αριστερή πλευρά, έχει τη μορφή F(x,y) = 0, όπου με F(x,y) συμβολίζουμε την έκφραση (συνάρτηση) στην αριστερή πλευρά. Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι η εξίσωση αυτή έχει άπειρες το πλήθος πραγματικές λύσεις, δηλαδή ότι υπάρχει ένα άπειρο σύνολο ζευγών πραγματικών αριθμών (x,y) που ικανοποιούν αυτή την εξίσωση. Θεωρούμε μετά τους αριθμούς x και y ως συντεταγμένες ενός σημείου σε ένα επίπεδο σύστημα συντεταγμένων. Το σύνολο των σημείων του επιπέδου που οι συντεταγμένες τους ικανοποιούν αυτή εξίσωση ονομάζουμε καμπύλη και ορίζεται από την εξίσωση F(x,y) = 0. Η πρώτιστη σημασία αυτής της προσέγγισης συνίσταται στο ότι μπορούμε τώρα να δώσουμε ένα γενικό ορισμό της καμπύλης που περιλαμβάνει όλα τα μέχρι τώρα γνωστά επί μέρους παραδείγματα καμπυλών και που μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε τόσα παραδείγματα καμπυλών, όσες διαφορετικές εξισώσεις υπάρχουν. Ας διατυπώσουμε αυτόν τον ορισμό άλλη μια φορά:

Με την δια μέσου της εξίσωσης F(x,y) = 0 οριζόμενη καμπύλη εννοούμε το σύνολο των σημείων του επιπέδου που οι συντεταγμένες τους ικανοποιούν την εξίσωση αυτή.

Η ανακάλυψη του Descartes είχε αποφασιστική σημασία για όλα τα Μαθηματικά. Απ' τη μια μεριά καθιερώνει την μελέτη γεωμετρικών αντικειμένων με τις μεθόδους της άλγεβρας και της ανάλυσης κι απ' την άλλη την χρήση της ορολογίας και των μεθόδων της γεωμετρίας στην άλγεβρα και την ανάλυση, πράγμα που απλοποιεί και διασαφηνίζει εξαιρετικά την μελέτη αυτών των κλάδων. Σ' αυτή την αμοιβαία επίδραση δύο αντίθετων τάσεων στην ανάπτυξη των Μαθηματικών, της γεωμετρικής και της αναλυτικής, φαίνεται και ο διαλεκτικός χαρακτήρας αυτής της επιστήμης. Ο καρτεσιανός ορισμός της καμπύλης ήταν πολύ γενικός για την εποχή εκείνη. Περιλαμβάνει όλες τις λεγόμενες αλγεβρικές καμπύλες: *έτσι ονομάζονται οι καμπύλες που οι εξισώσεις τους είναι αλγεβρικές, έχουν δηλαδή τη μορφή F(x,y) = 0, όπου F(x,y) είναι πολυώνυμο δύο μεταβλητών x και y.*

Ο βαθμός του πολυωνύμου F(x,y) ονομάζεται *τάξη* της αλγεβρικής καμπύλης. Μια αλγεβρική καμπύλη πρώτης τάξης είναι μια ευθεία, αφού κάθε ευθεία του επιπέδου μπορεί να περιγραφεί σε καρτεσιανές συντεταγμένες από μία εξίσωση πρώτου βαθμού της μορφής

$$Ax + By + C = 0$$

και κάθε τέτοια εξίσωση περιγράφει μία ευθεία. Αλγεβρικές καμπύλες δεύτερης τάξης είναι ελλείψεις, υπερβολές, παραβολές (καθώς και καμπύλες που εκφυλίζονται σε δύο ευθείες), γιατί κάθε μια απ' αυτές τις καμπύλες μπορεί να δοθεί από μια εξίσωση δευτέρου βαθμού και κάθε εξίσωση δευτέρου βαθμού, αν έχει άπειρες το πλήθος λύσεις, περιγράφει μία απ' αυτές τις καμπύλες[7].

Τα αποτελέσματα αυτά αποτελούν το περιεχόμενο της Αναλυτικής Γεωμετρίας, και ήταν ουσιαστικά ήδη γνωστά στον Descartes. Η μελέτη των καμπυλών ανώτερης τάξης αποτελεί το αντικείμενο της Αλγεβρικής Γεωμετρίας. Ήδη την εποχή του Descartes, ήταν γνωστές καμπύλες που είτε δεν μπορούν να εκφραστούν μέσω μιας εξίσωσης της μορφής F(x,y) = 0 με αρκετά απλό F(x,y), δηλαδή που να μπορεί να εκφραστεί ως συνδυασμός πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών συναρτήσεων, είτε υπάρχει μεν μια τέτοια αναπαράσταση, που όμως δεν διευκολύνει τίποτα στη μελέτη της καμπύλης. Τέτοιες είναι κυρίως καμπύλες που προκύπτουν ως τροχιές κινουμένων σημείων. Τέτοια είναι η σπείρα του Αρχιμήδη, δηλαδή η καμπύλη που περιγράφεται από ένα σημείο που κινείται ομαλά πάνω στην ακτίνα ενός κύκλου που με τη σειρά του περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω από ένα σταθερό σημείο. Αν συμβολίσουμε με r την απόσταση του κινητού σημείου από την αρχή των συντεταγμένων και με φ τη γωνία ανάμεσα στην περιστρεφόμενη ημιευθεία και το θετικό ημιάξονα των x του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, παίρνουμε για τη σπείρα του Αρχιμήδη την ακόλουθη απλή εξάρτηση του r από το φ:

$$r = a\varphi,$$

όπου a είναι ένας σταθερός αριθμός. Αν x και y είναι συντεταγμένες ενός οποιουδήποτε σημείου της σπείρας του Αρχιμήδη, τότε

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ , \quad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$

Αν αντικαταστήσουμε αυτές τις τιμές για τα r και φ στην εξίσωση r = aφ παίρνουμε την εξίσωση της σπείρας του Αρχιμήδη σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

[7] Περιορίζουμε εδώ τη μελέτη μας στις πραγματικές καμπύλες και εξαιρούμε την περίπτωση να μην έχει η εξίσωση πραγματικές ρίζες.

$$\tan\left(\frac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2}\right) - \frac{y}{x} = 0$$

Αυτή η εξίσωση όμως δεν είναι ιδιαίτερα κατάλληλη για τη μελέτη της σπείρας του Αρχιμήδη, αφού σε κάθε τιμή του x αντιστοιχεί ένα άπειρο σύνολο τιμών του y και αντίστροφα.

Στην μελέτη καμπυλών, που είναι τροχιές κινητών σημείων, είναι φυσιολογικό να θεωρούμε τις συντεταγμένες του σημείου συναρτήσει του χρόνου. Αυτό οδηγεί στη λεγόμενη παραμετρική αναπαράσταση μιας καμπύλης. Εδώ, οι συντεταγμένες των σημείων της εκφράζονται ως συναρτήσεις κάποιας τρίτης μεταβλητής t (συνήθως του χρόνου), της λεγόμενης *παραμέτρου*:

$$x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t)$$

Αν για παράδειγμα, ένα σημείο m κινείται ομαλά με ταχύτητα v πάνω σε μία ευθεία που περνάει απ' την αρχή των αξόνων και σχηματίζει γωνία α με τον άξονα των x, οι συντεταγμένες του κινητού σημείου μπορούν να εκφραστούν μέσω του χρόνου ως εξής:

$$x = vt\cos a,\ \ \ y = vt\sin a$$

Οι εξισώσεις αυτές παρέχουν μια παραμετρική παράσταση της ευθείας. Αν ένα σημείο Μ κινείται ομαλά πάνω σ' ένα κύκλο με ακτίνα r γύρω από την αρχή των συντεταγμένων Ο, οι συντεταγμένες του κινητού σημείου μπορούν να περιγραφούν συναρτήσει του χρόνου ως εξής:

$$x = r\cos\omega t,\ \ y = r\sin\omega t.$$

όπου ω η γωνιακή ταχύτητα του περιστρεφόμενου ακτινικού διανύσματος (r = OM). Αυτή είναι μια παραμετρική αναπαράσταση του κύκλου. Μια παραμετρική αναπαράσταση της σπείρας του Αρχιμήδη δίνεται από

$$x = vt\cos\omega t,\ \ \ y = vt\sin\omega t.$$

όπου v η ταχύτητα της κίνησης του σημείου πάνω στην ακτίνα του περιστρεφόμενου κύκλου και ω η γωνιακή ταχύτητα της κυκλικής κίνησης.

Η αναπαράσταση μιας καμπύλης σε παραμετρική μορφή ικανοποιούσε όλες τις απαιτήσεις που ετίθοντο σ' αυτή την έννοια: Όλες οι γνωστές καμπύλες, τόσο οι αλγεβρικές όσο και οι υπερβατικές, μπορούσαν να γραφούν σ' αυτή τη μορφή. Αυτός ο τρόπος αναπαράστασης ανταποκρινόταν άριστα στην ιδέα μιας καμπύλης ως τροχιάς ενός κινητού σημείου. Ο ορισμός μιας καμπύλης ως τροχιάς ενός κινητού σημείου και η παραμετρική αναπαράσταση ήδη γνωστών καμπυλών αποτέλεσαν το θεμέλιο για μια νέα γενίκευση της έννοιας της καμπύλης: Με τον όρο καμπύλη αντιλαμβανόταν τώρα κανείς το σύνολο των σημείων του επιπέδου που οι συντεταγμένες τους x και y είναι συναρτήσεις κάποιας τρίτης μεταβλητής t, η οποία συνήθως ερμηνευόταν ως χρόνος, αλλά μπορούσε να έχει και άλλη σημασία: γωνία, μήκος τόξου, κοκ.

Οι συναρτήσεις φ και ψ υπόκειντο φυσικά σε κάποιους περιορισμούς, που στη συνέχεια συρρικνώνονταν τόσο, όσο η ίδια η έννοια της καμπύλης γινόταν γενικότερη. Έτσι φτάσαμε, ξεκινώντας από ειδικά παραδείγματα, στο δεύτερο μισό του 19ου αιώνα στον ακόλουθο γενικό ορισμό της καμπύλης, όπως διατυπώθηκε από το Γάλλο μαθηματικό C. Jordan:

Με τον όρο καμπύλη εννοούμε το σύνολο των σημείων του επιπέδου που οι συντεταγμένες τους είναι συνεχείς συναρτήσεις

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

μιας παραμέτρου που κινείται στο διάστημα $0 \leq t \leq 1$[8].

Δεν άργησε όμως να φανεί ότι ο ορισμός του Jordan ήταν πολύ γενικός. Στα 1890, ο Ιταλός μαθηματικός Peano έδειξε ότι μπορεί κανείς να δώσει *συναρτήσεις* $x = \varphi(t)$ και $y = \psi(t)$ ορισμένες για $0 \leq t \leq 1$ και συνεχείς στο διάστημα αυτό, για τις οποίες το σύνολο των σημείων που οι συντεταγμένες τους ικανοποιούν τις εξισώσεις $x = \varphi(t)$ και $y = \psi(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ καλύπτει ένα ολόκληρο τετράγωνο (εσωτερικά και συνοριακά σημεία), δηλαδή για κάθε σημείο $M(x, y)$ του τετραγώνου μπορεί να δοθεί μια τιμή της παραμέτρου t $(0 \leq t \leq 1)$ τέτοια, ώστε:

$$x = \varphi(t) \text{ και } y = \psi(t)$$

Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι ο ορισμός του Jordan στην πλήρη του γενικότητα είναι ακατάλληλος: Το σύνολο των σημείων που θα έπρεπε σύμφωνα με τον ορισμό αυτό να ονομαστεί *καμπύλη* καλύπτει ένα ολόκληρο κομμάτι του επιπέδου. Αυτό όμως δεν συμπίπτει με την ιδέα που έχουμε για μια καμπύλη (που σχηματίστηκε από την παρατήρηση μιας σειράς συγκεκριμένων καμπυλών), σύμφωνα με την οποία μια καμπύλη δε γεμίζει ποτέ ένα κομμάτι του επιπέδου.

---

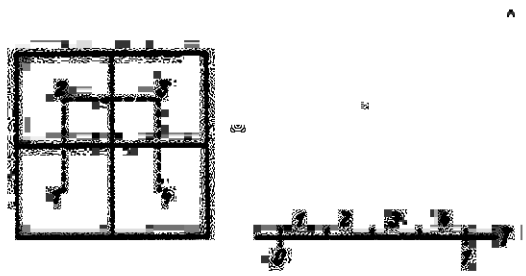
[8] Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση f(t) ορισμένη στο [0,1] ονομάζεται συνεχής στο σημείο t_0 αν έχει την ακόλουθη ιδιότητα: αν επιλέξει κανείς τις τιμές t της ανεξάρτητης μεταβλητής επαρκώς κοντά στην τιμή t_0, μπορεί κανείς να πετύχει οι τιμές της συνάρτησης στα σημεία t και t_0 να απέχουν μεταξύ τους οσοδήποτε μικρή απόσταση. Ακριβέστερα, μπορεί κανείς να διατυπώσει την ιδιότητα αυτή ως εξής: Για κάθε δεδομένο αυθαίρετα μικρό θετικό αριθμό ε υπάρχει ένας θετικός αριθμός δ τέτοιος ώστε οι τιμές της συνάρτησης f(t) και $f(t_0)$ να

§ 1. 2. Καμπύλες του Peano

Για να καταλάβουμε πως κατασκευάζεται μια καμπύλη του Peano θα πρέπει να δείξουμε ότι *ένα (ευθύγραμμο) τμήμα Τ μπορεί να απεικονιστεί συνεχώς επί ενός τετραγώνου Q*. Θα εξηγήσουμε τώρα τι σημαίνει αυτό.

Έστω ότι μας έχουν δοθεί ένα τυχαίο τμήμα Τ και ένα τυχαίο τετράγωνο Q. Ο σκοπός μας είναι τώρα το να απεικονίσουμε κάθε σημείο του (ευθύγραμμου) τμήματος σ' ένα σημείο του τετραγώνου και μάλιστα με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε σημείο του τετραγώνου να αντιστοιχεί σε ένα σημείο τουλάχιστον του τμήματος. Η απεικόνιση που μας ενδιαφέρει πρέπει επιπλέον να είναι συνεχής δηλαδή, πρέπει να ικανοποιεί η συνθήκη: σημεία του τετραγώνου που αντιστοιχούν σε κοντινά σημεία του τμήματος να είναι τα ίδια κοντινά μεταξύ τους. Μια τέτοια απεικόνιση κατασκευάζεται με τον ακόλουθο τρόπο:

Διαμερίζουμε το τμήμα Τ σε τέσσερα ίσα μέρη που συμβολίζουμε από αριστερά προς τα δεξιά με T_1^1, T_2^1, T_3^1, T_4^1. Χωρίζουμε αντίστοιχα το τετράγωνο σε τέσσερα ίσα υποτετράγωνα $Q_1^1, Q_2^1, Q_3^1, Q_4^1$, (Σχήμα 1).



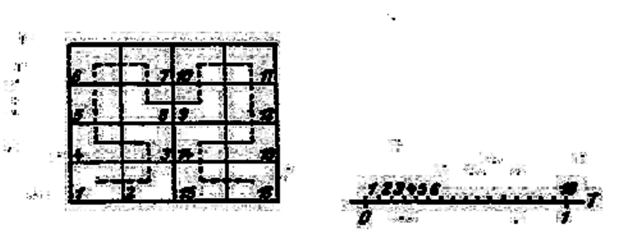
Σχήμα 1

Τα τμήματα T_1^1, T_2^1, T_3^1, T_4^1 και τα αντίστοιχα τετράγωνα Q_1^1, Q_2^1, Q_3^1, Q_4^1 τα ονομάζουμε, τμήματα και τετράγωνα πρώτης τάξης. Τώρα χωρίζουμε κάθε τμήμα σε τέσσερα ίσα μέρη και συμβολίζουμε τα τμήματα που προέρχονται από το T_1^1 με $T_1^2, T_2^2, T_3^2, T_4^2$, αυτά που προέρχονται από τη διαίρεση του T_2^1 με $T_5^2, T_6^2, T_7^2, T_8^2$, αυτά στα οποία διαιρείται το T_3^1 με $T_9^2, T_{10}^2, T_{11}^2, T_{12}^2$ και τέλος αυτά που προέρχονται από το T_4^1 με $T_{13}^2, T_{14}^2, T_{15}^2, T_{16}^2$. Αυτά τα 16 τμήματα T_1^2 μέχρι T_{16}^2 που παίρνουμε από αυτή τη δεύτερη ανάλυση

απέχουν λιγότερο από ε όταν τα t και t_0 απέχουν λιγότερο από δ. Μια συνάρτηση καλείται συνεχής σε ένα διάστημα αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του.

τα ονομάζουμε τμήματα δεύτερης τάξης. Στη συνέχεια διαιρούμε κάθε ένα από τα τέσσερα τετράγωνα Q_1^1, Q_2^1, Q_3^1, Q_4^1 σε τέσσερα ίσα υποτετράγωνα. Έτσι παίρνουμε 16 τετράγωνα δεύτερης τάξης. Τα τετράγωνα στα οποία αναλύεται το Q_1^1 συμβολίζουμε με Q_1^2, Q_2^2, Q_3^2, Q_4^2, αυτά που προκύπτουν από το Q_2^1 με Q_5^2, Q_6^2, Q_7^2, Q_8^2, αυτά που προέρχονται από το Q_3^1 με Q_9^2, Q_{10}^2, Q_{11}^2, Q_{12}^2, και τέλος αυτά που προκύπτουν από το Q_4^1 με Q_{13}^2, Q_{14}^2, Q_{15}^2, Q_{16}^2. Οι συμβολισμοί πρέπει να είναι επιλεγμένοι έτσι ώστε τα τετράγωνα των οποίων οι κάτω δείκτες διαφέρουν κατά ένα να έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο. Επειδή όμως, τα τέσσερα τετράγωνα που προκύπτουν κατά την διαμέριση πρώτου βαθμού ενός τετραγώνου πάντα έχουν ένα κοινό σημείο - το μέσο αυτού του τετραγώνου – αρκεί κανείς κατά την επιλογή των συμβολισμών να προσέξει μόνο να έχουν κοινό σημείο κάθε δύο από τα τετράγωνα Q_4^2 και Q_5^2, Q_8^2 και Q_9^2, Q_{12}^2 και Q_{13}^2 δηλαδή το τελευταίο και το πρώτο τετράγωνο δεύτερης τάξης που προκύπτουν από την διαμέριση γειτονικών τετραγώνων πρώτης τάξης (Σχήμα 2).

Η διακεκομμένη γραμμή δείχνει τη σειρά των τετραγώνων, όταν τα αντίστοιχα τμήματα διατρέχονται από αριστερά προς τα δεξιά. Αν χωρίσουμε τώρα κάθε ένα από τα τμήματα δεύτερης τάξης σε τέσσερα ίσα τμήματα, παίρνουμε 64 τμήματα τρίτης τάξης που στη συνέχεια συμβολίζουμε (από αριστερά προς δεξιά) με T_1^3, T_2^3, T_3^3, ...T_{64}^3. Με τον ίδιο τρόπο χωρίζουμε κάθε τετράγωνο δεύτερης τάξης σε τέσσερα ίσα τετράγωνα και παίρνουμε 64 τετράγωνα τρίτης τάξης που συμβολίζουμε με Q_1^3, Q_2^3, Q_3^3,...,Q_{64}^3 όπου τα Q_1^3, Q_2^3, Q_3^3,...,Q_4^3 έχουν προκύψει από την ανάλυση του Q_1^2 τα τετράγωνα Q_5^3, Q_6^3, Q_7^3, Q_8^3 από την ανάλυση του Q_2^2 κ.ο.κ.

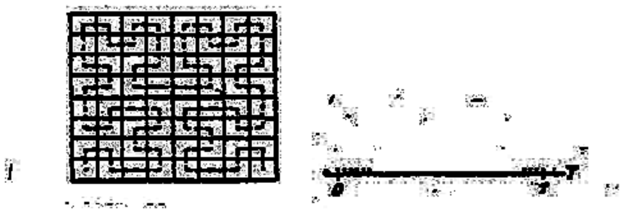


Σχήμα 2

Στον συμβολισμό πρέπει να προσέξουμε κάθε δύο γειτονικά τετράγωνα τρίτης τάξης (των οποίων οι κάτω δείκτες διαφέρουν κατά ένα) να έχουν ένα κοινό σημείο. Όμως, και τα τέσσερα τετράγωνα τρίτης τάξης που προκύπτουν από την ανάλυση ενός τετραγώνου δεύτερης τάξης έχουν πάντα ένα κοινό σημείο (το μέσον αυτού του τετραγώνου). Επομένως, αρκεί κανείς κατά την επιλογή του συμβολισμού να προσέξει ώστε κάθε τετράγωνο τρίτης τάξης που εμφανίζεται τελευταίο στην διαμέριση ενός τετραγώνου δεύτερης τάξης να έχει κοινό σημείο με το πρώτο τετράγωνο τρίτης τάξης που προκύπτει από την διαμέριση ενός γειτονικού τετραγώνου δεύτερης τάξης (Σχήμα 3). Η διακεκομμένη γραμμή μας δίνει τη σειρά των τετραγώνων, όταν τα αντίστοιχα τμήματα διατρέχονται από αριστερά προς τα δεξιά.

Αυτή τη διαδικασία ανάλυσης των τμημάτων και των τετραγώνων μπορούμε να την φανταστούμε να συνεχίζεται απεριόριστα. Τόσο το μήκος των τμημάτων όσο και το μήκος των πλευρών των τετραγώνων συγκλίνουν στο μηδέν καθώς αυξάνει η τάξη, διότι κατά την n-ιοστή διαμέριση το μήκος των τμημάτων είναι $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ και το μήκος των πλευρών των τετραγώνων είναι $\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Τώρα αντιστοιχούμε σε κάθε τμήμα T_k^n τάξης n το τετράγωνο Q_k^n της ίδιας τάξης, (αυτό έχει τον ίδιο δείκτη k όπως και το τμήμα). Μ' αυτό τον τρόπο παίρνουμε για κάθε τάξη n μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στα τμήματα και στα τετράγωνα της ανάλυσης αυτής της τάξης. Αυτή η αντιστοιχία ανάμεσα στα τμήματα και στα τετράγωνα μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε την απεικόνιση που μας ενδιαφέρει από το τμήμα T επί του τετραγώνου Q. Έστω t_0 ένα τυχαίο σημείο του τμήματος T. Το σημείο αυτό ανήκει σε τουλάχιστον ένα (και το πολύ σε δύο) τμήματα πρώτης τάξης, τουλάχιστον σε ένα τμήμα δεύτερης τάξης κ.ο.κ. Αν πάρουμε τα τετράγωνα που αντιστοιχούν στα τμήματα που περιέχουν το σημείο t_0, παίρνουμε μια άπειρη ακολουθία τετραγώνων. Επειδή κάθε τετράγωνο τάξης n ανήκει σε ένα συγκεκριμένο τετράγωνο προηγούμενης τάξης και επειδή η τάξη n αυξάνει το μήκος των πλευρών τείνει στο μηδέν, αυτά τα τετράγωνα έχουν μόνο ένα κοινό σημείο m_0, το οποίο αντιστοιχούμε στο t_0. Έτσι έχουμε δείξει ότι σε κάθε σημείο του τμήματος αντιστοιχεί ένα καλά ορισμένο σημείο του τετραγώνου[9] Q.

[9] Μπορεί όμως ένα σημείο του τετραγώνου να αντιστοιχεί σε πολλά σημεία του τμήματος. Η απεικόνιση μας, επομένως, δεν είναι αμφιμονοσήμαντη. Τέτοια σημεία του τετραγώνου που αντιστοιχούν σε πολλά σημεία του τμήματος είναι για παράδειγμα οι εσωτερικές γωνίες των τετραγώνων των διαχωρισμών όλων των τάξεων. Σημεία που είναι εσωτερικά τετραγώνων κάθε τάξης αντιστοιχούν σε ένα μοναδικό σημείο του τμήματος.



Σχήμα 3

Τώρα πρέπει να δείξουμε ότι μ' αυτή την αντιστοιχία κάθε σημείο του τετραγώνου αντιστοιχεί σε τουλάχιστον ένα σημείο του τμήματος. Έστω m_0 ένα οποιοδήποτε σημείο του Q. Αυτό θα ανήκει τουλάχιστον σε ένα τετράγωνο Q_i^1 πρώτης τάξης, τουλάχιστον σε ένα τετράγωνο Q_k^2 δεύτερης τάξης, το οποίο θα περιέχεται στο Q_i^1, τουλάχιστον σε ένα τετράγωνο Q_l^3 τρίτης τάξης, το οποίο με τη σειρά του θα περιέχεται στο Q_k^2 κ.ο.κ.

Θεωρούμε τα τμήματα που αντιστοιχούν σ' αυτά τα τετράγωνα. Έστω ότι αυτά είναι τα T_i^1, T_k^2, T_l^3 κ.ο.κ. Καθένα απ' αυτά τα τμήματα περιέχει στα προηγούμενα όπου το μήκος των τμημάτων τείνει στο μηδέν με την αύξηση της τάξης. Συνεπώς, όλα αυτά τα τμήματα έχουν μόνο ένα κοινό σημείο t_0. Στο σημείο αυτό του τμήματος T αντιστοιχεί ακριβώς το σημείο m_0 του τετραγώνου Q. Πρέπει ακόμα να δείξουμε τη συνέχεια της απεικόνισης που κατασκευάσαμε. Αν t_0 είναι κάποιο σημείο του τμήματος, τότε για οποιοδήποτε n κάθε σημείο t αρκετά κοντινό στο t_0 θα βρίσκεται, στο ίδιο τμήμα τάξης n ή σε ένα γειτονικό τμήμα της τάξης αυτής. Τότε όμως τα σημεία m_0 και m του Q στα οποία αντιστοιχούνται τα t_0 και t, θα ανήκουν στο ίδιο τετράγωνο ή σε γειτονικά τετράγωνα. Αν, επομένως, επιλέξει κανείς τα σημεία t αρκετά κοντά στο t_0, τότε τα σημεία m, στα οποία αυτά αντιστοιχούνται, θα βρίσκονται επαρκώς κοντά στο m_0, απ' όπου προκύπτει η συνέχεια της απεικόνισης. Η απεικόνιση αυτή ενός τμήματος επί ενός τετραγώνου μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε μια *καμπύλη του Peano*. Αν πάρουμε ως τμήμα T το διάστημα [0,1] της ευθείας των πραγματικών αριθμών και ως τετράγωνο Q το μοναδιαίο τετράγωνο του xy-επιπέδου (του οποίου τα σημεία έχουν συντεταγμένες που χαρακτηρίζονται από τις ανισότητες $0\le x \le 1$, $0\le y \le 1$, η απεικόνιση του τμήματος επί του τετραγώνου που κατασκευάστηκε παραπάνω παράγει δυο συνεχείς συναρτήσεις $x=\varphi(t)$, $y = \psi(t)$, τις οποίες παίρνουμε, αν σε κάθε τιμή t αντιστοιχίσουμε τις συντεταγμένες του σημείου m που αντιστοιχεί στο t, μέσω της δοθείσης συνεχούς απεικόνισης.

Η συνέχεια των συναρτήσεων φ και ψ προκύπτει από το γεγονός ότι για κοντινά σημεία t και t_0 του τμήματος T τα σημεία m_0 και m του Q στα οποία αυτά αντιστοιχούνται είναι και πάλι κοντινά. Απ' αυτό έπεται ότι και οι συντεταγμένες τους θα διαφέρουν κατά λίγο. Έτσι παίρνουμε το παράδειγμα μιας *καμπύλης* που δίνεται από παραμετρικές εξισώσεις και *διατρέχει* όλα τα σημεία του τετραγώνου.

Όπως παρατηρήσαμε ήδη στην υποσημείωση 3, η συνεχής απεικόνιση από ένα τμήμα επί ενός τετραγώνου που μελετήσαμε δεν είναι αμφιμονοσήμαντη. Υπάρχει ένα άπειρο σύνολο σημείων του τετραγώνου, καθένα από τα οποία αντιστοιχεί σε περισσότερα από ένα (δύο, τρία ή τέσσερα) σημεία του τμήματος. Θα μπορούσε κανείς να δείξει ότι αυτή η συμπεριφορά δεν εξαρτάται από τον τρόπο που κατασκευάστηκε η συνεχής απεικόνιση του τμήματος επί του τετραγώνου: Για κάθε τέτοια απεικόνιση υπάρχουν σημεία του τετραγώνου που αντιστοιχούν σε περισσότερα από ένα σημεία του τμήματος[10].

§ 1. 3. Απλά τόξα. Καμπύλες που αποτελούνται από απλά τόξα

Ένα σύνολο σημείων του επιπέδου που είναι μια αμφιμονοσήμαντη και συνεχής εικόνα ενός ευθυγράμμου τμήματος θα το ονομάζουμε *απλό τόξο*. Στο επίπεδο, ένα απλό τόξο μπορεί να παρασταθεί πάντα μέσω δύο παραμετρικών εξισώσεων.

$$x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t)\ \ (0 \le t \le 1),$$

αν θεωρήσουμε ως τμήμα το διάστημα [0,1] της ευθείας των πραγματικών αριθμών και ως συναρτήσεις φ, ψ τις συντεταγμένες του σημείου m που αντιστοιχεί στη δοθείσα τιμή t. Οι δύο συναρτήσεις φ και ψ αποδεικνύονται συνεχείς. Επιπλέον έχουν την ιδιότητα:

Για δύο διαφορετικές τιμές t_1 και t_2 να ισχύει τουλάχιστον μία από τις ανισότητες:

$$\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2),\quad \psi(t_1) \neq \psi(t_2)$$

(φυσικά μπορούν να ισχύουν και οι δύο ανισότητες).

Παράδειγμα απλού τόξου μπορεί να είναι ένα τόξο μιας οποιασδήποτε από τις ήδη γνωστές μας καμπύλες όπως κύκλος, έλλειψη, υπερβολή, παραβολή, ημιτονοειδής καμπύλη,

[10] Ακριβέστερα: Για κάθε συνεχή απεικόνιση ενός τμήματος επί ενός τετραγώνου υπάρχει άπειρο πλήθος σημείων του τετραγώνου που αντιστοιχούν σε τουλάχιστον τρία σημεία του τμήματος. Αυτό είναι το θεώρημα των Hahn-Mazurkiewicz, που απόδειξε το 1913 ο Hahn και ανεξάρτητα το 1915 ο Mazurkiewicz.

σπείρα του Αρχιμήδη κ.ο.κ. Στο χώρο, ένα απλό τόξο δίνεται από τρεις παραμετρικές εξισώσεις

$$x = \varphi(t),\ \ y = \psi(t),\ \ z = \chi(t)$$

όπου για διαφορετικές τιμές t_1 και t_2 της παραμέτρου να ισχύει τουλάχιστον μία από τις τρεις ανισότητες:

$$\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2),\quad \psi(t_1) \neq \psi(t_2),\ \ \chi(t_1) \neq \chi(t_2)$$

Ένα παράδειγμα απλού τόξου στο χώρο είναι η ελικοειδής καμπύλη

$$x = r\cos(t),\ y = r\sin(t),\ z = at,$$

όπου a και r είναι σταθερές και t παράμετρος που διατρέχει το διάστημα $[0,2\pi]$.

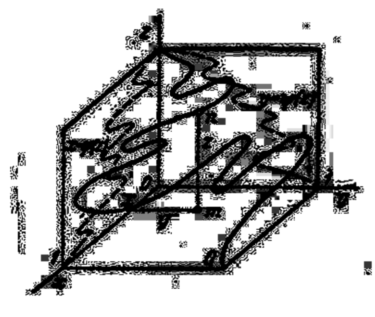
Θα δώσουμε άλλο ένα παράδειγμα απλού τόξου στο χώρο που μας δείχνει πόσο περίπλοκη μπορεί να είναι μια τέτοια *απλή* καμπύλη. Για το σκοπό αυτό επισυνάπτουμε στις εξισώσεις

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ \ (0 \leq t \leq 1)$$

που ορίζουν μια καμπύλη του Peano μια τρίτη εξίσωση

$$z = t$$

Το σύνολο των σημείων του χώρου που οι συντεταγμένες τους ικανοποιούν αυτές τις εξισώσεις είναι ένα απλό τόξο, γιατί και οι τρεις συντεταγμένες των σημείων του συνόλου αυτού εξαρτώνται, κατά συνεχή τρόπο, από το t και σε διαφορετικές τιμές του t αντιστοιχούν διαφορετικά σημεία του συνόλου (διαφέρουν στην τρίτη συντεταγμένη).



Σχήμα 4

Η καμπύλη αυτή (Σχήμα 4) έχει την ιδιότητα ότι η προβολή της πάνω στο xy-επίπεδο είναι ένα τετράγωνο. Έτσι πάνω από κάθε σημείο του τετραγώνου υπάρχει ένα σημείο της καμπύλης και μάλιστα πάνω από κάποια σημεία του τετραγώνου περισσότερα από ένα (δύο, τρία ή τέσσερα) σημεία. Σχηματικά ειπωμένο: αυτή η τετραγωνική περιοχή σκεπάζεται πλήρως από μια στέγη που αποτελείται από ένα νήμα. Πρόκειται όμως για μια καμπύλη και όχι για μια επιφάνεια!

Ένα σύνολο σημείων του επιπέδου ή του χώρου που είναι η αμφιμονοσήμαντη και συνεχής εικόνα της περιφέρειας ενός κύκλου ονομάζεται *απλή κλειστή καμπύλη*.

Στο επίπεδο μπορεί να δώσει κανείς μια απλή κλειστή καμπύλη μέσω δύο παραμετρικών εξισώσεων:

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ \ (0 \leq t \leq 1),$$

όπου

$$\varphi(0) = \varphi(1),\ \psi(0) = \psi\ (1)$$

και για κάθε δύο τιμές $t_1 \neq t_2$, μια τουλάχιστον εκ των οποίων είναι διαφορετική από 0 και 1, να ισχύει μια τουλάχιστον από τις ανισότητες:

$$\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2),\quad \psi(t_1) \neq \psi(t_2)$$

Μια απλή κλειστή καμπύλη , όπως και ένα απλό τόξο, μπορεί να διατρέχει το επίπεδο με ασυνήθιστο τρόπο. Μπορεί να μην έχει εφαπτόμενες σε κανένα σημείο. Το εμβαδόν της επιφάνειας που οριοθετείται από μια απλή κλειστή καμπύλη μπορεί να εξαρτάται από το αν συμπεριλαμβάνει κανείς σ΄ αυτήν το σύνορο της ή όχι[11].

Το απλό τόξο και η απλή κλειστή καμπύλη είναι όμως οι απλούστερες καμπύλες γιατί χάρη στις εσωτερικές τους ιδιότητες είναι φτιαγμένες όπως ένα ευθύγραμμο τμήμα και η περιφέρεια ενός κύκλου (αντίστοιχα). Οι διάφορες ιδιαιτερότητες της δομής τους, στις οποίες αναφερθήκαμε προηγουμένως εξαρτώνται από τη θέση τους στο επίπεδο ή στο χώρο. Θα μπορούσε κανείς να ονομάσει καμπύλη κάθε σύνολο σημείων που μπορεί να αναλυθεί σε πεπερασμένα το πλήθος από απλά τόξα (που ανά δύο δεν έχουν κοινά σημεία πέρα από τα άκρα τους). Όλες οι γνωστές μας καμπύλες εμπίπτουν σ’ αυτόν τον ορισμό. Έτσι μπορεί κανείς για παράδειγμα, να θεωρήσει την περιφέρεια κύκλου καμπύλη που αποτελείται από δύο απλά τόξα (ημικύκλια) και τον λημνίσκο του Bernoulli, καμπύλη που αποτελείται από τέσσερα απλά τόξα (Σχήμα 10).

Ήδη μ’ αυτόν τον τρόπο βρίσκει κανείς μια αρκετά ευρεία κλάση καμπυλών που περιέχει ειδικά όλες τις αλγεβρικές καμπύλες. Υπάρχουν όμως και καμπύλες που δεν μπορούν να παρασταθούν ως ενώσεις πεπερασμένων το πλήθος απλών τόξων, που εκτός από τα άκρα τους να μην έχουν ανά δύο κοινά σημεία. Τέτοια είναι για παράδειγμα η καμπύλη

[11] N.N. Luzin, Θεωρία Συναρτήσεων πραγματικής μεταβλητής, Μόσχα 1940, σελ. 240.

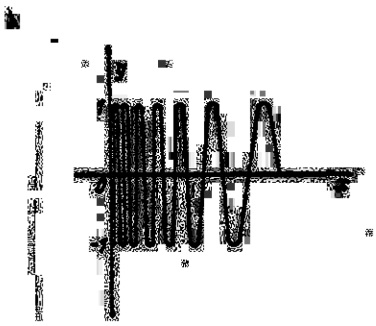
που κατασκευάζεται κατά τον ακόλουθο τρόπο (Σχήμα 5): Θεωρούμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2x}\right),\ 0 < x \leq 1$$

και προσθέτουμε το *οριακό τμήμα* πάνω στον άξονα των Y.

$$x = 0,\ -1 \leq y \leq 1$$

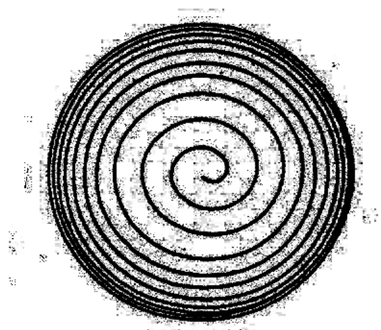
Αυτή η καμπύλη δεν μπορεί, όπως θα δείξουμε παρακάτω, να παρασταθεί ως ένωση πεπερασμένων το πλήθος απλών τόξων. Επιπλέον θα δούμε ότι αυτή η καμπύλη δεν μπορεί επίσης να παρασταθεί ως συνεχής εικόνα ενός ευθυγράμμου τμήματος (δηλ. δεν είναι καμπύλη με την έννοια του Jordan).



Σχήμα 5

Διαπιστώσαμε λοιπόν: η **κλάση των καμπυλών του Jordan** είναι απ' τη μια μεριά υπερβολικά διευρυμένη, αν πέρα από τη συνέχεια δεν βάλουμε στις συναρτήσεις φ(t) και ψ(t) κανέναν άλλο περιορισμό, απ' την άλλη όμως δεν περιλαμβάνει όλες τις καμπύλες που εμφανίζονται σε μια σειρά προβλημάτων της Μηχανικής και της Φυσικής. Πέρα από τις προαναφερθείσες καμπύλες ανήκουν στις τελευταίες για παράδειγμα οι καμπύλες που αποτελούνται από έναν κύκλο και μια σπείρα που τυλίγεται μέσα σ' αυτόν (Σχήμα 6). Τέτοιες καμπύλες εμφανίζονται στην τεχνολογία υψηλών συχνοτήτων κατά την μελέτη ταλαντώσεων, όπως επίσης κατά τη ρύθμιση αυτόματων συστημάτων.

Έτσι, όλοι οι ορισμοί της καμπύλης που εξετάσαμε μέχρι τώρα αποδείχτηκαν ανεπαρκείς γιατί κάθε φορά εμφανίζονταν καμπύλες που δεν ενέπιπταν στον εκάστοτε ορισμό.



Σχήμα 6

§ 1.4. Η σημασία της Θεωρίας των Συνόλων και της Τοπολογίας για τον ορισμό της καμπύλης

Στο τέλος του 19ου αιώνα, άρχισε να επικρατεί όλο και περισσότερο η συνολοθεωρητική άποψη σύμφωνα με την οποία κάθε μαθηματικό αντικείμενο θεωρούνταν ως σύνολο συγκεκριμένων στοιχείων. Η ίδια η έννοια *σύνολο* δεν ορίζεται, ανήκει στις στοιχειώδεις έννοιες. Η λέξη *σύνολο* είναι ισοδύναμη με τις λέξεις *οικογένεια* ή *κλάση*. Ειδικά ένα γεωμετρικό σχήμα θεωρείται ως σύνολο σημείων, που έχουν κάποιες ιδιότητες. Κατ' αυτόν τον τρόπο ο κύκλος είναι το σύνολο (γεωμετρικός τόπος) των σημείων του επιπέδου που έχουν μια δεδομένη απόσταση από ένα δεδομένο σημείο. Αν στις προτάσεις της γεωμετρίας αντικαταστήσουμε τη φράση *γεωμετρικός τόπος* με τη λέξη *σύνολο* εξοικειωνόμαστε όλο και περισσότερο μ' αυτήν την έννοια που είναι μια από τις θεμελιώδεις έννοιες των σύγχρονων Μαθηματικών.

Η σαφέστερη διατύπωση της συνολοθεωρητικής άποψης υπάρχει σε μια σειρά εργασιών του G.Cantor (1845-1918), που παρουσιάστηκαν στις δεκαετίες του 1870 και του 1880. Σ' αυτόν αποδίδονται όλες οι θεμελιώδεις έννοιες της συνολοθεωρίας. Η συνολοθεωρητική μελέτη μαθηματικών ζητημάτων υπήρξε μια σημαντική πρόοδος της επιστήμης. Επέτρεψε στον Cantor να προχωρήσει πέραν των άλλων στο πρόβλημα του ορισμού της καμπύλης. Με την μελέτη του καντοριανού ορισμού της καμπύλης πρόκειται να αρχίσουμε την αναλυτική μελέτη αυτής της έννοιας. Πριν όμως το κάνουμε αυτό, πρέπει να εισάγουμε μια σειρά από έννοιες από τη Θεωρία των Συνόλων, γιατί χωρίς αυτές δεν θα μπορούμε ούτε να διατυπώσουμε τον ορισμό της καμπύλης κατά Cantor. Αυτές τις έννοιες τις χρειαζόμαστε επίσης για τη μελέτη του γενικού ορισμού της καμπύλης, όπως τον έδωσε ο P.S.Urysohn. Η γνώση τους είναι εκ των ουκ άνευ για την μελέτη κάθε κλάδου των σύγχρονων Μαθηματικών, γιατί οι θεμελιώδεις έννοιες της Θεωρίας Συνόλων χρησιμοποιούνται τώρα παντού στα σύγχρονα Μαθηματικά.

Στη συνέχεια θα γίνει λόγος κυρίως γι αυτές τις ιδιότητες των συνόλων που διατηρούνται κατά τις λεγόμενες *τοπολογικές* ή *ομοιομορφικές* απεικονίσεις. Θα μπορούσε να πει κανείς ότι μια τοπολογική απεικόνιση είναι μια απεικόνιση ενός συνόλου επί ενός άλλου κατά την οποία, ποτέ δυο σημεία του ενός συνόλου δεν καταλήγουν σε ένα του άλλου και κοντινά σημεία του ενός απεικονίζονται σε επαρκώς κοντινά σημεία του άλλου. Εν συντομία, μια τοπολογική απεικόνιση είναι μια μετάβαση από ένα σύνολο σε ένα άλλο χωρίς συγκολλήσεις και κοψίματα.

Το ακριβές νόημα αυτών των λέξεων είναι ότι μια τοπολογική απεικόνιση είναι *αμφιμονοσήμαντη* και *συνεχής και ως προς τις δύο κατευθύνσεις*. Για μια τοπολογική απεικόνιση επρόκειτο όταν μιλάγαμε για την έννοια του απλού τόξου. Τώρα μπορούμε να πούμε ότι ένα απλό τόξο είναι η τοπολογική εικόνα ενός ευθύγραμμου τμήματος. Παρουσιάζουμε μερικά παραδείγματα διαφόρων ομοιομορφικών (δηλ. συσχετισμένων μέσω μιας τοπολογικής απεικόνισης) και μη ομοιομορφικών συνόλων. Κύκλος (κυκλικός δίσκος), τετράγωνο (με εσωτερικό του) και τρίγωνο (το εσωτερικό του) είναι μεταξύ τους ομοιομορφικά. Ομοιομορφικά είναι επίσης σύνολα όπως η επιφάνεια ενός κυλίνδρου και ένας κυκλικός δακτύλιος δηλ. το σύνολο που βρίσκεται μεταξύ δύο ομόκεντρων κύκλων (συμπεριλαμβανομένων και των περιφερειών αυτών των κύκλων). Ομοιομορφικές είναι όλες οι ευθείες και τα ανοικτά διαστήματα. Ομοιομορφικά μεταξύ τους είναι κύκλος, έλλειψη, σύνορο ενός τετραγώνου κλπ. Αντιθέτως, σύνολα όπως ευθύγραμμο τμήμα και κύκλος ή ευθύγραμμο τμήμα και τετράγωνο δεν είναι ομοιομορφικά μεταξύ τους. Μη ομοιομορφικά είναι επίσης ένα ευθύγραμμο τμήμα με τα άκρα του και μια ευθεία.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι διάφορες ιδιότητες συνόλων όπως η συνεκτικότητα, η συμπάγεια, η διάσταση (που την ορίζουμε στο Κεφάλαιο ΙΙ) διατηρούνται από τις ομοιομορφικές απεικονίσεις. Άλλες ιδιότητες, όμως όπως π.χ. η απόσταση δύο σημείων, δεν διατηρούνται από τους ομοιομορφισμούς. Όμοια, οι εικόνες σημείων που βρίσκονται πάνω σε ευθείες ή επίπεδα δεν βρίσκονται απαραίτητα πάνω σε ευθείες ή επίπεδα μέσω ενός ομοιομορφισμού. (Αυτό μπορεί να το ελέγξετε στα προηγούμενα παραδείγματα).

Ο μαθηματικός κλάδος που μελετά τις ιδιότητες των συνόλων που διατηρούνται από όλες τις ομοιομορφικές απεικονίσεις ονομάζεται Τοπολογία. Η επιστήμη αυτή αναπτύχθηκε ραγδαία κυρίως στο πρώτο μισό του ΧΧ αιώνα και οδήγησε στην διατύπωση μιας σειράς θεμελιωδών εννοιών των μαθηματικών και ειδικά της έννοιας της καμπύλης.

Ιδιαίτερη θέση στην ανάπτυξη της τοπολογίας έχει η Σοβιετική Ένωση με σημαντικούς αντιπροσώπους της επιστήμης αυτής όπως: P.S. Urysohn, P.S. Alexandroff, L.S.

Pontrjagin μεταξύ άλλων. [Ανάμεσα στους θεμελιωτές της τοπολογίας στη Γερμανία ας αναφέρουμε εκτός από τον G. Cantor τους A. Schoenflies, F. Hausdorff. Επίσης ο K. Menger (από την Βιέννη) συνέβαλλε σημαντικά στην ανάπτυξη της θεωρίας των καμπυλών και της διάστασης. Βλ. K. Menger, Dimensiontheorie (Θεωρία διάστασης), Λειψία 1928 και K.Menger, Kurventheorie (Θεωρία Καμπυλών), Λειψία 1932. (Προσθήκη της σύνταξης της Γερμανικής έκδοσης).]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ

ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ ΚΑΙ ΤΗΝ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ

§ 2. 1 Βασικές έννοιες της στοιχειώδους Θεωρίας Συνόλων

Πριν ξεκινήσουμε τη μελέτη των σημειοσυνόλων, πρέπει κατ' αρχάς να αναλογιστούμε μερικές βασικές έννοιες της στοιχειώδους Θεωρίας Συνόλων. Κάθε σύνολο αποτελείται από διακεκριμένα στοιχεία. Όταν το x είναι στοιχείο του συνόλου A τότε θα λέμε ότι το x *ανήκει* στο A και θα γράφουμε

$$x \in A.$$

Τα σύνολα A και B θα λέγονται *ίσα* όταν έχουν τα ίδια και τα αυτά στοιχεία, δηλαδή όταν κάθε στοιχείο του A ανήκει στο B και κάθε στοιχείο του B ανήκει στο A. Αν τα σύνολα A και B είναι ίσα γράφουμε

$$A = B.$$

Όταν όλα τα στοιχεία του A ανήκουν στο B τότε το A λέγεται *υποσύνολο* του B. Λέμε τότε ότι το A *περιέχεται* στο B και γράφουμε

$A \subseteq B$ ή επίσης : το B *περιέχει* το A. Με σύμβολα: $B \supseteq A$.

Αν $A \subseteq B$ και $B \subseteq A$, τότε $A = B$.

Ως *ένωση* δύο συνόλων A και B εννοεί κανείς το σύνολο S κάθε στοιχείο του οποίου ανήκει στο σύνολο A ή στο σύνολο B. Το σύνολο S ως ένωση των συνόλων A και B το συμβολίζουμε με

$$S = A \cup B$$

Η έννοια της ένωσης μπορεί να επεκταθεί σε περισσότερα πεπερασμένα ή άπειρα το πλήθος) σύνολα. Ως *τομή* δύο συνόλων A και B εννοεί κανείς το σύνολο P του οποίου κάθε στοιχείο να βρίσκεται και στο σύνολο A αλλά και στο σύνολο B. Λέμε επίσης ότι το σύνολο P είναι το *κοινό* μέρος των συνόλων A και B και γράφουμε

$$P = A \cap B$$

Η έννοια της τομής μπορεί επίσης να επεκταθεί σε (πεπερασμένα ή άπειρα) πολλά σύνολα. Ως *διαφορά* δύο συνόλων A και B ορίζει κανείς το σύνολο D που περιέχει τα στοιχεία εκείνα από το A που δεν ανήκουν στο B. Το γεγονός ότι το D προκύπτει από την αφαίρεση του B από το A σημειώνεται ως εξής:

$$D = A \setminus B$$

Εδώ δεν προϋποτίθεται, ότι ολόκληρο το B είναι υποσύνολο του A. Αν $B \subseteq A$ τότε το $D = A \setminus B$ λέγεται επίσης *συμπλήρωμα* του B στο (ή ως προς το) A. Τα σύνολα D και B λέγονται σ' αυτήν την περίπτωση *συμπληρωματικά το ένα του άλλου*.

Ενίοτε μας εξυπηρετεί, στις καθαρά τυπικές θεωρήσεις μας να αναφερόμαστε στο σύνολο που δεν έχει κανένα στοιχείο και που θα ονομάζουμε *κενό* σύνολο. Θα το συμβολίζουμε Ø. Το κενό σύνολο είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.

Παράδειγμα. Έστω A το σύνολο των σημείων του κλειστού διαστήματος $0 \le x \le 2$ και B το σύνολο των σημείων του κλειστού διαστήματος $1 \le x \le 3$. Τότε $A \cup B$ είναι το σύνολο των σημείων του διαστήματος $0 \le x \le 3$, $A \cap B$ το σύνολο των σημείων του κλειστού διαστήματος $1 \le x \le 2$ και $A \setminus B$ το σύνολο των σημείων του ημιανοικτού διαστήματος $0 \le x < 1$.

Η ένωση, η τομή και η διαφορά συνόλων έχουν μια σειρά ιδιοτήτων που μας είναι γνωστές απ' την πρόσθεση, τον πολλαπλασιασμό και την αφαίρεση αριθμών. Υπάρχουν όμως και κάποιες διαφορές. Εδώ, δεν θα συζητήσουμε περαιτέρω τις ιδιότητες των πράξεων των συνόλων, αφού σ' αυτό το βιβλίο ελάχιστα θα τις χρειαστούμε. Αυτά τα θέματα μπορείτε να τα βρείτε σε ειδικά βιβλία Θεωρίας Συνόλων[1].

Με δεδομένα δύο σύνολα A και B μπορούμε να ορίσουμε μεταξύ τους μια συνάρτηση, στην οποία καθορίζουμε εκ των προτέρων ποιο στοιχείο του B αντιστοιχεί σε δεδομένο στοιχείο του A. Αν το στοιχείο x του A συναρτάται με το στοιχείο y του B θα γράφουμε

$$y = f(x)$$

Με f συμβολίζουμε τον κανόνα με τον οποίο αντιστοιχούνται τα στοιχεία του A στα στοιχεία του B. Η έννοια της συνάρτησης μεταξύ δύο συνόλων αποτελεί γενίκευση της έννοιας της συνήθους συνάρτησης. Με μια συνάρτηση καθίστανται λοιπόν το σύνολο A, που περιέχει τις τιμές των ορισμάτων x, και το σύνολο B, που περιέχει τις τιμές y της συνάρτησης, που εδώ είναι σύνολα πραγματικών αριθμών.

Έτσι για παράδειγμα η συνάρτηση

$$y = \tan(x),$$

[1] Π.χ. Halmos, Naïve Set Theory, Kamke, Elements of Set Theory (ελληνική μετάφραση του τελευταίου από του Ε. Γκιόκα).

που ορίζεται στο διάστημα $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, καθορίζει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοίχιση μεταξύ αυτού του διαστήματος και του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

Αν σε κάθε στοιχείο του A αντιστοιχεί ένα καλώς ορισμένο στοιχείο του B, τότε λέμε ότι το σύνολο A *απεικονίζεται* ή *μετασχηματίζεται* στο σύνολο B. Εδώ δεν προϋποτίθεται ότι για κάθε στοιχείο του B υπάρχει κάποιο στοιχείο στο A το οποίο απεικονίζεται σ' αυτό. Ένα στοιχείο y στο B, για το οποίο υπάρχει στοιχείο στο A, ονομάζεται εικόνα του στοιχείου x. Το στοιχείο x αποτελεί πρότυπο του y. Αν το σύνολο A απεικονίζεται στο B, το N είναι ένα υποσύνολο του B και το M περιέχει όλα τα στοιχεία του A που οι εικόνες τους βρίσκονται μέσα στο N, τότε το M λέγεται *αντίστροφη εικόνα* του N.

Αν κάθε στοιχείο του A απεικονίζεται σ' ένα καλώς ορισμένο στοιχείο του B και κάθε στοιχείο του B απεικονίζει τουλάχιστον ένα στοιχείο του A, τότε λέμε ότι το A απεικονίζεται *επί* του B. Εδώ δεν προϋποτίθεται ότι διαφορετικά στοιχεία του A απεικονίζονται σε διαφορετικά στοιχεία του B.

Αν κάθε στοιχείο του A απεικονίζεται σε καλώς ορισμένο στοιχείο του B, κάθε στοιχείο του B απεικονίζει ένα στοιχείο του A και διαφορετικά στοιχεία του A απεικονίζονται σε διαφορετικά στοιχεία του B, τότε το σύνολο A είναι σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με το B. Σ' αυτή την περίπτωση κάθε στοιχείο του B απεικονίζει ένα καλώς ορισμένο στοιχείο του A και μπορούμε να μιλάμε για μια ένα – προς - ένα απεικόνιση του συνόλου B στο A. Αυτή η απεικόνιση του B στο A ονομάζεται *αντίστροφη* της απεικόνισης του A στο B. Αν το A αντιστοιχείται αμφιμονοσήμαντα στο B, τότε και το B αντιστοιχείται αμφιμονοσήμαντα στο A. Σ' αυτή την περίπτωση λέμε επίσης ότι μεταξύ των συνόλων A και B ορίζεται μια *αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση*.

Συνεπώς, μέσω μιας αμφιμονοσήμαντης απεικόνισης του συνόλου A στο B, κάθε στοιχείο του απεικονίζεται σε ένα δεδομένο στοιχείο του B: Κάθε στοιχείο του B απεικονίζει ένα στοιχείο του A. Διαφορετικά στοιχεία του A απεικονίζονται σε διαφορετικά στοιχεία του B και διαφορετικά στοιχεία του B απεικονίζουν διαφορετικά στοιχεία του A.

Παράδειγμα. Έστω abcd ένα τετράγωνο με διαδοχικές κορυφές a, b, c, d. Θεωρώντας με την ορθή προβολή των σημείων του στην πλευρά ab λαμβάνουμε μια απεικόνιση του τετραγώνου *στην ευθεία που ορίζεται από τα a και b*. Αυτή η προβολή είναι επίσης μια απεικόνιση του τετραγώνου *στο ευθύγραμμο τμήμα* ab. Εδώ το ευθύγραμμο τμήμα cd θα απεικονιστεί αμφιμονοσήμαντα στο τμήμα ab.

Υπάρχουν σύνολα πεπερασμένα και άπειρα. Αν τα στοιχεία του συνόλου Α μπορούν να τεθούν σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με τους φυσικούς αριθμούς από το 1 ως κάποιο γνωστό αριθμό n, τότε το σύνολο λέγεται *πεπερασμένο*. Λέμε σ' αυτή την περίπτωση ότι το Α έχει n στοιχεία. Αν μια τέτοια συνάρτηση δεν υπάρχει, τότε το σύνολο είναι *άπειρο*.

Αν το σύνολο Α μέσω μιας αμφιμονοσήμαντης συνάρτησης μπορεί να απεικονιστεί στο σύνολο όλων των φυσικών αριθμών 1, 2, ... n,..., το Α λέγεται *αριθμήσιμο*. Ο αριθμός n που έχει το στοιχείο x σ' αυτήν την αντιστοίχιση λέγεται *δείκτης* του x. Συχνά θα συμβολίζουμε με x_n. Σ' αυτή την περίπτωση το σύνολο Α μπορεί να απαριθμηθεί με τη βοήθεια των φυσικών αριθμών και τη συνάρτηση μεταξύ του Α και του συνόλου των φυσικών τη γράφουμε

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

Παράδειγμα. Το σύνολο όλων των ρητών αριθμών μεταξύ του μηδέν και του ένα καθώς και το σύνολο όλων των ρητών αριθμών[2] είναι αριθμήσιμα.

Αν το σύνολο Α μπορεί να τεθεί σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με το σύνολο των πραγματικών αριθμών λέμε ότι το σύνολο Α έχει τον πληθικό αριθμό του *συνεχούς*. Παραδείγματα συνόλων που έχουν τον πληθικό αρθμό του συνεχούς είναι το σύνολο όλων των άρρητων αριθμών, το σύνολο των σημείων της ευθείας, το σύνολο των σημείων του κλειστού διαστήματος [0,1], το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου, το σύνολο όλων των σημείων του χώρου και άλλα.

§ 2. 2 Κλειστά και ανοικτά σύνολα

Θεωρούμε στο επίπεδο ή στο χώρο ένα τυχαίο σύνολο R. Αυτό το σύνολο R μπορεί να ταυτίζεται με όλον τον χώρο ή μπορεί να είναι υποσύνολο του. Σε όλους τους ορισμούς που θα εισαγάγουμε παρακάτω θα μας ενδιαφέρουν μόνο τα σημεία του συνόλου R. Τα άλλα σημεία του χώρου, που δεν ανήκουν στο σύνολο R, δεν μας απασχολούν.
Η χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων ενός συνόλου R στην ευθεία, το επίπεδο ή το χώρο είναι για μας ότι μεταξύ δύο σημείων x και y του R μπορεί να οριστεί μια *απόσταση*. Η απόσταση μεταξύ δύο σημείων x και y συμβολίζεται με ρ(x,y). Από τις πολλές ιδιότητες της απόστασης μεταξύ δύο σημείων σημειώνουμε τις ακόλουθες:

1. Αν x και y είναι δυο διαφορετικά σημεία του συνόλου R, τότε η

[2] Το γεγονός αυτό αποδεικνύεται σε όλα τα βιβλία της θεωρίας συνόλων.

απόσταση τους είναι θετικός αριθμός. Αν συμπίπτουν τα δύο σημεία τότε η απόσταση τους είναι μηδέν.

2. Για κάθε δυο σημεία x και y του συνόλου R ισχύει:

$$\rho(x,y) = \rho(y,x)$$

3. Για κάθε τρία σημεία x, y, z του συνόλου R ισχύει η ανισότητα

$$\rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z)$$

Αυτή την ανισότητα την αποκαλούμε *τριγωνική* ιδιότητα. Βασίζεται στη γεωμετρική πρόταση, ότι σε κάθε τρίγωνο κάθε πλευρά είναι μικρότερη από το άθροισμα των δυο άλλων.

Παρατήρηση: Στις παρακάτω θεωρήσεις μας δεν είναι απαραίτητο να παίρνει κανείς ως σύνολο R το σύνολο των σημείων της ευθείας, ή του επιπέδου ή του χώρου. Αρκεί ένα οποιοδήποτε σύνολο σημείων με την ιδιότητα ότι για κάθε δυο απ’ αυτά υπάρχει ένας αριθμός ρ(x,y) που πληροί τις παραπάνω ιδιότητες 1, 2, 3. Ένα τέτοιο σύνολο το ονομάζουμε *μετρικό χώρο*, τα στοιχεία του σημεία και τον αριθμό ρ(x,y) απόσταση των σημείων x και y.

Για παράδειγμα ένας μετρικός χώρος, διαφορετικός από το σύνηθες σύνολο των σημείων του χώρου, μπορεί να είναι ο n-διάστατος χώρος. Τα σημεία του είναι οι n-άδες πραγματικών αριθμών και η απόσταση μεταξύ δύο σημείων

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \text{ και } y = (y_1, y_2, ..., y_n)$$

ορίζεται ως :

$$\rho(x,y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + ... + (y_n - x_n)^2}\ .$$

Με τον τρόπο που εισήχθη η απόσταση είναι φανερό ότι ικανοποιεί τις παραπάνω ιδιότητες 1, 2, 3. Δεν θα προχωρήσουμε στην απόδειξη αυτού του ισχυρισμού. Ο αναγνώστης αυτής της πραγματείας σε κάθε αφηρημένη εμφάνιση του συνόλου R, ας εννοεί ένα υποσύνολο κάποιου συνήθους ευκλειδείου χώρου χωρίς βλάβη της γενικότητας και της ισχύος των προτάσεων.

Θεμελιώδης για όλη τη θεωρία των σημειοσυνόλων είναι η έννοια των *σημείων συσσώρευσης* ενός συνόλου. Έστω M ένα σημειοσύνολο, υποσύνολο του συνόλου R. Ένα σημείο x του συνόλου R θα λέγεται *σημείο συσσώρευσης* του συνόλου M, αν σε κάθε περιοχή του x μπορεί να βρεθεί ένα σημείο y στο M διαφορετικό του x. Η έκφραση "σε κάθε περιοχή" νοείται ως εξής: Για κάθε θετικό αριθμό ε (οσοδήποτε μικρό), υπάρχει ένα σημείο y στο M,

$y \neq x$ ώστε η απόσταση του από το x να είναι πάντα μικρότερη του ε. Το σημείο x μπορεί να ανήκει στο σύνολο M, αλλά αυτό δεν είναι απαραίτητο.

Έστω R η ευθεία των πραγματικών αριθμών. Τότε είναι προφανές ότι για το σύνολο που αποτελείται από τα σημεία

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

το μηδέν είναι σημείο συσσώρευσης. Για το σύνολο A των ρητών αριθμών της ευθείας, κάθε σημείο της ευθείας είναι σημείο συσσώρευσης (και τα ρητά και τα άρρητα σημεία) μόνο που τα ρητά σημεία ανήκουν στο σύνολο ενώ τα άρρητα όχι.

Ένα σύνολο F λέγεται *κλειστό* αν κάθε σημείο, που είναι σημείο συσσώρευσης του F, ανήκει στο F.

Έστω και πάλι R η ευθεία των πραγματικών αριθμών, τότε κάθε κλειστό διάστημα είναι κλειστό σύνολο, όπως και όλη η ευθεία, ενώ το σύνολο των ρητών σημείων σε σχέση με την ευθεία δεν είναι κλειστό γιατί οι άρρητοι που αποτελούν σημεία συσσώρευσης των ρητών, δεν ανήκουν σ' αυτό το σύνολο[3].

Αν F είναι ένα κλειστό σύνολο και το σημείο x δεν ανήκει σ' αυτό, τότε το x εξ ορισμού δεν είναι σημείο συσσώρευσης του F. Υπάρχει λοιπόν ένας θετικός αριθμός ε, τέτοιος ώστε δεν υπάρχει σημείο του F που να απέχει από το x απόσταση μικρότερη του ε. Παρουσιάζουμε δυο ιδιότητες των κλειστών συνόλων.

Θεώρημα 1. *Η ένωση δύο κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο*.

Απόδειξη: Έστω F_1 και F_2 κλειστά σύνολα και έστω x ένα σημείο που δεν ανήκει στην ένωση τους, δηλαδή το x δεν ανήκει ούτε στο F_1 ούτε στο F_2. Αφού τα F_1 και F_2 είναι κλειστά σύνολα υπάρχει ένας αριθμός $\varepsilon_1>0$, έτσι ώστε κανένα σημείο του F_1 να μην απέχει από το x λιγότερο από ε_1 και αντίστοιχα ένας αριθμός $\varepsilon_2>0$ ώστε κανένα σημείο του F_2 να μην απέχει από το x λιγότερο από ε_2. Αν υποθέσουμε ότι $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, τότε δεν υπάρχει κανένα σημείο σε απόσταση ε_1 από το x, ούτε του F_1 ούτε του F_2, άρα ούτε και στην ένωση $F_1 \cup F_2$. Συνεπώς, ένα στοιχείο που δεν ανήκει σ' αυτήν την ένωση δεν μπορεί να είναι σημείο συσσώρευσής της.

[3] Κάθε μονοσύνολο καθώς και το κενό σύνολο είναι κλειστό.

Όμοια μπορεί κανείς να δείξει ότι η ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.

Θεώρημα 2. *Η τομή οποιουδήποτε πλήθους κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.*

Ας θεωρήσουμε μια οικογένεια κλειστών συνόλων $\{F a\}$. Συμβολίζουμε με F την τομή τους. Θεωρούμε ένα σημείο x που δεν ανήκει στην τομή τους, δηλ. υπάρχει τουλάχιστον ένα σύνολο στην οικογένεια $\{F a\}$ στο οποίο δεν ανήκει το x, έστω το F_{a_0}. Επειδή αυτό είναι κλειστό, υπάρχει αριθμός ε > 0, τέτοιος ώστε δεν υπάρχει σημείο του F_{a_0} που να απέχει από το x λιγότερο από το ε και συνεπώς δεν υπάρχει σημείο του F που να απέχει από το x λιγότερο από το ε. Άρα το F είναι κλειστό σύνολο.

Ένα σύνολο $G \subseteq R$ ονομάζεται *ανοικτό* αν το συμπλήρωμα του $F = R - G$ είναι κλειστό. Από τα Θεωρήματα 1 και 2 προκύπτουν οι ακόλουθες ιδιότητες των ανοικτών συνόλων.

Θεώρημα 3. *Η τομή δύο (ή πεπερασμένου πλήθους) ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.*

Θεώρημα 4. *Η ένωση οποιουδήποτε πλήθους ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.*

Αποδεικνύουμε ενδεικτικά το Θεώρημα 3. Έστω G_1 και G_2 ανοικτά σύνολα και G η τομή τους. Εξ ορισμού των ανοικτών συνόλων τα σύνολα

$$F_1 = R\text{-}\ G_1 \text{ και } F_2 = R\text{-}\ G_2$$

είναι κλειστά. Από την Θεώρημα 1 το ίδιο ισχύει και για την ένωσή τους

$$F_1 \cup F_2$$

Ας δούμε τώρα το σύνολο $G = G_1 \cap G_2$. Αν το x ανήκει στο G, βρίσκεται και στο G_1 και στο G_2 και συνεπώς ούτε στο F_1, συμπλήρωμα του G_1, ούτε στο F_2, συμπλήρωμα του G_2. Δηλαδή το x ανήκει στο σύνολο

$$R - (F_1 \cup F_2) = R - F$$

και επειδή το F είναι κλειστό ως ένωση κλειστών το G ως συμπλήρωμα του θα είναι ανοικτό. Ανάλογη είναι και η απόδειξη του Θεωρήματος 4.

Εισάγουμε τώρα μια βοηθητική έννοια που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω. Έστω x ένα τυχαίο σημείο του συνόλου R και ε οποιοσδήποτε θετικός αριθμός. Το σύνολο όλων των σημείων y στο R που έχουν απόσταση από το x μικρότερη από το ε θα ονομάζεται *ε-περιοχή* του x. Μια ε-περιοχή ονομάζεται συχνά και *σφαιρική περιοχή* και συμβολίζεται με S(x,ε).

Αν R είναι ο τρισδιάστατος χώρος, τότε η ε-περιοχή είναι τα εσωτερικά σημεία της σφαίρας με κέντρο το σημείο x και ακτίνα ε. Αν R είναι το επίπεδο, ε-περιοχή είναι τα εσωτερικά σημεία του δίσκου με κέντρο το x και ακτίνα ε. Αποδεικνύουμε ότι μια *ε-περιοχή είναι ανοικτό σύνολο*[4]. Γι' αυτό είναι αρκετό να δείξουμε ότι το σύνολο F = R - S(x,ε) είναι κλειστό. Έστω y ένα τυχαίο σημείο της σφαιρικής περιοχής S(x,ε). Το σημείο y λοιπόν δεν ανήκει στο F. Για να ελέγξουμε την κλειστότητα του F πρέπει να μπορούμε να βρούμε έναν αριθμό δ ώστε κάθε σημείο z που απέχει από το y λιγότερο από το δ να μην ανήκει στο σύνολο F. Αρκεί να πάρουμε

$$\delta = \varepsilon - \rho(x,y)$$

Τότε έχουμε

$$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) < \rho(x,y) + \delta = \rho(x,y) + [\ \varepsilon - \rho(x,y)\ ] = \varepsilon$$

Άρα όταν το y ανήκει στην S(x,ε), σ' αυτήν ανήκει και κάθε σημείο z που είναι αρκετά κοντά στο y. Συνεπώς το F = R - S(x,ε) είναι κλειστό και άρα η S(x,ε) είναι ανοιχτή.

Βλέπουμε ότι η σφαιρική περιοχή ενός σημείου είναι ανοικτή. Εξάλλου *κάθε ανοικτό σύνολο μπορεί να παρασταθεί ως ένωση σφαιρικών περιοχών των σημείων του,* πεπερασμένων ή απείρων ως προς το πλήθος. Πράγματι, έστω x ένα σημείο του ανοικτού συνόλου G . Επειδή το F = R - G είναι κλειστό, υπάρχει θετικός αριθμός ε ούτως ώστε κάθε σημείο y που βρίσκεται πιο κοντά από ε στο x δεν ανήκει στο F και συνεπώς ανήκει στο G. Όλα αυτά τα σημεία αποτελούν μια ε-περιοχή του x. Έτσι, για κάθε σημείο x του G ορίζεται μια σφαιρική περιοχή (η ακτίνα της οποίας φυσικά εξαρτάται από το δεδομένο x) και η οποία περιέχεται στο G. Το G είναι δυνατό να παρασταθεί ως ένωση αυτών των περιοχών. Όταν το R είναι η ευθεία, τότε οι ε-περιοχές είναι τα ανοικτά διαστήματα μήκους 2ε, με κέντρο το σημείο x.

Αφού κάθε ανοικτό σύνολο μπορεί να εκφραστεί ως ένωση ε-περιοχών των σημείων του, μπορεί κανείς να παραστήσει κάθε ανοικτό σύνολο σε μια ευθεία ως ένωση πεπερασμένων ή άπειρων ανοικτών διαστημάτων. Μπορούμε να διατυπώσουμε αυτόν τον ισχυρισμό ως εξής: *Σε μια ευθεία κάθε ανοικτό σύνολο παρίσταται ως ένωση πεπερασμένου ή αριθμήσιμου πλήθους ανοικτών διαστημάτων, τα οποία ανά δύο δεν έχουν κοινά σημεία. Τα άκρα αυτών των διαστημάτων περιέχονται στο κλειστό σύνολο που αποτελεί το συμπλήρωμα του δεδομένου ανοικτού συνόλου.*

[4] Στα ακόλουθα θα χαρακτηρίζουμε περιοχή του x κάθε ανοικτό σύνολο που θα περιέχει το x και όχι αναγκαστικά μια σφαιρική περιοχή.

Πράγματι, έστω x ένα τυχαίο σημείο του ανοικτού συνόλου G. Σύμφωνα με τα παραπάνω υπάρχει ένα ανοικτό διάστημα που περιέχει το x και περιέχεται στο G. Συμβολίζουμε με G_x την ένωση όλων των ανοικτών διαστημάτων που περιέχουν το x και περιέχονται στο G. Το G_x είναι το μεγαλύτερο διάστημα μ' αυτές τις ιδιότητες. Αν y είναι ένα σημείο του G_y που δεν ανήκει στο G_x, τότε το αντίστοιχό του ανοικτό διάστημα G_y δεν έχει κανένα κοινό σημείο με το G_x. Αν είχαν ένα κοινό σημείο z η ένωση τους $Gx \cup G_y$ θα ήταν ανοικτό διάστημα που περιέχει το x, θα περιέχεται στο G και θα είναι μεγαλύτερο από το G_x, πράγμα άτοπο.

Βλέπουμε λοιπόν ότι το G αποσυντίθεται σε μια ένωση ανοικτών διαστημάτων που ανά δύο δεν έχουν κοινό σημείο. Το πλήθος αυτών των διαστημάτων είναι το πολύ αριθμήσιμο*. Για να το δούμε αυτό αρκεί να επιλέξουμε σε κάθε διάστημα έναν ρητό αριθμό που περιέχεται σ' αυτό. Επειδή, το σύνολο των ρητών είναι αριθμήσιμο, το σύνολο εκείνων των σημείων που έχουμε επιλέξει, θα είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο.

Από τα κλειστά σύνολα που βρίσκονται πάνω σε ευθεία θα εξετάσουμε παρακάτω ένα σημαντικό παράδειγμα, το λεγόμενο *τέλειο σύνολο του Cantor* που παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Αυτό το σύνολο κατασκευάζεται με την ακόλουθη μέθοδο: Από το κλειστό διάστημα [0,1] αφαιρούμε το ανοικτό διάστημα $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$ (το μεσαίο ανοικτό τρίτο). Από καθένα από τα εναπομείναντα δύο κλειστά διαστήματα πρώτης τάξεως τα $[0, \frac{1}{3}]$ και $[\frac{2}{3},1]$, αφαιρούμε και πάλι το μεσαίο τρίτο, δηλαδή τα ανοικτά διαστήματα $(\frac{1}{9},\frac{2}{9})$ και $(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$. Με την ίδια μέθοδο προχωρούμε στα τέσσερα κλειστά διαστήματα δεύτερης τάξης $[0, \frac{1}{9}]$, $[\frac{2}{9},\frac{3}{9}]$, $[\frac{6}{9},\frac{7}{9}]$, $[\frac{8}{9}, 1]$ και αφαιρούμε τα μεσαία τρίτα δηλαδή $(\frac{1}{27},\frac{2}{27})$, $(\frac{7}{27}, \frac{8}{27})$, $(\frac{19}{27}, \frac{20}{27})$, $(\frac{25}{27}, \frac{26}{27})$ και ούτω καθ' εξής για κάθε φυσικό n. Το σύνολο P που προκύπτει μετά την αποπεράτωση αυτών των πράξεων για όλους τους φυσικούς αριθμούς ονομάζεται *τέλειο σύνολο του Cantor* ή *(ασυνεχές) σύνολο του Cantor*. Θα δώσουμε μερικές από τις ιδιότητες του.

1. *Το σύνολο P είναι κλειστό*, ως τομή της ακολουθίας κλειστών συνόλων που εμφανίζονται στην κατασκευή του. Το πρώτο σύνολο της ακολουθίας αυτής αποτελείται από

δύο κλειστά διαστήματα πρώτης τάξης. Το δεύτερο από τέσσερα κλειστά διαστήματα δεύτερης τάξης το τρίτο από οκτώ διαστήματα τρίτης τάξης.

2. *Το σύνολο P δεν περιέχει κανένα διάστημα ως υποσύνολο*. Για να το δει κανείς αυτό αρκεί να δείξει ότι για κάθε τυχαίο σημείο x του P και ε θετικό μπορεί να βρεθεί ένα σημείο y που βρίσκεται στα διαστήματα που αφαιρέθηκαν και απέχει από το x λιγότερο από ε. Θεωρούμε το n τόσο μεγάλο ώστε

$$\frac{1}{3^n} < \varepsilon.$$

Αφού το μήκος κάθε διαστήματος n-τάξης είναι $(\frac{1}{3})^n$, μπορεί να βρεθεί ένα y που ανήκει στα απορριφθέντα διαστήματα και βρίσκεται πιο κοντά στο x από ε.

3. *Το υποσύνολο του ασυνεχούς του Cantor, που αποτελείται από τα σημεία του που βρίσκονται σε ένα από τα κλειστά διαστήματα n-οστής τάξης, είναι ομοιομορφικό με όλο το σύνολο του Cantor*. Αυτό το βλέπει κανείς αν απεικονίσει ομοιόμορφα το [0,1] με συντελεστή ομοιότητας $(\frac{1}{3})^n$ στο κλειστό διάστημα n-οστής τάξης.

4. *Το σύνολο του Cantor έχει τον πληθικό αριθμό του συνεχούς*. Δεν θα προχωρήσουμε εδώ σε απόδειξη αυτού του ισχυρισμού. Ο αναγνώστης παραπέμπεται στο βιβλίο του P.S. Alexandroff, που αναφέρθηκε στη σελίδα 3.

Από την 3 και την 4 προκύπτουν άμεσα:

5. *Αν x_0 ένα τυχαίο σημείο του συνόλου του Cantor, τότε σε κάθε περιοχή του βρίσκεται υπεραριθμήσιμο πλήθος σημείων του συνόλου του Cantor.*

Χρησιμοποιώντας την έννοια των σφαιρικών περιοχών, παίρνουμε μια πρόταση για τα κλειστά και τα ανοικτά σύνολα που θα χρειαστούμε παρακάτω (§ 6, Πρόταση 1).

Θεώρημα 5. *Έστω A και B δύο κλειστά σύνολα χωρίς κοινά σημεία*[**]. *Τότε υπάρχουν δύο ανοικτά σύνολα G και H που περιέχουν τα A και B αντίστοιχα και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.*

Απόδειξη. Έστω x τυχαίο σημείο του A. Αφού το B είναι κλειστό και το x δεν ανήκει στο B, το x δεν είναι σημείο συσσώρευσης του B. Άρα μπορεί κανείς να βρει έναν θετικό αριθμό ε_x που για κάθε σημείο y στο B να ισχύει

---

[*] Δηλαδή είτε είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο.
[**] Δυο σύνολα που δεν έχουν κοινά στοιχεία λέγονται *ξένα*.

$$\rho(x,y) > \varepsilon_x$$

Θεωρούμε τη σφαιρική περιοχή

$$S(x, \frac{\varepsilon_x}{2})$$

με κέντρο x και ακτίνα $\frac{\varepsilon_x}{2}$. Κατασκευάζουμε μια τέτοια περιοχή για κάθε σημείο x του A και συμβολίζουμε την ένωση όλων αυτών των περιοχών με G.

Όμοια μπορούμε να θεωρήσουμε για κάθε σημείο y στο B ένα θετικό αριθμό ε_y που για κάθε x στο A θα ισχύει

$$\rho(x,y) > \varepsilon_y$$

Κατασκευάζουμε για κάθε σημείο y στο B τις ανοικτές περιοχές

$$S(y, \frac{\varepsilon_y}{2})$$

με κέντρο το y και ακτίνα $\frac{\varepsilon_y}{2}$ και συμβολίζουμε με H την ένωση αυτών των περιοχών.

Τα σύνολα G και H είναι ανοικτά γιατί το καθένα είναι ένωση ανοικτών συνόλων. Αποδεικνύουμε ότι G και το H δεν έχουν κοινό σημείο με εις άτοπο απαγωγή. Έστω z ένα κοινό σημείο τους. Αφού το z ανήκει στο G υπάρχει ένα σημείο x στο A έτσι ώστε

$$z \in S(x, \frac{\varepsilon_x}{2}),$$

δηλ.

$$\rho(x,z) < \frac{\varepsilon_x}{2}$$

και όμοια, επειδή $z \in H$ θα έχουμε για ένα σημείο y του B τελικά, ότι

$$z \in S(y, \frac{\varepsilon_y}{2}),$$

δηλ.

$$\rho(y,z) < \frac{\varepsilon_y}{2} ,$$

Είναι όμως

$$\varepsilon_x < \rho(x,y)$$

και

$$\varepsilon_y < \rho(x,y).$$

Έπεται ότι

$$\rho(x,y) \le \rho(x,z) + \rho(y,z) < \frac{\varepsilon_x}{2} + \frac{\varepsilon_y}{2} < \frac{1}{2}\rho(x,y) + \frac{1}{2}\rho(x,y) = \rho(x,y)$$

κι έτσι

$$\rho(x,z) < \rho(x,y).$$

Αυτό το άτοπο αποδεικνύει ότι δεν υπάρχει σημείο z που να ανήκει συγχρόνως και στο G και στο H.

Ως *κλειστότητα* (ή *κλειστή θήκη*) ενός συνόλου M (που περιέχεται σ' ένα σύνολο R) ορίζουμε το σύνολο $\overline{M}$ που περιέχει το σύνολο M και τα σημεία συσσώρευσης του συνόλου M. Εξ ορισμού της κλειστότητας είναι προφανές ότι $M \subseteq \overline{M}$.

Παραδείγματα. Έστω R η ευθεία των πραγματικών αριθμών, M το σύνολο των σημείων

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

τότε η κλειστότητα $\overline{M}$ προκύπτει αν επισυνάψουμε στο σύνολο M το σημείο 0. Αν M είναι το σύνολο των ρητών σημείων της πραγματικής ευθείας, τότε $\overline{M}$ = R. Αν M είναι το ανοικτό (a,b), τότε η κλειστότητα $\overline{M}$ είναι το [a,b] που προκύπτει επισυνάπτοντας τα άκρα του διαστήματος.

Θεώρημα 6. *Η κλειστότητα $\overline{M}$ ενός συνόλου M είναι κλειστό σύνολο.*

Απόδειξη. Έστω x ένα σημείο συσσώρευσης της κλειστότητας $\overline{M}$. Πρέπει να δείξουμε ότι $x \in \overline{M}$. Αφού το x είναι σημείο συσσώρευσης του $\overline{M}$, τότε κάθε περιοχή S(x,ε) περιέχει ένα σημείο $y \neq x$ που ανήκει στο $\overline{M}$. Το y τότε ανήκει στο M ή είναι σημείο συσσώρευσης του. Στην δεύτερη περίπτωση κάθε δ-περιοχή του y περιέχει ένα $z \neq x$ που βρίσκεται στο M. Θεωρούμε ένα δ τόσο μικρό ώστε $S(y,\delta) \subset S(x,\varepsilon)$[***], άρα το z ανήκει στην σφαίρα S(x,ε). Έτσι, κάθε περιοχή του x περιέχει πάντα στοιχείο του M διάφορο από το x. Αυτό σημαίνει ότι αν το x είναι σημείο συσσώρευσης του $\overline{M}$, τότε είναι σημείο συσσώρευσης και του M, δηλ. $x \in \overline{M}$. Άρα το $\overline{M}$ είναι κλειστό.

[***] Αυτό είναι δυνατό επειδή $y \in S(x,\delta)$ και το S(x,ε) είναι ανοικτό σύνολο.

Η επόμενη έννοια θα αποδειχτεί για μας ιδιαίτερα σημαντική όταν εξετάσουμε τον ορισμό της καμπύλης του Uryshon.

Με τον όρο *σύνορο* ενός ανοικτού συνόλου G εννοούμε το σύνολο των σημείων που είναι σημεία συσσώρευσης του G αλλά δεν ανήκουν στο G. Το σύνορο του G θα το συμβολίζουμε με Fr(G).

Αν G είναι το διάστημα (a, b) της πραγματικής ευθείας R, τότε Fr(G) αποτελείται από το ζεύγος των σημείων a και b, τα άκρα του διαστήματος.

Το σύνορο κάθε ανοικτού διαστήματος είναι κλειστό σύνολο.

Πράγματι, από τον ορισμό του συνόρου ενός ανοικτού συνόλου G αυτό αποτελείται απ' όλα εκείνα τα σημεία της κλειστότητας $\overline{G}$ του G εκτός από εκείνα τα σημεία που ανήκουν στο G. Επομένως,

$$\mathrm{Fr}(G) = \overline{G} - G$$

Είναι όμως $\overline{G} - G = \overline{G} \cap (R - G)$. Αφού τα σύνολα $\overline{G}$ και (R - G) είναι κλειστά το ίδιο θα συμβαίνει και με την τομή τους

$$\overline{G} \cap (R - G) = \overline{G} - G = \mathrm{Fr}(G)$$

κι έτσι αποδείχτηκε ο ισχυρισμός μας.

Ένα σύνολο M λέγεται *φραγμένο* αν η απόσταση κάθε δύο σημείων του είναι μικρότερη από έναν σταθερό αριθμό.

Όταν η απόσταση κάθε δύο σημείων ενός συνόλου είναι μικρότερη από έναν σταθερό αριθμό ε λέμε ότι το M έχει *διάμετρο μικρότερη από ε* και γράφουμε

$$\delta(M) < \varepsilon$$

Για παράδειγμα φραγμένου συνόλου M μπορούμε να πάρουμε ένα κλειστό διάστημα της πραγματικής ευθείας. Φραγμένα σύνολα είναι το τετράγωνο, ο κύκλος και το τρίγωνο στο επίπεδο, και ο κύβος, η σφαίρα και το τετράεδρο στο χώρο. Η ευθεία, το επίπεδο και ο χώρος δεν είναι φραγμένα σύνολα.

Παρατήρηση. Ως διάμετρο ενός φραγμένου συνόλου εννοούμε το άνω πέρας[5] των αποστάσεων των σημείων του ανά δύο. Η διάμετρος ενός κλειστού διαστήματος είναι το μήκος του, η διάμετρος του τετραγώνου είναι το μήκος της διαγωνίου του και η διάμετρος του κύκλου είναι η διάμετρος του, όπως αυτή ορίζεται στη στοιχειώδη γεωμετρία.

[5] Ένα σύνολο πραγματικών αριθμών M λέγεται άνω φραγμένο όταν όλοι οι αριθμοί που βρίσκονται σ΄ αυτό το σύνολο είναι μικρότεροι από έναν σταθερό αριθμό L. O μικρότερος αριθμός, από τον οποίο κάθε αριθμός του συνόλου M είναι μικρότερος ή ίσος, λέγεται *άνω πέρας* ή *supremum* του συνόλου.

Στα ακόλουθα θα πρέπει κανείς να θεωρεί σαφές τι σημαίνει ότι ένα σύνολο M έχει διάμετρο μικρότερη από έναν δεδομένο αριθμό. Τον ίδιο τον ορισμό της διαμέτρου δεν θα τον χρησιμοποιήσουμε ιδιαίτερα.

§. 2. 3 Συνεκτικότητα

Θα παρουσιάσουμε τώρα μια βασική έννοια της Θεωρίας των Σημειοσυνόλων που θα παίξει σοβαρό ρόλο στον ορισμό μιας καμπύλης. Την έννοια της συνεκτικότητας ενός συνόλου.

Ένα σύνολο M θα λέγεται *συνεκτικό* αν για κάθε διαμέριση του σε δύο μη κενά και ξένα μεταξύ τους υποσύνολα A και B, έτσι ώστε $M = A \cup B$, ένα τουλάχιστον από τα σύνολα αυτά περιέχει ένα σημείο που είναι σημείο συσσώρευσης του άλλου συνόλου. Συνεπώς, όταν το M δεν είναι συνεκτικό, τότε αναλύεται σε δύο μη κενά και ξένα υποσύνολα και τέτοια ώστε καθένα απ' αυτά να μην περιέχει σημείο συσσώρευσης του άλλου. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει διαμέριση $M = A \cup B$ τέτοια ώστε

$$(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{B} \cap A) = \emptyset.$$

Εξετάζουμε τώρα πώς εκφράζεται η έννοια της συνεκτικότητας στην ειδική περίπτωση που το M συμπίπτει με το σύνολο R στο οποίο υλοποιούνται οι μέχρι τώρα θεωρήσεις μας. Αν θεωρήσουμε ότι το R είναι μη συνεκτικό και $R = A \cup B$ είναι η διαμέριση του R σε δύο μη κενά υποσύνολα έτσι ώστε κανένα από τα δύο να μην περιέχει σημείο συσσώρευσης του άλλου, προκύπτει ότι και τα δύο υποσύνολα A και B είναι κλειστά. Επειδή όμως το ένα είναι συμπληρωματικό του άλλου ως προς R προκύπτει ότι είναι και τα δύο ανοικτά στο R. Άρα, όλο το R είναι συνεκτικό[6] αν και μόνο αν είναι αδύνατο να γραφεί ως ένωση δύο ξένων μη κενών υποσυνόλων που είναι συγχρόνως ανοικτά και κλειστά στο R.

Θα δείξουμε τώρα ότι *ένα κλειστό διάστημα της ευθείας είναι συνεκτικό σύνολο.* Πράγματι, έστω [a,b] ένα κλειστό διάστημα της ευθείας των πραγματικών αριθμών. Ας υποθέσουμε ότι το σύνολο των σημείων του διαστήματος (αντίθετα με την πρόταση μας) δεν είναι συνεκτικό. Έστω F_1 και F_2 δύο μη κενά κλειστά και ξένα μεταξύ τους σύνολα, η ένωση των οποίων είναι το [a,b]. Ας υποθέσουμε εδώ ότι το σημείο b ανήκει στο F_2. Τότε το F_1 αποτελείται από σημεία x για τα οποία $x<b$. Συμβολίζουμε με c το άνω πέρας του συνόλου F_1. Τότε το c ανήκει στο F_1 ή είναι σημείο συσσώρευσης του. Επειδή όμως το F_1 είναι

---

[6] Ειδικά, κάθε συνεκτικό σύνολο με τουλάχιστον δύο στοιχεία είναι πυκνό στον εαυτό του, δηλ. κάθε σημείο του είναι σημείο συσσώρευσης αυτού του συνόλου.

κλειστό, το $c \in F_1$. Αν το c είναι διαφορετικό από το b, τότε όλα εκείνα τα x, για τα οποία x > c, ανήκουν στο F_2. Άρα, το c είναι σημείο συσσώρευσης του F_2 και συνεπώς ανήκει σ' αυτό. Αν το c συμπίπτει με το b, τότε και πάλι ανήκει στο F_2 από υπόθεση. Σε κάθε περίπτωση το $c \in F_2$. Έτσι βρήκαμε ένα στοιχείο που ανήκει και στο F_1 και στο F_2, σε αντίθεση με την υπόθεση μας ότι αυτά είναι ξένα. Αυτό αποδεικνύει ότι το [a,b] είναι συνεκτικό.

Ένα παράδειγμα μη συνεκτικού συνόλου είναι το σύνολο όλων των ρητών αριθμών. Αν συμβολίσουμε με A το σύνολο όλων των ρητών που είναι μικρότεροι από $\sqrt{2}$ και με B το σύνολο των ρητών αριθμών που είναι μεγαλύτεροι από το $\sqrt{2}$ τότε δεν υπάρχει σημείο συσσώρευσης του A στο B ούτε το αντίστροφο.

Το σύνολο, που περιέχει μόνο ένα σημείο καθώς και το κενό σύνολο θα θεωρούνται συνεκτικά σύνολα.

Θα αποδείξουμε τώρα μερικές προτάσεις για τα συνεκτικά σύνολα που θα χρησιμοποιήσουμε επανειλημμένα παρακάτω.

Θεώρημα 1. *Έστω A και B κλειστά ή ανοιχτά σύνολα χωρίς κοινά σημεία και έστω M ένα μη κενό συνεκτικό σύνολο που περιέχεται στην ένωση τους*

$$M \subseteq A \cup B$$

Τότε το M περιέχεται ολόκληρο μέσα σε ένα από τα δύο αυτά σύνολα, δηλ. $M \subseteq A$ ή $M \subseteq B$.

Απόδειξη: Έστω $M \subseteq A \cup B$. Τότε $M = (M \cap A) \cup (M \cap B)$. Αφού και το A και το B είναι είτε κλειστά είτε ανοικτά ως προς R και δεν έχουν κοινά σημεία, καμία από τις τομές $(M \cap A)$ και $(M \cap B)$ δεν περιέχει σημεία, που να είναι σημεία συσσώρευσης του άλλου. Αφού επίσης το M είναι συνεκτικό πρέπει κάποια απ' αυτές τις τομές να είναι κενή, έστω η $(M \cap B)$. Έπεται ότι $M \subseteq A$.

Συχνά θα στηρίζουμε τους ισχυρισμούς στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2. *Αν ένα συνεκτικό σύνολο M έχει κοινά σημεία με ένα ανοικτό σύνολο G και με το κλειστό συμπληρωματικό του*

$$F = R - G,$$

τότε το M τέμνει το σύνορο του G.

Απόδειξη: Πραγματικά, επειδή

$$Fr(G) = \overline{G} - G,$$

μπορεί κανείς να θεωρήσει το R ως ένωση των παρακάτω τριών συνόλων που είναι ξένα μεταξύ τους: του συνόλου G, του συνόρου Fr(G) και του συμπληρώματος της κλειστότητας του G.

$$R = G \cup Fr(G) \cup (R - \overline{G}).$$

Αν θεωρήσουμε ότι το συνεκτικό M δεν τέμνει το σύνορο του G τότε σύμφωνα με το παραπάνω Θεώρημα, το M θα περιέχεται στην ένωση των G και R $-\overline{G}$. Συνεπώς θα περιέχεται εξ ολοκλήρου είτε στο G είτε στο R $-\overline{G}$, πράγμα που αντίκειται στην υπόθεση μας.

Θεώρημα 3. *Αν κάθε δυο σημεία x και y ενός συνόλου R ανήκουν σε κάποιο συνεκτικό σύνολο* C_{xy} *(εξαρτώμενο από το x και το y), τότε το σύνολο R είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη: Έστω ότι το σύνολο R δεν είναι συνεκτικό, άρα μπορεί κανείς να το θεωρήσει ως ένωση δύο μη κενών κλειστών και ξένων συνόλων F_1 και F_2. Ας πάρουμε ένα x από το F_1 και ένα y από το F_2. Αυτά θα ανήκουν σε ένα συνεκτικό σύνολο C_{xy}. Αλλά, αφού τα F_1 και F_2 είναι κλειστά και ξένα μεταξύ τους, σύμφωνα με την Θεώρημα 1, το C_{xy} θα περιέχεται εξ ολοκλήρου είτε στο F_1 είτε στο F_2. Απ' αυτήν την αντίφαση προκύπτει ότι το R είναι συνεκτικό.

Παραπάνω δείξαμε ότι ένα κλειστό διάστημα της ευθείας είναι συνεκτικό σύνολο. Αφού μπορεί κανείς να θεωρήσει κάθε δυο σημεία της ευθείας ως άκρα ενός κλειστού διαστήματος που βρίσκεται πάνω στην ευθεία, από το προηγούμενο Θεώρημα προκύπτει ότι ολόκληρη η ευθεία είναι συνεκτικό σύνολο. Γενικά, στην ευθεία έχουμε μόνο τα ακόλουθα συνεκτικά σύνολα: Το διάστημα [a,b], το διάστημα (a,b), τα ημιάνοικτα διαστήματα [a,b) ή (a,b], όλη την ευθεία, την ημιευθεία (ένα μη φραγμένο ημιάνοιχτο διάστημα με ή χωρίς το ακραίο σημείο της). Η απόδειξη όλων αυτών προκύπτει από το ότι όταν δύο σημεία ανήκουν σε ένα συνεκτικό σύνολο που βρίσκεται πάνω στην ευθεία, τότε και το κλειστό διάστημα που έχει αυτά τα σημεία ως άκρα περιέχεται στο σύνολο αυτό.

Επειδή κάθε δυο σημεία του επιπέδου ή του χώρου μπορούν να συνδεθούν μ’ ένα ευθύγραμμο τμήμα, έπεται ότι το επίπεδο και ο χώρος είναι συνεκτικά σύνολα. Είναι ευνόητο ότι συνεκτικό είναι κάθε κυρτό σύνολο. Ένα σύνολο το λέμε *κυρτό*, αν για κάθε δυο σημεία του μπορούν να ενωθούν με ένα ευθύγραμμο τμήμα που να περιέχεται πλήρως στο σύνολο αυτό. Έτσι για παράδειγμα το τρίγωνο, το τετράγωνο, ο κύκλος στο επίπεδο και το τετράεδρο, ο κύβος και η σφαίρα στο χώρο είναι συνεκτικά σύνολα.

Θεώρημα 4. *Όταν δύο συνεκτικά σύνολα A και B έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο, τότε η ένωση τους $S = A \cup B$ είναι συνεκτικό σύνολο.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι το S δεν είναι συνεκτικό σύνολο, άρα μπορεί να παρασταθεί ως ένωση δύο μη κενών ξένων και κλειστών συνόλων F_1 και F_2:

$$\mathrm{S} = \mathrm{F}_1 \cup \mathrm{F}_2 .$$

Έστω ότι το σημείο x που είναι το κοινό σημείο των A, B και ανήκει στο F_1. Τότε από το Θεώρημα 1 το A καθώς και το B περιέχονται στο F_1. Άρα το F_2 είναι κενό, που είναι άτοπο. Έπεται ότι το S είναι συνεκτικό.

Το Θεώρημα αυτό καθώς και η απόδειξη του μπορούν να γενικευθούν στην περίπτωση ένωσης πολλών συνεκτικών συνόλων. Ισχύει δηλαδή το ακόλουθο.

Θεώρημα 4΄. *Η ένωση των συνόλων μιας οικογένειας συνεκτικών συνόλων που περιέχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο, είναι συνεκτικό σύνολο.*

Αφού κάθε κλειστό διάστημα είναι συνεκτικό σύνολο έπεται ότι κάθε τεθλασμένη γραμμή, δηλ. μια ένωση ευθυγράμμων τμημάτων όπου δυο γειτονικά τμήματα έχουν κοινό άκρο, είναι συνεκτικό σύνολο.

Γενικότερα, αν ονομάσουμε *αλυσίδα συνόλων* μια πεπερασμένη ακολουθία συνόλων, στην οποία κάθε ζεύγος γειτονικών συνόλων έχει κοινά σημεία, τότε έχουμε ότι η ένωση μιας αλυσίδας συνεκτικών συνόλων είναι επίσης συνεκτικό σύνολο.

Θεώρημα 5. *Αν σε ένα συνεκτικό σύνολο C που περιέχεται στο R επισυνάψουμε οποιοδήποτε υποσύνολο του συνόλου των σημείων συσσώρευσης του C, προκύπτει ένα νέο* *συνεκτικό υποσύνολο C_0. Ειδικά, αν το C είναι συνεκτικό, το ίδιο ισχύει και για την κλειστότητα του C.*

Απόδειξη. Το σύνολο C_0 προκύπτει από το C με την επισύναψη ενός συνόλου σημείων συσσώρευσης του. Θεωρούμε τώρα ότι το σύνολο C_0 μπορεί να παρασταθεί, ως ένωση δύο μη κενών, κλειστών ως προς το C_0 και ξένων συνόλων F_1 και F_2. Τότε σύμφωνα με το Θεώρημα 1, το σύνολο C πρέπει να περιέχεται εξ ολοκλήρου σε ένα από τα δύο αυτά σύνολα. Έστω π.χ. ότι $C \subset F_1$. Έστω x οιοδήποτε σημείο του C_0 που δεν ανήκει στο C. Τότε το x είναι σημείο συσσώρευσης του C άρα και του F_1. Αφού όμως το F_1 είναι κλειστό[****] στο C_0, πρέπει το x να ανήκει στο F_1. Έτσι, κάθε σημείο του C_0 ανήκει στο F_1. Συνεπώς το F_2 είναι κενό. Άρα το C_0 είναι συνεκτικό.

Στις ακόλουθες προτάσεις θα παίξει σημαντικό ρόλο η έννοια της τοπικής συνεκτικότητας.

Ένα σύνολο R λέγεται *τοπικά συνεκτικό* όταν κάθε σημείο του περιέχεται σε μια οσοδήποτε μικρή συνεκτική περιοχή. Δηλαδή, όταν για κάθε σημείο x του R και για κάθε θετικό αριθμό ε υπάρχει ανοικτό και συνεκτικό σύνολο V που περιέχει το x και η διάμετρός του είναι μικρότερη από ε. Ή με άλλα λόγια: για κάθε ανοικτό σύνολο U που περιέχει το σημείο x υπάρχει ένα συνεκτικό ανοικτό σύνολο V που περιέχει πάντα το x και περιέχεται στο U.

Η ευθεία, το επίπεδο και ο χώρος είναι τοπικά συνεκτικά, αφού κάθε σφαιρική περιοχή ενός τυχαίου σημείου της ευθείας, του επιπέδου ή του χώρου είναι συνεκτικό σύνολο. Ένα παράδειγμα συνόλου που δεν είναι τοπικά συνεκτικό είναι το σύνολο των σημείων της ευθείας των πραγματικών αριθμών με συντεταγμένες

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ..., 0.$$

[****] Ένα σύνολο Α λέγεται κλειστό στο σύνολο Β, όταν κάθε σημείο συσσώρευσης του Α που ανήκει στο Β, ανήκει στο σύνολο Α.

Αυτό το σύνολο δεν είναι τοπικά συνεκτικό, αφού κάθε ανοικτό σύνολο που περιέχει το σημείο 0, πρέπει επίσης να περιέχει και ένα άπειρο πλήθος σημείων της μορφής $\frac{1}{n}$ και συνεπώς δεν είναι συνεκτικό.

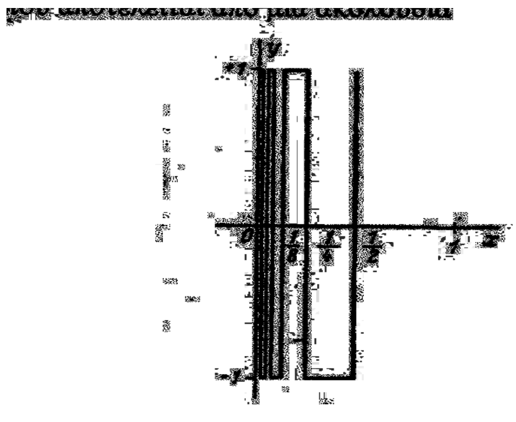
Ένα παράδειγμα συνεκτικού αλλά όχι τοπικά συνεκτικού συνόλου είναι το ήδη ορισθέν σύνολο, που αποτελείται από τα σημεία της γραφικής παράστασης της τριγωνομετρικής συνάρτησης

$$y = \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad 0 < x \leq 1$$

και το οριακό ευθύγραμμο τμήμα

$$x = 0, \quad -1 \leq y \leq 1$$

Αντ' αυτού του συνόλου ίσως είναι καλύτερα να εξετάσει κανείς το ομοιομορφικό του σύνολο (Σχήμα 7) που αποτελείται από μια ακολουθία



Σχήμα 7

εναλλασσόμενων σε οριζόντια και κάθετη διεύθυνση στοιχειωδών τμημάτων

$$A_1: \quad x = \frac{1}{2}, \ -1 \leq y \leq 1$$

$$B_1: \quad \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}, \ y = -1$$

$$A_2: \ x = \frac{1}{4}, \ -1 \leq y \leq 1$$

$$B_2: \ \frac{1}{8} \leq x \leq \frac{1}{4}, \quad y = +1$$

$$A_3:\ x = \frac{1}{8},\ -1 \le y \le 1$$

$$B_3:\ \frac{1}{16} \le x \le \frac{1}{8},\ y = -1$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A_n: x = \frac{1}{2^n},\ -1 \le y \le 1$$

$$B_n:\ \frac{1}{2^{n+1}} \le x \le \frac{1}{2^n},\ y = (-1)^n$$

και το οριακό τμήμα

$$A_0:\ x = 0,\ -1 \le y \le 1$$

Αυτό το σύνολο είναι συνεκτικό, αφού είναι η κλειστότητα του συνεκτικού συνόλου που αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα μιας άπειρης τεθλασμένης γραμμής. Σε κανένα όμως από τα σημεία του οριακού τμήματος δεν είναι τοπικά συνεκτικό, επειδή κάθε κατάλληλα μικρή περιοχή ενός τέτοιου σημείου περιέχει ένα άπειρο πλήθος κάθετων τμημάτων, αλλά δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τα συνδετικά οριζόντια τμήματα. Κάθε τέτοια περιοχή δεν είναι λοιπόν συνεκτική.

§ 2. 4. Συμπάγεια

Μία πολύ σημαντική έννοια για ολόκληρη την θεωρία των σημειοσυνόλων είναι αυτή της συμπάγειας. Ένα σύνολο R λέγεται *συμπαγές* όταν κάθε άπειρο υποσύνολο M του R έχει στο R σημείο συσσώρευσης. Θα δείξουμε τώρα ότι ένα κλειστό διάστημα της ευθείας είναι συμπαγές σύνολο.

Πράγματι, έστω M ένα υποσύνολο του τμήματος [a,b]. Έστω c το μέσο του [a,b]. Τότε τουλάχιστον ένα από τα δύο τμήματα [a,c] ή [c,b] περιέχει ένα άπειρο υποσύνολο του M. Διχοτομώντας αυτό το τμήμα βλέπουμε εύκολα ότι και πάλι τουλάχιστον σε ένα από τα προκύπτοντα τμήματα θα περιέχεται ένα άπειρο υποσύνολο του M. Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία έχουμε μια φθίνουσα ακολουθία τμημάτων

$$T_0 \supset T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset \ldots \supset T_n \ldots,$$

όπου το καθένα έχει μήκος το μισό του προηγούμενου και περιέχει ένα άπειρο υποσύνολο του M.

Από το γνωστό Θεώρημα για τη φθίνουσα ακολουθία κιβωτισμένων διαστημάτων, υπάρχει ακριβώς ένα σημείο x_0 που είναι κοινό για όλα τα διαστήματα T_n. Το x_0 είναι τότε σημείο συσσώρευσης του M. Πραγματικά, για κάθε διάστημα που περιέχει το x_0 υπάρχει ένας τόσο μεγάλος αριθμός n ώστε ολόκληρο το T_n να περιέχεται στο θεωρούμενο διάστημα. Συνεπώς αυτό το διάστημα περιέχει ένα άπειρο υποσύνολο του M. Έτσι, αποδείχτηκε ότι το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του M επειδή σε κάθε περιοχή του x_0 ανήκουν στοιχεία του M διαφορετικά απ' αυτό.

Με παρόμοια μέθοδο μπορεί κανείς να δείξει επίσης ότι ένα τετράγωνο είναι συμπαγές σύνολο. Πράγματι, έστω Q_0 ένα τετράγωνο με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες και M ένα άπειρο σύνολο σημείων αυτού του τετραγώνου. Διαμερίζουμε τώρα το Q_0 με ευθείες παράλληλες προς τους άξονες σε τέσσερα ίσα τετράγωνα και συμβολίζουμε με Q_1 ένα απ' αυτά που περιέχει άπειρο πλήθος σημείων του M. Επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία γι αυτό το τετράγωνο και συμβολίζουμε με Q_2 εκείνο το υποτετράγωνο που περιέχει άπειρα σημεία του M. Συνεχίζοντας έτσι, προκύπτει μια φθίνουσα ακολουθία τετραγώνων

$$Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset Q_3 \supset \ldots \supset Q_n \ldots,$$

το καθένα από τα οποία περιέχει άπειρα σημεία του συνόλου M και η πλευρά του είναι η μισή από την πλευρά του προηγουμένου. Προβάλουμε αυτά τα τετράγωνα στον x-άξονα και αντίστοιχα τον y-άξονα και παίρνουμε σε καθέναν απ' αυτούς μια φθίνουσα ακολουθία τμημάτων

$$T_0^x \supset T_1^x \supset T_2^x \supset T_3^x \supset \ldots \supset T_n^x \ldots$$

και

$$T_0^y \supset T_1^y \supset T_2^y \supset T_3^y \supset \ldots \supset T_n^y \ldots$$

των οποίων τα μήκη τείνουν στο μηδέν καθώς το n τείνει στο άπειρο.

Συμβολίζουμε με x_0 το κοινό σημείο όλων των T_n^x και με y_0 το κοινό σημείο όλων των T_n^y και θεωρούμε στο επίπεδο το σημείο m_0 με συντεταγμένες x_0 και y_0. Το σημείο m_0 ανήκει σε όλα τα τετράγωνα Q_n και συνεπώς είναι σημείο συσσώρευσης του M. Πραγματικά, για κάθε κύκλο περί το m_0 μπορεί να βρεθεί ένας αριθμός n ώστε ολόκληρο το αντίστοιχο τετράγωνο Q_n να περιέχεται σ' αυτόν τον κύκλο. Αφού όμως κάθε Q_n περιέχει άπειρο σύνολο σημείων του Μ, μέσα στον κύκλο θα περιέχονται άπειρα το πλήθος σημεία του Μ. Έτσι αποδείχθηκε ότι το m_0 είναι σημείο συσσώρευσης του Μ.

Όμοια αποδεικνύει κανείς ότι μια σφαίρα είναι συμπαγής. Η ευθεία όμως δεν είναι συμπαγές σύνολο γιατί αν πάρει κανείς στον άξονα των x όλα τα σημεία 1,2,3, ... n,... με θετική ακέραια τετμημένη αυτό το σύνολο δεν έχει σημείο συσσώρευσης. Επίσης, το σύνολο όλων των ρητών σημείων ενός κλειστού διαστήματος δεν είναι συμπαγές, αφού μια ακολουθία ρητών αριθμών που συγκλίνουν σε άρρητο δεν έχει σ' αυτό το σύνολο σημείο συσσώρευσης.

Συγκεντρώνουμε μερικές ιδιότητες των συμπαγών συνόλων.

Θεώρημα 1. *α) Ένα κλειστό σύνολο F που περιέχεται σ' ένα συμπαγές σύνολο R είναι και το ίδιο συμπαγές.*
β) Κάθε συμπαγές σύνολο F που περιέχεται στο R είναι κλειστό στο R (το R δεν προϋποτίθεται συμπαγές).

Απόδειξη. α) Έστω Μ ένα τυχαίο άπειρο υποσύνολο του F. Αφού $F \subset R$ τότε και $M \subset R$. Επειδή το R είναι συμπαγές, το σύνολο Μ θα έχει ένα σημείο συσσώρευσης x στο R. Το σημείο x, που είναι σημείο συσσώρευσης του Μ, είναι και σημείο συσσώρευσης του F. Όμως το F είναι κλειστό. Άρα το x ανήκει στο F. Δείξαμε ότι κάθε άπειρο υποσύνολο του F έχει σημείο συσσώρευσης που ανήκει πάντα στο F, δηλαδή το F είναι συμπαγές σύνολο.

β) Αποδεικνύουμε τώρα τον δεύτερο ισχυρισμό. Ας υποθέσουμε ότι το συμπαγές $F \subset R$ δεν ήταν κλειστό στο R. Έστω x ένα σημείο συσσώρευσης του F που δεν ανήκει σ' αυτό. Υπάρχει τότε μια ακολουθία σημείων στο F

$$x_1, x_2, x_3 \ldots x_n \ldots,$$

που έχει το σημείο x μοναδικό σημείο συσσώρευσης. Πραγματικά διαλέγουμε ένα σημείο x_1 του συνόλου F, που απέχει από το x λιγότερο από 1. Ένα σημείο x_2 που απέχει από το x απόσταση μικρότερη από $\frac{1}{2}$. Ένα σημείο x_3 του F, που απέχει από το x απόσταση μικρότερη από τους αριθμούς κ.ο.κ.

Έχουμε τότε ότι $\rho(x, x_n) < \frac{1}{n}$, για κάθε φυσικό n. Το σημείο x είναι σημείο συσσώρευσης της άπειρης ακολουθίας

$$x_1, x_2, x_3 \ldots x_n \ldots,$$

αφού σε κάθε περιοχή του x περιέχεται ένα άπειρο πλήθος σημείων της ακολουθίας. Κανένα άλλο σημείο y δεν μπορεί να είναι σημείο συσσώρευσης αυτής της ακολουθίας. Αν πάρει κανείς n_0 τόσο μεγάλο ώστε

$$\frac{1}{n_0} < \frac{1}{2}\rho(x, y)$$

τότε για όλα τα σημεία της ακολουθίας μας με $n > n_0$ ισχύει:

$$\rho(x,x_n) < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \frac{1}{2}\rho(x, y),$$

Λόγω της τριγωνικής ανισότητας έχουμε

$$\rho(x,y) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, y) \text{ και } \rho(x,y) - \rho(x, x_n) \leq \rho(y, x_n).$$

Συνεπώς για κάθε $n > n_0$ προκύπτει $\frac{1}{2}\rho(x, y) \leq \rho(y, x_n)$, που δίνει ένα κάτω φράγμα για τις αποστάσεις $\rho(y, x_n)$. Αυτό όμως σημαίνει ότι το y δεν είναι σημείο συσσώρευσης της ακολουθίας

$$x_1, x_2, x_3 \ldots x_n \ldots$$

Κατ' αυτόν τον τρόπο βρήκαμε στο συμπαγές F ένα άπειρο υποσύνολο που δεν έχει κανένα σημείο συσσώρευσης μέσα στο F (αφού το μοναδικό του σημείο συσσώρευσης, το x, δεν ανήκει στο F). Αυτό έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση ότι το F είναι κλειστό.

Θεώρημα 2. α) *Μια φθίνουσα ακολουθία*

$$F_0 \supset F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots \supset F_n \ldots \quad (1)$$

μη κενών, κλειστών συνόλων που περιέχονται σε ένα συμπαγές σύνολο R έχει μη κενή τομή.

β) Επιπλέον, όταν αυξανομένου του n η διάμετρος των F_n τείνει στο μηδέν[7]*, τότε η τομή των*

$$F_0 \cap F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap \ldots \cap F_n \cap \ldots,$$

αποτελείται από ένα μοναδικό σημείο.

Απόδειξη. α) Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι όλα τα σύνολα της ακολουθίας (1) είναι ανά δύο διάφορα μεταξύ τους. Απ' αυτό προκύπτει ότι

[7] Δηλ. μπορεί κανείς για έναν οποιονδήποτε θετικό αριθμό ε να βρει ένα n_0 έτσι ώστε για κάθε $n > n_0$ να ισχύει η ανισότητα $\delta(F_n) < \varepsilon$.

μπορεί κανείς να βρει στο σύνολο F_1 ένα σημείο x_1 που να μην ανήκει στο F_2, στο F_2 ένα σημείο x_2 που να μην ανήκει στο F_3. Γενικά μπορεί να βρει ένα σημείο x_n στο F_n που να μην ανήκει στο F_{n+1}. Αφού το R είναι συμπαγές η άπειρη ακολουθία

$$x_1, x_2, x_3 \ldots x_n \ldots \qquad (2)$$

έχει ένα σημείο συσσώρευσης, x. Αποδεικνύουμε ότι αυτό το σημείο x ανήκει σε κάθε σύνολο της ακολουθίας (1). Θα δείξουμε ότι $x \in$ F. Επειδή

$$F_n \supset F_{n+1} \supset F_{n+2} \supset \ldots,$$

όλα τα στοιχεία της ακολουθίας (2) από το x_n και μετά ανήκουν στο F_n. Όμως η ακολουθία

$$x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots \qquad (3)$$

διαφέρει από την ακολουθία (2) μόνο σε πεπερασμένα το πλήθος σημεία, το x που είναι σημείο συσσώρευσης της (2) θα είναι και της (3). Όμως όλα τα σημεία της τελευταίας ακολουθίας ανήκουν στο F_n. Κι αφού το x είναι σημείο συσσώρευσης του F_n ανήκει σ' αυτό καθόσον το F_n είναι κλειστό.

Έτσι βρήκαμε ένα σημείο x που ανήκει σ' όλα τα σύνολα της ακολουθίας (1). Συνεπώς η τομή αυτών των συνόλων είναι μη κενή.

β) Θεωρούμε τώρα ότι η διάμετρος των συνόλων F_n, με το n αυξανόμενο, συγκλίνει στο μηδέν. Αν η τομή των συνόλων της ακολουθίας (1) περιείχε δυο σημεία x και y διάφορα μεταξύ τους, αυτά θα άνηκαν σε κάθε σύνολο της ακολουθίας. Άρα θα ισχύει $\delta(F_n) > \rho(x,y)$ για κάθε n, δηλ. η διάμετρος των συνόλων δεν συγκλίνει στο μηδέν καθώς το n αυξάνει, το αντίθετο από την υπόθεση μας. Έτσι, η τομή των συνόλων της ακολουθίας (1) περιέχει ένα μοναδικό σημείο.

Ένα άπειρο σημειοσύνολο D θα καλείται *ε- πλέγμα* του συνόλου R όταν για κάθε x στο R υπάρχει ένα σημείο d στο D ώστε η απόσταση του από το x να είναι μικρότερη από ε.

Θα δείξουμε ότι κάθε συμπαγές σύνολο R έχει για κάθε ε > 0 ένα ε-πλέγμα. Κάνουμε απόδειξη με εις άτοπο απαγωγή και υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα ε > 0 για το οποίο το συμπαγές R δεν έχει ε-πλέγμα. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε σημείο a_1 του R μπορούμε να βρούμε ένα σημείο a_2 στο R, η απόσταση του οποίου από το a_1 να είναι τουλάχιστον ε. Αφού εξ υποθέσεως το R δεν έχει ε-πλέγμα υπάρχει ένα σημείο a_3 που απέχει και από το σημείο a_1 και από το σημείο a_2 τουλάχιστον ε. Αφού κανένα από τα σημεία a_1, a_2, a_3 δεν συμμετέχει σε κάποιο ε-πλέγμα του συμπαγούς συνόλου R, μπορεί κανείς να βρει ένα σημείο a_4, η απόσταση του οποίου από καθένα εκ των a_1, a_2, a_3 να είναι τουλάχιστον ε. Με αυτόν τον τρόπο σχηματίζει κανείς μια άπειρη ακολουθία σημείων

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...,$$

στην οποία κάθε δύο σημεία απέχουν τουλάχιστον ε. Αυτή η ακολουθία δεν μπορεί να έχει σημείο συσσώρευσης. Άρα βρήκαμε στο συμπαγές σύνολο R ένα άπειρο σύνολο A που δεν έχει κανένα σημείο συσσώρευσης. Αυτό αντιβαίνει στον ορισμό της συμπάγειας. Συνεπώς, η υπόθεση μας ότι για κάποιο ε>0 δεν υπάρχει ε-πλέγμα είναι ψευδής.

Κάθε σύνολο R, που για κάποιο ε > 0 έχει ένα ε-πλέγμα, είναι φραγμένο.

Πράγματι, έστω x και y δύο τυχαία σημεία του R. Η ύπαρξη του ε-πλέγματος στο R μας εξασφαλίζει ότι μπορούν να βρεθούν δύο σημεία a και b έτσι ώστε να ισχύει,

$$\rho(a,x) < \varepsilon, \quad \rho(b,y) < \varepsilon$$

Συμβολίζουμε με d την μεγαλύτερη των αποστάσεων μεταξύ των ζευγών των σημείων στο ε-πλέγμα του συνόλου R, οπότε

$$\rho(a,b) \le d$$

και επομένως

$$\rho(x,y) \le \rho(x,a) + \rho(a,b) + \rho(b,y) < \varepsilon + d + \varepsilon = d + 2\varepsilon,$$

δηλ. το σύνολο R είναι φραγμένο.

Απ' τον ισχυρισμό αυτό προκύπτει ότι *τα συμπαγή σύνολα είναι και φραγμένα.*

Θεώρημα 3. *Ένα σύνολο R που βρίσκεται πάνω σε μια ευθεία, στο επίπεδο ή στο χώρο*[8] *είναι συμπαγές τότε και μόνον τότε, αν είναι κλειστό και φραγμένο.*

Απόδειξη. Η συνθήκη είναι ικανή. Πράγματι, αν το R είναι συμπαγές από τον ισχυρισμό β) του Θεωρήματος 1 είναι κλειστό στο περιέχων σύνολο, είτε αυτό είναι ευθεία, επίπεδο ή χώρος. Από την συμπάγεια είναι επίσης φραγμένο.

Η συνθήκη είναι αναγκαία. Πραγματικά, αφού το R είναι φραγμένο όλα τα σημεία του θα βρίσκονται μέσα σε ένα συγκεκριμένο ευθύγραμμο τμήμα, ή τετράγωνο ή σε μια σφαίρα. Το σύνολο R που πρέπει να είναι κλειστό ως προς την ευθεία, το επίπεδο ή το χώρο θα είναι και κλειστό ως προς το περιέχων τμήμα, τετράγωνο ή σφαίρα. Όμως το τμήμα, το

[8] Η γενικότερα σε έναν n-διάστατο Ευκλείδειο χώρο.

τετράγωνο ή η σφαίρα είναι συμπαγή σύνολα. Επομένως είναι και το R συμπαγές, ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς σύμφωνα με το α) του Θεωρήματος 1.

Ένα σύνολο D λέγεται *πυκνό* στο R όταν κάθε ανοικτό υποσύνολο G του R περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του D.

Αφού μια σφαιρική περιοχή ενός σημείου είναι ανοικτό σύνολο προκύπτει άμεσα απ' αυτόν τον ορισμό ότι: *ένα σύνολο D είναι στο R πυκνό ακριβώς τότε, όταν κάθε στοιχείο του R είναι σημείο συσσώρευσης του D.*

Για παράδειγμα το σύνολο όλων των ρητών αριθμών (και όλων των αρρήτων) σε ένα κλειστό διάστημα είναι πυκνό.

Θεώρημα 4. *Σε κάθε άπειρο συμπαγές σύνολο R υπάρχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο D.*

Απόδειξη. Για να το δείξουμε αυτό θεωρούμε το σύνολο

$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup \ldots \cup D_n \cup \ldots$$

όπου D_n είναι ένα $\frac{1}{n}$-πλέγμα του R.

Για κάθε ε > 0 και κάθε σημείο x του R υπάρχει ένα σημείο d στο D που απέχει από το x λιγότερο από ε. Ένα τέτοιο σημείο d υπάρχει πάντα στο σύνολο D_n αφού $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Έτσι το σύνολο D, που είναι προφανώς αριθμήσιμο, είναι πυκνό στο R.

§ 2. 5. Συνεχείς απεικονίσεις

Μια απεικόνιση f ενός συνόλου X σε ένα σύνολο Y λέγεται *συνεχής* στο σημείο x_0 του X όταν για κάθε θετικό αριθμό ε υπάρχει θετικός αριθμός δ τέτοιος ώστε

$$\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

όταν για κάθε $x \in X$ με

$$\rho(x, x_0) < \delta$$

Με άλλα λόγια, η απεικόνιση f είναι συνεχής στο σημείο x_0, αν για κάθε ε-περιοχή του σημείου $y_0 = f(x_0)$ μπορεί να βρεθεί μια δ-περιοχή του σημείου x_0 τέτοια ώστε η εικόνα κάθε στοιχείου της δ-περιοχής να βρίσκεται στην ε-περιοχή. Όταν η απεικόνιση f είναι συνεχής σε κάθε σημείο $x \in X$ τότε την ονομάζουμε *συνεχή* απεικόνιση του X στο Y. Μια αμφιμονοσήμαντη και συνεχής απεικόνιση του συνόλου X επί του συνόλου Y θα λέγεται *τοπολογική απεικόνιση* ή *ομοιομορφισμός* όταν η αντίστροφη απεικόνιση f^{-1} (του συνόλου Y επί του συνόλου X) είναι συνεχής. Δύο σύνολα λέγονται *ομοιομορφικά (ή ομοιόμορφα)* όταν μπορεί κανείς να απεικονίσει τοπολογικά το ένα στο άλλο.

Από τις προτάσεις για τις συνεχείς απεικονίσεις αναφέρουμε τις παρακάτω:

Θεώρημα 1. *Μια απεικόνιση ενός συνόλου X σ' ένα σύνολο Y είναι συνεχής ακριβώς όταν η αντίστροφη εικόνα κάθε ανοικτού συνόλου $H \subseteq Y$ είναι ανοικτό στο X.*

Η συνθήκη είναι αναγκαία. Έστω η απεικόνιση f συνεχής και $H \subseteq Y$ ανοικτό. Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο x_0 που ανήκει στην αντίστροφη εικόνα του H. Επειδή το $y_0 = f(x_0)$ βρίσκεται στο H μπορεί κανείς να βρει μια ε-περιοχή του y_0 που να περιέχεται ολόκληρη στο H. Λόγω της συνέχειας της απεικόνισης υπάρχει ένας αριθμός δ τέτοιος ώστε η εικόνα κάθε στοιχείου x της δ-περιοχής του x_0 να ανήκει στην ε-περιοχή του y_0 και επομένως στο ανοικτό σύνολο H. Έτσι η δ-περιοχή του x_0 περιέχεται στην αντίστροφη εικόνα του H. Η αντίστροφη εικόνα του H είναι συνεπώς ένωση των σφαιρικών περιοχών των σημείων που περιέχει. Άρα η αντίστροφη εικόνα του H είναι ανοικτό σύνολο.

Η συνθήκη είναι ικανή. Αν πληρούται η προϋπόθεση, έχουμε ειδικά ότι η αντίστροφη εικόνα μιας ε-περιοχής του $y_0 = f(x_0)$ είναι ένα ανοικτό σύνολο G που περιέχει το x_0. Επομένως, μπορεί να βρει κανείς έναν αριθμό δ τέτοιον ώστε η δ-περιοχή του σημείου x_0 να περιέχεται στο G. Επειδή επίσης κάθε σημείο της δ-περιοχής του x_0 θα απεικονίζεται σε σημείο που θα ανήκει στην ε-περιοχή του y_0, η απεικόνιση f είναι συνεχής.

Επειδή οι αντίστροφες εικόνες των συμπληρωματικών συνόλων είναι μεταξύ τους συμπληρωματικά σύνολα, από το Θεώρημα 1 προκύπτει το

Θεώρημα 1΄. *Μια απεικόνιση ενός συνόλου X σ' ένα σύνολο Y είναι συνεχής ακριβώς τότε όταν η αντίστροφη εικόνα κάθε κλειστού στο Y είναι κλειστό στο X.*

Πολλές από τις ιδιότητες των συνόλων τις οποίες συχνά θεωρούμε διατηρούνται από τις συνεχείς απεικονίσεις. Θα το αποδείξουμε για τις δυο ιδιότητες που μας ενδιαφέρουν ιδιαίτερα τη συνεκτικότητα και τη συμπάγεια.

Θεώρημα 2. *Η συνεχής εικόνα Y ενός συνεκτικού συνόλου X είναι συνεκτικό σύνολο.*

Απόδειξη: Κάνουμε απόδειξη με εις άτοπον απαγωγή και υποθέτουμε ότι το σύνολο Y δεν είναι συνεκτικό. Τότε θα μπορούσε κανείς να το παραστήσει ως ένωση δύο μη κενών ξένων και κλειστών συνόλων C και D. Από το Θεώρημα 1 οι αντίστροφες εικόνες των συνόλων C και D θα είναι τα κλειστά στο X σύνολα, έστω A και B, αντίστοιχα. Τα A και B δεν θα είναι κενά γιατί το X απεικονίζεται επί του Y. Θα είναι ξένα αφού τα σύνολα C και D δεν έχουν κοινά σημεία. Άρα βρήκαμε μια διαμέριση του συνεκτικού συνόλου X σε δύο κλειστά μη κενά και ξένα σύνολα A και B, κάτι που είναι αδύνατο. Απ' αυτό προκύπτει το αδύνατο μιας αντίστοιχης διαμέρισης για το Y, δηλ. η συνεκτικότητα του.

Θεώρημα 3. *Η συνεχής εικόνα συμπαγούς συνόλου είναι συμπαγές σύνολο.*

Απόδειξη: Έστω μια συνεχής απεικόνιση f του συμπαγούς συνόλου X στο σύνολο Y. Θα δείξουμε ότι το Y είναι συμπαγές. Έστω N ένα άπειρο υποσύνολο του Y. Για κάθε σημείο y του N, θεωρούμε ένα σημείο x, που ανήκει στην αντίστροφη εικόνα του σημείου y και συμβολίζουμε το σύνολο όλων αυτών των σημείων με M. Ποτέ δυο σημεία του συνόλου M δεν θα απεικονίζονται στο ίδιο σημείο του συνόλου N, άρα το σύνολο M είναι άπειρο. Αφού το X είναι συμπαγές υπάρχει ένα σημείο x_0 που είναι σημείο συσσώρευσης του M. Έστω $y_0 = f(x_0)$. Τότε το y_0 είναι σημείο συσσώρευσης του N. Πράγματι, αφού η απεικόνιση f είναι συνεχής στο x_0 για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα $\delta >0$ τέτοιο ώστε $\rho(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$ όταν $\rho(x,x_0) < \delta$. Αφού το x_0 είναι σημείο συσσώρευσης του M υπάρχει ένα άπειρο πλήθος σημείων x που ανήκουν στο M και απέχουν από το x_0 λιγότερο από δ. Τότε οι εικόνες τους ανήκουν στο N και απέχουν από το y_0 λιγότερο από ε. Άρα μπορεί κανείς να βρει για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$ ένα σημείο, διαφορετικό από το y_0, που ανήκει στο N και απέχει από το y_0 λιγότερο από ε. Αυτό σημαίνει όμως ότι το y_0 είναι σημείο συσσώρευσης του N. Έτσι αποδεικνύεται η συμπάγεια του Y.

Πόρισμα. *Μέσω μιας συνεχούς απεικόνισης ενός συμπαγούς συνόλου X σε ένα σύνολο Y η εικόνα κάθε κλειστού (ως προς X) συνόλου είναι κλειστό (ως προς Y) σύνολο.*

Αν A είναι κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς X και B η εικόνα του A, τότε το A είναι συμπαγές από το α) του Θεωρήματος 1, § 4. Επομένως το B, με βάση τα μέχρι τούδε αποδεδειγμένα Θεωρήματα είναι συμπαγές. Από τον ισχυρισμό β) του Θεωρήματος 1, § 4 το B είναι επίσης κλειστό στο Y.

Θεώρημα 4. *Η συνεχής εικόνα ενός τοπικά συνεκτικού συμπαγούς συνόλου είναι τοπικά συνεκτικό συμπαγές.*

Απόδειξη: Έστω X τοπικά συνεκτικό και συμπαγές σύνολο και Y η συνεχής εικόνα του X. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3 το Y είναι συμπαγές. Θα δείξουμε ότι το Y είναι τοπικά συνεκτικό. Έστω ότι y τυχαίο σημείο του Y και H ένα τυχαίο ανοικτό σύνολο, που περιέχει το σημείο y. Με βάσει το Θεώρημα 1, η αντίστροφη εικόνα G του ανοικτού (στο Y) συνόλου H είναι ένα σύνολο ανοικτό στο X. Το σύνολο G περιέχει την αντίστροφη εικόνα F του σημείου y^+. Επειδή το σύνολο X είναι τοπικά συνεκτικό, για κάθε σημείο x του F μπορεί κανείς να βρει ένα συνεκτικό και ανοικτό σύνολο U(x) υποσύνολο του G, το οποίο να περιέχει το x. Συμβολίζουμε με S την ένωση όλων των συνόλων U(x) και με T την εικόνα του συνόλου S. Ακόμη συμβολίζουμε με A το κλειστό σύνολο, που είναι συμπληρωματικό του S, ενώ με B συμβολίζουμε την εικόνα του A. Επειδή το X είναι συμπαγές και το A κλειστό, θα είναι επίσης κλειστό και το B (σύμφωνα με το συμπέρασμα από το προηγούμενο Θεώρημα). Από εδώ προκύπτει ότι το σύνολο

$$V = Y - B$$

είναι ανοικτό στο Y.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι

$$y \in V \subset T \subset H$$

Επειδή F είναι η αντίστροφη εικόνα του σημείου y και

$$F \subset S = X - A\ ,$$

κανένα σημείο του A δεν έχει το σημείο y ως εικόνα. Άρα $y \in Y - B = V$.
Επειδή B είναι η εικόνα του A και V το συμπλήρωμα του B, δεν υπάρχει σημείο του συνόλου V που να είναι εικόνα κάποιου σημείου του A. Αλλά το σύνολο S είναι το συμπλήρωμα του A. Άρα κάθε σημείο του V είναι εικόνα ενός ορισμένου σημείου του S. Συνεπώς το σύνολο V περιέχεται μέσα στο σύνολο T:

$$V \subset T$$

Επειδή $S \subset G$ ισχύει τελικά

$$T \subset H$$

Έχουμε λοιπόν δείξει ότι ισχύει

$$y \in V \subset T \subset H.$$

[+] Δηλαδή το σύνολο όλων των σημείων $x \in X$, των οποίων εικόνα είναι το y.

Θα δείξουμε τώρα ότι το T είναι συνεκτικό. Το σύνολο T μπορεί να θεωρηθεί ως ένωση συνόλων, το καθένα από τα οποία είναι εικόνα ενός ανοικτού συνεκτικού συνόλου U(x), όπου το x διατρέχει όλα τα σημεία του F, των οποίων εικόνα είναι το y. Άρα όλα τα σύνολα, η ένωση των οποίων είναι το σύνολο T, είναι συνεκτικά και έχουν το y ως κοινό σημείο. Από αυτό προκύπτει ότι το σύνολο T είναι επίσης συνεκτικό.

Συμβολίζουμε με C_y το μέγιστο συνεκτικό σύνολο, που περιέχει το σημείο y και περιέχεται στο ανοικτό σύνολο H. Το σύνολο C_y είναι το μέγιστο συνεκτικό σύνολο στο οποίο ανήκει το y και περιέχεται στο σύνολο H^{++}. Η λέξη "μέγιστο" σημαίνει εδώ, ότι κανένα σύνολο, που περιέχει γνήσια το C_y και είναι υποσύνολο του H, δεν μπορεί να είναι συνεκτικό. Θα δείξουμε ότι το C_y είναι ανοικτό σύνολο. Πράγματι, είδαμε ότι το y ανήκει στο ανοικτό σύνολο V, που περιέχεται στο T. Επειδή το T είναι συνεκτικό, ισχύει

$$T \subset C_y$$

Άρα

$$y \in V \subset C_y$$

Εστω z τυχαίο σημείο του συνόλου C_y. Όπως και προηγουμένως για το y, μπορούμε να βρούμε για το σημείο z ένα συνεκτικό σύνολο T_z και ένα ανοικτό σύνολο W, ώστε να ισχύει

$$z \in W \subset T_z \subset H$$

Συμβολίζουμε με C_z το μέγιστο συνεκτικό σύνολο, που περιέχει το z και είναι υποσύνολο του H. Τότε είναι

$$z \in W \subset T_z \subset C_z \subset H.$$

Τα σύνολα C_z και C_y συμπίπτουν. Πράγματι, αν για παράδειγμα το C_z περιείχε σημεία που δεν ανήκουν στο C_y τότε το σύνολο

$$C_y \cup C_z$$

θα ήταν συνεκτικό υποσύνολο του H, στο οποίο ανήκει το σημείο y και θα ήταν μεγαλύτερο από το C_y. Αλλά αυτό βρίσκεται σε αντίφαση με το ό,τι το C_y είναι το μεγαλύτερο συνεκτικό σύνολο που περιέχει το σημείο y και βρίσκεται στο H. Άρα έχουμε

$$C_y = C_z$$

και συνεπώς

$$W \subset C_y$$

Επειδή το z ήταν τυχαίο σημείο του συνόλου C_y, προκύπτει απ' εδώ, ότι κάθε σημείο του συνόλου C_y βρίσκεται σε ένα ανοικτό σύνολο το οποίο με την σειρά του είναι υποσύνολο του C_y. Ετσι μπορεί κανείς να παραστήσει το σύνολο C_y ως ένωση τέτοιων ανοικτών συνόλων. Άρα το C_y είναι ανοικτό σύνολο. Έτσι λοιπόν, για κάθε τυχαίο σημείο y του συνόλου Y και οποιοδήποτε ανοικτό σύνολο H, που περιέχει το y βρήκαμε κι' ένα ανοικτό συνεκτικό σύνολο C_y ώστε να ισχύει,

$$y \in C_y \subset H,$$

Αυτό αποδεικνύει την τοπική συνεκτικότητα του Y.

Είδαμε ήδη, ότι ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι ένα τοπικά συνεκτικό σύνολο, ενώ το σύνολο που αποτελείται από τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$\sin\left(\frac{2\pi}{x}\right), \quad 0 < x \leq 1$$

και τα σημεία της συνοριακής γραμμής

$$x = 0, \ \ -1 \leq y \leq 1,$$

δεν είναι τοπικά συνεκτικό. Άρα το σύνολο αυτό με βάση το Θεώρημα 4, όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει στο Κεφ. 1, δεν είναι συνεχής εικόνα του ευθύγραμμου τμήματος.

Θεώρημα 5. *Κάθε συνεχής και αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση ενός συμπαγούς συνόλου, έχει συνεχή την αντίστροφη απεικόνιση, δηλαδή είναι ομοιομορφισμός (τοπολογική απεικόνιση).*

Απόδειξη: Έστω f μια αντιστρέψιμη και σε συνεχής απεικόνιση ενός συμπαγούς X επί του συνόλου Y. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3 το σύνολο Y είναι συμπαγές. Πρέπει να δειχθεί, ότι η απεικόνιση f^{-1} του συμπαγούς συνόλου Y επί του συμπαγούς συνόλου X, είναι συνεχής, δηλαδή ότι η αντίστροφη εικόνα κάθε κλειστού συνόλου F στο X με την απεικόνιση f^{-1} είναι κλειστό σύνολο στο Y. Όμως η αντίστροφη εικόνα του συνόλου F, μέσω

++ Το C_y λέγεται *συνιστώσα* του σημείου y στο σύνολο H (Σ.Μ).

της απεικόνισης f^{-1} είναι ίση με την εικόνα του συνόλου F μέσω της f. Αυτή είναι κλειστό υποσύνολο του Y με βάση το Πόρισμα του Θεωρήματος 3.

Είδαμε ότι πολλές από τις ιδιότητες των συνόλων που αναφέραμε είναι αναλλοίωτες υπό τις συνεχείς απεικονίσεις. Τέτοιες είναι π.χ. η συνεκτικότητα, η συμπάγεια, η τοπική συνεκτικότητα συμπαγών χώρων, κατά μείζονα λόγο. Αυτές οι ιδιότητες διατηρούνται επίσης από τους ομοιομορφισμούς. Αλλά οι τοπολογικές απεικονίσεις διατηρούν και άλλες ιδιότητες (οι οποίες δεν διατηρούνται εν γένει από τις συνεχείς απεικονίσεις). Τέτοιες είναι π.χ. η τοπική συνεκτικότητα ενός οποιουδήποτε (όχι μόνο συμπαγούς) συνόλου, η ιδιότητα ενός συνόλου να είναι "σύνορο ενός ανοικτού συνόλου", η ιδιότητα ενός συνόλου, να είναι κλειστό (ανοικτό) σε ένα σύνολο που το περιέχει κ.ά.

Τα παραπάνω σημαίνουν το εξής: Αν ένα σύνολο A έχει κάποια από τις αναφερθείσες ιδιότητες ως προς ένα σύνολο X που το περιέχει (το A), και το X απεικονιστεί μέσω μιας τοπολογικής συνάρτησης σε ένα σύνολο Y, τότε η εικόνα B του A έχει τις αντίστοιχες ίδιες ιδιότητες ως προς το σύνολο Y. Αν για παράδειγμα το A είναι κλειστό στο X, τότε και το B θα είναι επίσης κλειστό στο Y. Αν το A ανοικτό στο X, τότε το B θα είναι επίσης ανοικτό στο Y.

Η μελέτη των ιδιοτήτων των συνόλων, οι οποίες διατηρούνται από τις τοπολογικές απεικονίσεις, αποτελεί το καθ΄ αυτό περιεχόμενο της τοπολογίας.

§ 2. 6. Ιδιότητες των συνεχών

Τα κυρίως αντικείμενα της περαιτέρω ερευνάς μας είναι τα συνεχή. Με τη λέξη *συνεχές* εννοούμε ένα μη κενό σύνολο το οποίο είναι συνεκτικό και συμπαγές.

Παραπάνω, δείξαμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα, το τετράγωνο και ο κύβος είναι συνεκτικά συμπαγή σύνολα. Επομένως είναι συνεχή. Από τα Θεωρήματα 2 και 3 της προηγούμενης παραγράφου έπεται άμεσα ότι η συνεχής εικόνα ενός συνεχούς είναι πάλι ένα συνεχές. Άρα, η ιδιότητα ενός συνόλου να είναι συνεχές διατηρείται υπό τις συνεχείς απεικονίσεις. Αυτή η ιδιότητα επιτρέπει να δειχθεί ότι σύνολα όπως η περιφέρεια κύκλου, το τόξο της έλλειψης, ο λημνίσκος κ.α. είναι συνεχή, διότι καθένα από αυτά μπορεί να ληφθεί ως συνεχής εικόνα μιας τεθλασμένης γραμμής, που αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος τμημάτων γι' αυτό είναι ένα συνεχές. Γενικώς, συνεχή είναι όλα τα απλά τόξα και οι απλές κλειστές καμπύλες. Θα αποδείξουμε σ' αυτήν την παράγραφο μερικές ιδιότητες των συνεχών στις οποίες θα στηριχθεί στα επόμενα η μελέτη των καμπύλων. Η πιο σημαντική ιδιότητα εξ' αυτών εκφράζεται το ακόλουθο:

Θεώρημα 1. *Η τομή C μιας ακολουθίας από συνεχή*

$$C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset ..... \supset C_n \supset .....$$

καθένα από τα οποία περιέχεται στο προηγούμενο, είναι συνεχές.

Επειδή τα σύνολα C_1, C_2,…, C_n,… είναι συμπαγή και περιέχονται στο C_1 είναι κλειστά ως προς το C_1. Γι' αυτόν τον λόγο η τομή

$$C = C_1 \cap C_2 \cap ..... \cap C_n \cap ....$$

είναι επίσης κλειστό σύνολο. Επομένως, το C είναι συμπαγές. Απομένει να δείξουμε τη συνεκτικότητα του C.

Η απόδειξη της συνεκτικότητας συνόλου C βασίζεται στο επόμενο λήμμα:

Αν το C είναι η τομή μιας φθίνουσας ακολουθίας συμπαγών συνόλων

$$(1) \qquad C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset ..... \supset C_n \supset .....$$

και W ένα ανοιχτό σύνολο το οποίο περιέχει το C , τότε στην ακολουθία (1) μπορούμε να βρούμε ένα συμπαγές σύνολο C_n το οποίο να περιέχεται στο σύνολο W.

Υποθέτουμε το αντίθετο , δηλ. ότι κανένα συμπαγές σύνολο C_n δεν περιέχεται στο W. Τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακολουθία μη κενών συμπαγών συνόλων

$$C_1 - W \supset C_2 - W \supset C_3 - W \supset ..... \supset C_n - W \supset .....,$$

από τα οποία κάθε επόμενο σύνολο περιέχεται στο προηγούμενο του. Επειδή, όλα αυτά τα σύνολα είναι συμπαγή η τομή τους είναι μη κενή (βλ. Θεώρημα. 2, § 2. 4 σελ. 41). Αυτή αποτελείται από σημεία του συνόλου C που δεν ανήκουν στο W. Λόγω του ότι $C \subset W$, δεν υπάρχουν τέτοια σημεία. Από αυτήν την αντίφαση μπορούμε να συμπεράνουμε ότι υπάρχει ένα συμπαγές σύνολο C_n, το οποίο περιέχεται ολόκληρο στο W. Θα συμπεράνουμε, από το μόλις αποδεδειγμένο Λήμμα ότι το C είναι συνεκτικό.

Υποθέτουμε ότι το συμπαγές σύνολο C δεν είναι συνεκτικό. Επομένως, το παριστάνουμε ως ένωση δύο μη κενών, ξένων, κλειστών συνόλων A και B. Από Θεώρημα 5 §. 2.2 , υπάρχουν ανοιχτά σύνολα U και V τα οποία περιέχουν τα A και B, αντίστοιχα και δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

Συμβολίζουμε με W την ένωση των U και V. Λόγω των

$$A \subset U,\ B \subset V, \qquad C = A \cup B, \qquad W = U \cup V$$

έχουμε

$$C \subset W$$

Σύμφωνα με το Λήμμα, υπάρχει ένα συνεχές C_n το οποίο περιέχεται ολόκληρο στο W. Αφού το C έχει σημείο το οποίο περιέχεται τόσο στο U όσο και στο V, πρέπει το σύνολο C_n να περιέχει σημεία του U καθώς και σημεία του V. Συνεπώς, το συνεχές C_n περιέχεται στην ένωση δύο ανοιχτών συνόλων U και V τα οποία είναι ξένα μεταξύ τους και το συνεχές έχει με καθένα από τα U και V κοινά σημεία. Αυτό όμως είναι σύμφωνα με το Θεώρημα 1, **§** 2 . 3, αδύνατο. Η αντίφαση αποδεικνύει πως η υπόθεση μας ότι το σύνολο C δεν είναι συνεκτικό δεν αληθεύει. Επομένως, το C είναι συνεκτικό το θεώρημα έχει αποδειχθεί.

Θα αποδείξουμε τώρα ένα Θεώρημα το οποίο θα χρειαστούμε στην μελέτη των καμπυλών που έχει ωστόσο και καθεαυτό ενδιαφέρον.

Θεώρημα 2. *Εάν G είναι ένα συνεκτικό και τοπικά συνεκτικό ανοιχτό υποσύνολο ενός συμπαγούς συνόλου R, τότε κάθε ζεύγος σημείων a και b μπορεί να συνδεθεί μέσο ενός απλού τόξου το οποίο κείται ολόκληρο στο G.*

Απόδειξη: Κατ' αρχήν αποδεικνύουμε ότι για κάθε θετικό αριθμό ε τα σημεία a και b του G μπορούν να συνδεθούν μέσο μιας πεπερασμένης αλυσίδας συνεκτικών ανοιχτών υποσυνόλων του G

$$(2) \qquad U_1, U_2, \ldots, U_n$$

των οποίων η διάμετρος είναι μικρότερη του ε και τέτοιων ώστε $a \in U_1$, $b \in U_n$

$$(3) \qquad U_i \cap U_{i+1} \neq \varnothing, \qquad U_i \cap U_k = \varnothing \qquad \text{για } |i-k| > 1$$

Πράγματι, λόγω της τοπικής συνεκτικότητας του συνόλου G, κάθε σημείο του x έχει μια συνεκτική περιοχή U(x) με διάμετρο μικρότερη του ε, η οποία περιέχεται στο G . Θα δείξουμε ότι από αυτές τις περιοχές μπορεί να κατασκευαστεί μια αλυσίδα η οποία να συνδέει τα a και b. Ας υποθέσουμε ότι τέτοια αλυσίδα δεν υπάρχει. Συμβολίζουμε με U το σύνολο των σημείων του G τα οποία μπορούν να συνδεθούν με το a μέσο μιας αλυσίδας η οποία αποτελείται από περιοχές U(x). Έχουμε $a \in U$ και $b \in G\text{-}U$. Θα δείξουμε ότι το U είναι ανοιχτό και κλειστό συγχρόνως.

Το U είναι ανοικτό, διότι αν x ανήκει στο U, τότε το U περιέχει την περιοχή U(x) του x. Πράγματι, κάθε σημείο y του U(x) μπορεί να συνδεθεί με το a, μέσο μιας αλυσίδας που αποτελείται από περιοχές που συνδέουν το σημείο a με το σημείο x και το σύνολο U(x).

Το U είναι κλειστό στο G. Αν το x είναι σημείο συσσώρευσης του U, τότε η συνεκτική περιοχή U(x) του x, περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο y του U. Το σημείο y μπορεί να συνδεθεί, μέσο μιας αλυσίδας με το a. Εάν επισυνάψουμε την περιοχή U(x) στην αλυσίδα, τότε παίρνουμε μια αλυσίδα η οποία συνδέει τα σημεία a και x.

Αφού U είναι ανοιχτό και κλειστό είναι επίσης ανοιχτό και κλειστό το συμπλήρωμα του V=G\U. Το V δεν είναι κενό, επειδή ανήκει σ΄ αυτό το b. Κατά συνέπεια το σύνολο G αποτελείται από δύο μη κενά ανοιχτά σύνολα U και V χωρίς κοινά σημεία , πράγμα το οποίο είναι αδύνατο.

Από αυτήν την αντίφαση συμπεραίνουμε ότι υπάρχει μια πεπερασμένη ακολουθία συνεκτικών ανοιχτών συνόλων

$$(4) \qquad U'_1, U'_2, \ldots, U'_s$$

τέτοια ώστε :

$$a \in U'_1, \quad b \in U'_2, \qquad U'_i \cap U'_{i+1} \neq \varnothing$$

Από τα στοιχεία αυτής της ακολουθίας σχηματίζουμε μια αλυσίδα η οποία ικανοποιεί όλες τις συνθήκες (3). Συμβολίζουμε με U_1 το στοιχείο της ακολουθίας (4) το οποίο περιέχει το σημείο a και κατέχει τον μεγαλύτερο δείκτη. Με U_2 συμβολίζουμε εκείνο το στοιχείο της ακολουθίας (4) το οποίο τέμνει το U_1 και σ' αυτήν την ακολουθία έχει τον μεγαλύτερο δείκτη. Με U_3 συμβολίζουμε το στοιχείο της ακολουθίας (4) το οποίο τέμνει το U_2 και έχει τον μεγαλύτερο δείκτη στην ακολουθία (4) κλπ έως ότου για πρώτη φορά φτάσουμε σε ένα στοιχείο στο οποίο ανήκει το σημείο b. Αυτό το συμβολίζουμε με U_n όπου n-1 είναι το πλήθος των προηγουμένων επιλεγμένων στοιχείων. Κατ' αυτόν τον τρόπο παίρνουμε μια αλυσίδα (2) η οποία ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις (3).

Χρησιμοποιούμε αυτό το αποτέλεσμα για την απόδειξη του Θεωρήματός μας. Για τον σκοπό αυτό συνδέουμε τα σημεία a και b μέσω μιας αλυσίδας συνεκτικών ανοιχτών συνόλων με διάμετρο μικρότερη του 1. Έστω ότι αυτά είναι τα σύνολα:

$$(5) \qquad U_1, U_2, \ldots, U_n$$

Τότε είναι:

$$\delta(U_i) < 1,\ a \in U_1, \beta \in U_n,\ U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset, U_i \cap U_k = \emptyset,\ \text{για}\ |i-k| > 1$$

Λόγω του (5) συμβολίζουμε με c_1 κάποιο εκ των σημείων της τομής των U_1 και U_2, με c_2 κάποιο εκ των σημείων της τομής των U_2 και U_3 κλπ. Τελικά με c_{n-1} κάποιο εκ των σημείων της τομής των U_{n-1} και U_n.

Τώρα συνδέουμε το a με το c_1, το σημείο c_1 με το c_2, κλπ και τελικά το c_{n-1} με το b, μέσω μιας αλυσίδας συνεκτικών ανοιχτών συνόλων διαμέτρου μικρότερης του 1/2. Εδώ, απαιτούμε ότι τα σύνολα τα οποία παράγουν την αλυσίδα που συνδέει το a με το c_1 περιέχονται μαζί με τις κλειστότητας τους στο U_1. Όμοια, απαιτούμε τα σύνολα της αλυσίδας που συνδέει τα σημεία c_1 και c_2 να περιέχονται μαζί κλειστότητές τους στο U_2 κλπ, τελικά ότι τα σύνολα της αλυσίδας, που συνδέει το c_{n-1} με το b μαζί, περιέχονται στο U_n με τις κλειστότητες τους.

Από αυτές τις χωριστές αλυσίδες σχηματίζουμε μια αλυσίδα

$$V_1, V_2, \ldots, V_p$$

που συνδέει τα a και b και πληροί τις συνθήκες (3) (πρέπει να παραλείπουμε από τις αλυσίδες τα περιττά στοιχεία, αν υπάρχουν τέτοια). Τώρα συμβολίζουμε με d_1 κάποιο σημείο της τομής των συνόλων V_1 και V_2, με d_2 κάποιο σημείο της τομής των συνόλων V_2 και V_3 κλπ, τελικά με d_{p-1} κάποιο σημείο της τομής των συνόλων V_{p-1}, και V_p. Συνδέουμε το a με το d_1, μέσω μιας αλυσίδας ανοιχτών συνόλων διαμέτρου μικρότερης του 1/3, τα οποία μαζί με τις κλειστότητες τους περιέχονται στο V_1 , τα σημεία d_1 και d_2 συνδέονται μέσω μιας αλυσίδας ανοιχτών συνόλων διαμέτρου μικρότερης του 1/3 , τα οποία μαζί με τις κλειστότητες τους περιέχονται στο V_2 , κλπ τελικά το d_{p-1} συνδέεται με το b μέσω μιας αλυσίδας συνεκτικών ανοιχτών συνόλων διαμέτρου μικρότερης του 1/3 , τα οποία περιέχονται μαζί με τις κλειστότητες τους στο V_p. Από αυτές τις χωριστές αλυσίδες σχηματίζουμε πάλι μια αλυσίδα η οποία συνδέει τα a και b.

Αν συνεχίσουμε αναλόγως, παίρνουμε μια άπειρη ακολουθία αλυσίδων η οποίες συνδέουν τα a και b και αποτελούνται από συνεκτικά ανοιχτά σύνολα και τέτοια ώστε τα στοιχεία της n-ιοστης αλυσίδας έχουν διάμετρο μικρότερη από 1/n και τα μέλη κάθε επόμενης αλυσίδας μαζί με τις κλειστότητες τους περιέχονται στα μέλη της προηγούμενης αλυσίδας.

Συμβολίζουμε την ένωση των συνόλων τα οποία σχηματίζουν την πρώτη αλυσίδα με C_1 την ένωση των μελών της δεύτερης αλυσίδας με C_2 κλπ. Καθένα εκ των συνόλων

$$C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$$

είναι ένα ανοιχτό συνεκτικό σύνολο. Άρα, οι κλειστότητές τους

$$(6) \qquad \overline{C}_1, \overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_n, \ldots$$

είναι συνεχή. Επειδή τα μέλη κάθε επόμενης αλυσίδας μαζί με τις κλειστότητές τους περιέχονται στα μέλη της προηγούμενης αλυσίδας , ισχύει

$$C_{n+1} \subset \overline{C}_{n+1} \subset C_n \subset \overline{C}_n$$

Επομένως, τα σύνολα $\overline{C}_1$, $\overline{C}_2, \ldots, \overline{C}_n, \ldots$ σχηματίζουν μια φθίνουσα ακολουθία συνεχών $_1 \supset \overline{C}_2 \supset \ldots \supset \overline{C}_n \supset \ldots$. Από το Θεώρημα 1, η τομή όλων αυτών των συνεχών είναι επίσης ένα συνεχές το οποίο συμβολίζουμε με C. Αφού κάθε συνεχές της ακολουθίας (6) περιέχει τα σημεία a και b, η τομή τους C περιέχει επίσης αυτά τα σημεία. Τώρα αποδεικνύουμε ότι το συνεχές C είναι ένα απλό τόξο το οποίο συνδέει τα α και b. Για να πεισθούμε γι' αυτό , πρέπει να δείξουμε ότι το συνεχές C μπορεί να μετασχηματισθεί μέσω μιας τοπολογικής απεικόνισης επί του τμήματος T=[0,1]. Χωρίζουμε το T σε n ίσα τμήματα $T_1, T_2, \ldots, T_n$ που ονομάζουμε διαστήματα πρώτης τάξεως και τα αντιστοιχούμε στα σύνολα της πρώτης αλυσίδας. Στη συνέχεια, αναλύουμε κάθε τέτοιο διάστημα πρώτης τάξεως σε τόσα ίσα μέρη όσα είναι τα μέλη της δεύτερης αλυσίδας που περιέχονται στο αντίστοιχο μέλος της πρώτης αλυσίδας. Κατ' αυτόν τον τρόπο λαμβάνουμε μια αλυσίδα από P διαστήματα δεύτερης τάξης

$$S_1, S_2, \ldots, S_p.$$

Αντιστοιχούμε πάλι τα μέλη της δεύτερης αλυσίδας και τα διαστήματα δευτέρας τάξεως. Εάν αναλύσουμε κάθε διάστημα δευτέρας τάξεως σε τόσα μέρη όσα είναι τα μέλη της τρίτης αλυσίδας που περιέχονται στο αντίστοιχο μέλος της δεύτερης αλυσίδας , τότε λαμβάνουμε μια αλυσίδα από q διαστήματα τρίτης τάξεως

$$R_1, R_2, \ldots, R_q$$

κλπ.

Κατ' αυτόν τον τρόπο κατασκευάζονται δύο ακολουθίες από τις αλυσίδες: Οι αλυσίδες της πρώτης ακολουθίας αποτελούνται από συνεκτικά ανοιχτά σύνολα του συμπαγούς R, οι αλυσίδες της δεύτερης ακολουθίας αποτελούνται από διαστήματα που λαμβάνονται μέσω της υποδιαίρεσης του διαστήματος T. Επιπλέον, για κάθε αριθμό φυσικό n υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των μελών της n-οστής αλυσίδας ανοιχτών συνόλων και τα τμήματα της n-οστης αλυσίδας διαστημάτων.

Έστω x ένα τυχαίο σημείο του συνεχούς C. Αυτό ανήκει σε κάποιο ανοιχτό σύνολο U_k της πρώτης αλυσίδας*, κάποιου ανοιχτού συνόλου V_l της δεύτερης αλυσίδας , κάποιου ανοιχτού συνόλου W της τρίτης αλυσίδας κλπ. Κάθε επόμενο σύνολο περιέχεται στο προηγούμενο μαζί με την κλειστότητα του. Καθώς αυξάνει ο αριθμός της αλυσίδας, οι διάμετροι των συνόλων τείνουν στο μηδέν. Τώρα όμως το μέλος U_k, της πρώτης αλυσίδας που περιέχει το σημείο x, αντιστοιχεί σε ένα μονοσήμαντα ορισμένο διάστημα T_k , το μέλος V_l σε ένα διάστημα S_l το οποίο περιέχεται στο T_k, το μέλος W_m στο διάστημα R_m το οποίο περιέχεται στο S_l κλπ. Καθώς αυξάνει ο αριθμός της αλυσίδας ,οι διάμετροι των συνόλων τείνουν στο μηδέν. Κατά συνέπεια όλα αυτά έχουν ένα μοναδικό κοινό σημείο y το οποίο αντιστοιχούμε στο σημείο x του συνεχούς C.

Διαφορετικά σημεία x_1 και x_2 του C αντιστοιχούν σε διαφορετικά σημεία y_1 και y_2 του διαστήματος T. Πράγματι, καθώς αυξάνει ο αριθμός n, οι διάμετροι των μελών της n-οστής αλυσίδας τείνουν προς το μηδέν, μπορεί να βρεθεί ένας αριθμός N ώστε ξεκινώντας από αυτόν τον αριθμό σε όλες τις αλυσίδες τα σημεία x_1 και x_2 να ανήκουν σε διαφορετικά μέλη τα οποία δεν έχουν κοινά σημεία. Τότε δεν έχουν κοινά σημεία τα αντίστοιχα διαστήματα. Άρα τα σημεία y_1 και y_2 του διαστήματος T τα οποία αντιστοιχούν στα σημεία x_1 και x_2 του συνεχούς C είναι διαφορετικά.

Κάθε σημείο y του διαστήματος T αντιστοιχεί σε κάποιο σημείο x του συνεχούς C. Πράγματι, το σημείο y ανήκει σε ένα ορισμένο διάστημα T_k πρώτης τάξεως , ένα ορισμένο διάστημα S_l δευτέρας τάξεως που περιέχεται στο T_k, ένα ορισμένο διάστημα R_m τρίτης τάξεως που περιέχεται στο S_l κλπ. Το διάστημα T_k αντιστοιχεί σε ένα μονοσήμαντα καθορισμένο ανοιχτό σύνολο U_k της πρώτης αλυσίδας, το διάστημα S_l αντιστοιχεί σε ένα ανοιχτό σύνολο V_l της δεύτερης αλυσίδας το οποίο μαζί με την κλειστότητα του περιέχεται στο U_k, το διάστημα R_m αντιστοιχεί στο ανοιχτό σύνολο W_m, το οποίο μαζί με την κλειστότητα του περιέχεται στο V_l κ.τ.λ.

Κατ’ αυτόν τον τρόπο μπορεί κανείς να αντιστοιχίσει την φθίνουσα ακολουθία των διαστημάτων

$$T_k \supset S_l \supset R_m \supset \dots$$

την φθίνουσα ακολουθία των κλειστών συνόλων

$$(7) \qquad \overline{U}_k \supset \overline{V}_l \supset \overline{W}_m \dots$$

* Λόγω του (3) υπάρχουν το πολύ δυο τέτοια σύνολα.

τέτοια ώστε καθώς αυξάνει η τάξη των διαστημάτων, οι διάμετροι των αντίστοιχων κλειστών συνόλων τείνουν στο μηδέν. Συμβολίζουμε με x το μοναδικό κοινό σημείο το οποίο ανήκει σε όλα τα κλειστά σύνολα (7). Αυτό το σημείο ανήκει στο C και αντιστοιχεί στο σημείο y του διαστήματος T. Τοιουτρόπως, έχουμε αποδείξει ότι το συνεχές C απεικονίζεται αμφιμονοσήμαντα επί του διαστήματος T. Απομένει να αποδείξουμε τη συνέχεια αυτής της απεικόνισης.

Έστω x_0 ένα τυχαίο σημείο του C και ε ένας τυχαίος θετικός αριθμός. Συμβολίζουμε με y_0 το σημείο του διαστήματος T, το οποίο αντιστοιχεί στο σημείο x_0 μέσο της απεικόνισης του C επί του T. Επιλεγούμε το n τόσο μεγάλο ώστε τα διαστήματα της n-οστης τάξης που περιέχουν το σημείο y περιέχονται στο διάστημα (y_0 -ε, y_0 +ε). Τότε το σύνολο των σημείων του C τα οποία περιέχονται στην ένωση των ανοιχτών συνόλων που περιέχουν το σημείο x_0, απεικονίζεται στην ε-περιοχή του σημείου y_0, πράγμα το οποίο αποδεικνύει την συνέχεια της θεωρούμενης απεικόνισης.

Η συνέχεια της αντίστροφης απεικόνισης του διαστήματος T επί του συνεχούς C, προκύπτει (από το Θεώρημα 5, **§.** 5) από το ότι η συνεχής απεικόνιση του συνεχούς C επί του T είναι αμφιμονοσημάντη. Συνεπώς, έχουμε αποδείξει ότι το συνεχές C μπορεί να απεικονιστεί τοπολογικά επί του διαστήματος [0,1] , όπου το σημείο α αντιστοιχεί στο 0 και το σημείο β στο 1. Άρα το C είναι ένα απλό τόξο με άκρα τα α και β.

Παρατηρούμε τέλος ότι $C \subset \overline{C}_2 \subset C_1 \subset G$ δηλαδή $C \subset G$ και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του Θεωρήματος 2.

Το επόμενο Θεώρημα είναι μια βοηθητική πρόταση. Η εφαρμογή του διευκολύνει σημαντικά σε πολλές περιπτώσεις την παρουσίαση της θεωρίας των καμπύλων. Θα το χρειαστούμε αργότερα για την απόδειξη άλλων θεωρημάτων (Κεφ. 4, **§.** 3). Το αναφέρουμε εδώ γιατί εκφράζει μια ιδιότητα όλων των συνεχών και όχι μόνο των καμπύλων.

Λέμε ότι το σημείο x *διαχωρίζει*[1] το συνεχές C, εάν το σύνολο $C\setminus\{x\}$ δεν είναι συνεκτικό. Αντίθετα, δηλαδή εάν το σύνολο $C\setminus\{x\}$ είναι συνεκτικό, λέμε ότι το σημείο x δεν αναλύει το συνεχές C .

Θεώρημα 3 : *Σε κάθε συνεχές C (μη τετριμμένο) υπάρχουν τουλάχιστον δύο σημεία τα οποία δεν το διαχωρίζουν (αποσυνθέτουν).*

[1] Από κάποιους έχει μεταφραστεί και αποσυνθέτει, π.χ. αποσύνθεσιμα συνεχή

Απόδειξη : Έστω a ένα τυχόν σημείο του συνεχούς C. Δεν υποθέτουμε τίποτα για το αν το a διαχωρίζει το συνεχές ή όχι. Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα σημείο b το οποίο διαφέρει από το σημείο a και δεν διαχωρίζει το συνεχές C. Έστω A ένα αριθμήσιμο πυκνό σύνολο στο C το οποίο δεν περιέχει το a **. Εάν κάποιο σημείο b το οποίο ανήκει στο σύνολο A δεν διαχωρίζει το συνεχές C, τότε ο ισχυρισμός αποδείχθηκε.

Ας υποθέσουμε ότι κάθε σημείο από το A διαχωρίζει το C. Εάν αριθμήσουμε όλα τα σημεία του A παίρνουμε την ακολουθία

$$(8) \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

Το σημείο α_1 διαχωρίζει το συνεχές C σε δύο σύνολα τα οποία είναι ανοικτά στο C και έχουν συνοριακό σημείο α_1. Με A_1 συμβολίζουμε εκείνο από τα δυο ανοικτών συνόλων, το οποίο δεν περιέχει το σημείο a.

Έστω περαιτέρω α_{i_2} *** το πρώτο σημείο της ακολουθίας (8) που περιέχεται στο A_1. Το σημείο α διαχωρίζει το C σε δύο ανοικτά σύνολα. Συμβολίζουμε με A_2 εκείνο που δεν περιέχει το σημείο α_1. Το α_{i_2} είναι συνοριακό σημείο του συνόλου A_2. Ομοίως, έστω α το πρώτο σημείο της ακολουθίας μας (8) που ανήκει στο A_2. Αυτό διαχωρίζει το C σε δύο ανοιχτά υποσύνολα. Εκείνο από αυτά το οποίο δεν περιέχει το α , ονομάζουμε A_3. Συνεχίζοντας έτσι παίρνουμε μια ακολουθία ανοιχτών συνόλων

$$(9) \qquad A_1, A_2, A_3, \ldots$$

και μια ακολουθία σημείων

$$(10) \qquad \alpha_1 = \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \alpha_{i_3}, \ldots$$

Το σύνορο καθενός εκ των συνόλων A_n αποτελείται μόνο από το σημείο α_{i_n}.

Επισυνάπτοντας στο σύνολο A_n το μοναδικό συνοριακό σημείο α_{i_n}, λαμβάνουμε το σύνολο $\overline{A}_n = A_n \cup \alpha_{i_n}$ που είναι συνεχές. Πράγματι, το σύνολο A_n , ως κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς C είναι συμπαγές. Απομένει να αποδείξουμε ότι το $_n$ είναι συνεκτικό. Υποθέτουμε με εις άτοπον απαγωγή ότι P και Q είναι δύο μη κενά, κλειστά σύνολα χωρίς κοινά σημεία των οποίων η ένωση είναι $_n$. Έστω ότι το σημείο α_{i_n} ανήκει στο σύνολο Q. Τότε είναι

$$P \subset A_n.$$

** Τέτοιο σύνολο υπάρχει βάσει του Θεωρήματος 4 της §. 2. 4

*** $\alpha_{i_1} = \alpha_1$

Αφού καθένα εκ των συνόλων $C \backslash A_n$ και Q είναι κλειστό, είναι επίσης κλειστή και η ένωση $(C \backslash A_n) \cup Q$. Τοιουτρόπως, παίρνουμε μια παράσταση του C, ως ένωση μη κενών κλειστών συνόλων P και $(C \backslash A_n) \cup Q$ χωρίς κοινά σημεία, το οποίο είναι αδύνατο. Από αυτό έπεται $\overline{A}_n$ είναι συνεκτικό.

Ως συμπαγές και συνεκτικό σύνολο, το σύνολο $\overline{A}_n$ είναι συνεχές. Θεωρούμε την ακολουθία των συνεχών

$$\overline{A}_1,\ \overline{A}_2,\ \dots\ \overline{A}_n, \dots$$

και δείχνουμε ότι κάθε μέλος περιέχεται στο προηγούμενο:

$$\overline{A}_{n+1} \subset \overline{A}_n$$

Πράγματι, σύμφωνα με την προϋπόθεση το σημείο α_{i_n} διαχωρίζει το συνεχές C σε δύο ανοιχτά σύνολα A_n και B_n. Επειδή το σύνολο $\overline{A}_{n+1}$ δεν περιέχει το σημείο α_{i_n} περιέχεται στην ένωση των συνόλων A_n και B_n. Το σύνολο $\overline{A}_{n+1}$, ως συνεκτικό μπορεί να έχει κοινά σημεία μόνο με ένα εκ' των συνόλων A_n και B_n. Άρα, επειδή $\alpha_{i_{n+1}} \in A_n$, έχουμε ότι

$$\overline{A}_{n+1} \subset A_n \subset \overline{A}_n$$

Δηλαδή έχουμε μια ακολουθία

$$\overline{A}_1 \supset \overline{A}_2 \supset \dots . \supset \overline{A}_n \supset \dots .$$

συνεχών, καθένα εκ των οποίων περιέχεται στο προηγούμενο του.

Από το Θεώρημα 1 η τομή όλων αυτών των συνεχών είναι επίσης ένα συνεχές το οποίο συμβολίζουμε με K. Λόγω του ότι

$$\overline{A}_{n+1} \subset A_n$$

μπορεί κανείς να θεωρήσει το συνεχές K ως τομή των ανοιχτών συνόλων (9).

Έστω b τυχαίο σημείο[+] του K. Επειδή κανένα εκ των σημείων α_{i_m} (m= 1,2, ... , n) δεν ανήκει στο συνεχές $\quad_{n+1}$, το b δεν συμπίπτει με κανένα εκ' των σημείων α_{i_m}. Θα δείξουμε τώρα ότι το b δεν διαχωρίζει συνεχές C. Υποθέτουμε το αντίθετο , δηλαδή ότι το σύνολο $C \backslash \{b\}$ είναι η ένωση δύο ανοιχτών συνόλων G και H χωρίς κοινά σημεία. Αφού το b δεν συμπίπτει με κανένα από τα σημεία α_{i_n} της ακολουθίας (10), καθένα από τα σημεία της ακολουθίας αυτής ανήκει σε ένα από τα σύνολα G ή H. Ας υποθέσουμε ότι ένα ορισμένο σημείο α_{i_m} της ακολουθίας (10) ανήκει στο σύνολο H και αποδεικνύουμε ότι σ' αυτήν την

[+] Επειδή το K είναι τομή των ανοικτών συνόλων (9), έπεται ότι περιέχεται σε καθένα απ' αυτά τα σύνολα. Ειδικά $K \subset A_1$. Το σημείο a δεν ανήκει στο A_1, συνεπώς είναι διαφορετικό από το b, (σημ. Μετ.)

περίπτωση το σύνολο $\overline{G}$=G $\cup$ {b} περιέχεται στο σύνολο A_m, της ακολουθίας (9) το οποίο αντιστοιχεί στο σημείο α .

Παρατηρούμε ότι το σύνολο

$$\overline{G}=G \cup \{b\}$$

είναι ένα συνεχές. Αυτό αποδεικνύεται όπως και το γεγονός ότι καθένα εκ' των συνόλων

$$\overline{A}_n=A_n \cup \{\alpha_{i_n}\}$$

της ακολουθίας (9) είναι ένα συνεχές.

Το σύνολο $\overline{G}$ δεν περιέχει το σημείο α_{i_m} και έχει με το σύνολο A_m κοινό σημείο b. Επομένως, το περιέχεται στο A_m διότι αυτό ως συνεκτικό σύνολο δεν μπορεί να έχει κοινά σημεία και με δύο ξένα ανοιχτά σύνολα A και B_m στην ένωση των οποίων περιέχεται. Αποδεικνύουμε τώρα ότι το $\overline{G}$ περιέχεται σε καθένα εκ των συνόλων A_n της ακολουθίας (9). Προς τούτο πρέπει κανείς να δείξει ότι, όλα τα σημεία του (10) ανήκουν σ' αυτό το σύνολο. Υποθέσαμε ότι ένα σημείο α είναι τέτοιο. Υποθέτουμε αντίθετα προς τον ισχυρισμό, ότι κάποιο α_{i_p} ακολουθίας (10) ανήκει στο G. Τότε μπορούμε να αποδείξουμε (όπως δείξαμε πιο πάνω) ότι το σύνολο

$$\overline{H}=H \cup \{b\}$$

περιέχεται στο σύνολο Ap, της ακολουθίας (9) το οποίο αντιστοιχεί στο σημείο α_{i_p}. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορεί κανείς να υποθέσει ότι ρ > m. Επειδή, όπως ήδη αποδείξαμε , ισχύει

$$A_p \subset A_m,$$

από τη σχέση

$$\overline{H} \subset A_p$$

έπεται ότι ισχύει

$$\overline{H} \subset A_m$$

Επομένως είναι

$$\overline{G} \subset A_m, \quad \overline{H} \subset A_m$$

από όπου λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\overline{G} \cup \overline{H}=C,$$

έχουμε ότι ισχύει

$$C \subset A_m,$$

το οποίο αποτελεί αντίφαση, διότι το A_m δεν περιέχει π.χ. το σημείο a.

Από αυτήν την αντίφαση μπορούμε να συμπεράνουμε: όλα τα σημεία της ακολουθίας (10) ανήκουν το σύνολο H. Από τούτο έπεται όμως, ότι το σύνολο $\overline{G}$, άρα και το σύνολο G, περιέχεται σε καθένα εκ των συνόλων A_n της ακολουθίας (9). Απ' αυτό προκύπτει ότι το G περιέχεται στο συνεχές K δηλ. στην τομή όλων των συνόλων A_n της ακολουθίας (9).

Επειδή, το σύνολο G είναι ανοικτό και το A είναι πυκνό στο C, έπεται ότι υπάρχει ένα σημείο α_k της ακολουθίας (8), το οποίο ανήκει στο σύνολο G. Επιλέγουμε από την ακολουθία (10) ένα τέτοιο σημείο α_{i_n} του οποίου ο δείκτης είναι μεγαλύτερος από το δείκτη του σημείου α_k. Άρα έχουμε

$$\alpha_k \in G \subset K \subset A_{n-1},$$

και συνεπώς

$$\alpha_k \in A_{n-1}.$$

Σύμφωνα με τον ορισμό του, το σημείο α_{i_n} είναι το πρώτο της ακολουθίας (8) που ανήκει στο A_{n-1}. Βρήκαμε όμως ένα σημείο α_k της ακολουθίας (8) του οποίου ο δείκτης k είναι μικρότερος από το i_n και που ανήκει στο A_{n-1}. Από αυτήν την αντίφαση έπεται αναγκαστικά ότι το b δεν διαχωρίζει το συνεχές C.

Βρήκαμε λοιπόν ένα σημείο b στο συνεχές C που δεν αποσυνθέτει το C. Για να αποδείξουμε ότι υπάρχει ένα περαιτέρω σημείο που δεν αποσυνθέτει το C, μπορεί κανείς να επαναλάβει κυριολεκτικά όλους αυτούς τους συλλογισμούς, μόνο που ξεκινά κανείς όχι από ένα τυχαίο σημείο a αλλά από το σημείο b και αντικαθιστά όλους τους συλλογισμούς το a με το b, για το οποίο είναι γνωστό ότι δεν αποσυνθέτει το C. Με αυτό αποδείχθηκε το Θεώρημα 3.

Ένα παράδειγμα συνεχούς το οποίο έχει ακριβώς δύο σημεία και δεν το αποσυνθέτουν είναι το ευθύγραμμο τμήμα. Αυτά τα σημεία είναι τα άκρα του. Κάθε εσωτερικό σημείο αποσυνθέτει σε δύο τμήματα με αυτό το σημείο ως κοινό άκρο.

Ένα παράδειγμα συνεχούς, το όποιο δεν διαχωρίζεται από κανένα εκ των σημείων του είναι η περιφέρεια του κύκλου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III
ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΚΑΤΑ CANTOR

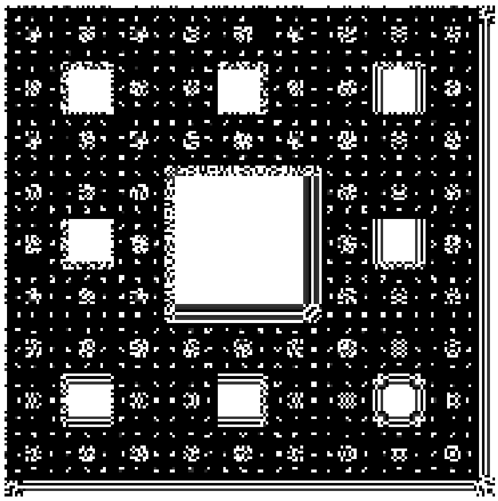
Σ' αυτό το Κεφάλαιο θα μελετήσουμε επίπεδα σύνολα. Το ρόλο του R θα παίξει το επίπεδο. Από εδώ και πέρα ως ανοικτά και κλειστά σύνολα θεωρούμε πάντα ανοικτά και κλειστά υποσύνολα του επιπέδου.

Ο G. Cantor όρισε την καμπύλη (στο επίπεδο) ως ένα συνεχές, δηλαδή συμπαγές και συνεκτικό σύνολο, που για κάθε σημείο του υπάρχουν οσοδήποτε κοντά του σημεία του επιπέδου, τα οποία δεν ανήκουν στο συνεχές. Με άλλα λόγια, *καμπύλη κατά Cantor,* λέμε ένα συνεχές C με την ακόλουθη ιδιότητα: Αν θεωρήσουμε οποιοδήποτε σημείο x του συνεχούς C και ένα θετικό αριθμό ε, τότε υπάρχει πάντα ένα σημείο y του επιπέδου, το οποίο δεν ανήκει στο συνεχές C και το οποίο απέχει από το x απόσταση μικρότερη από το ε. Από τον ορισμό αυτό συμπεραίνουμε άμεσα ότι ένα συνεχές C είναι καμπύλη κατά Cantor αν και μονό αν δεν περιέχει κανένα ανοικτό υποσύνολο. Όλες οι επίπεδες καμπύλες (ευθείες, κύκλοι, κ.λ.π.) που μελετήσαμε ως τώρα ικανοποιούν τον ορισμό αυτόν. Όμως συνεχή όπως το τρίγωνο, ο κυκλικός δίσκος, το τετράγωνο (το περίγραμμα με τα εσωτερικά και τα συνοριακά σημεία) δεν αποτελούν καμπύλες με τον ορισμό του Cantor εφόσον το καθένα περιέχει μια αρκετά μικρή σφαιρική περιοχή (τα εσωτερικά σημεία ενός κύκλου).

Θα δώσουμε ένα αξιοσημείωτο παράδειγμα μιας καμπύλης Cantor η οποία κατασκευάστηκε από τον γνωστό Πολωνό μαθηματικό W. Sierpinski και η οποία αργότερα ονομάστηκε «χαλί του Sierpinski». Διαμερίζουμε ένα τετράγωνο Q σε εννέα ίσα τετράγωνα και αφαιρούμε από το μεσαίο τα εσωτερικά του σημεία. Διαμερίζουμε και πάλι το καθένα από τα οκτώ που εναπομένουν τετράγωνα πρώτης τάξης σε εννέα ίσα τετράγωνα και αφαιρούμε από το κάθε μεσαίο τετράγωνο τα εσωτερικά του σημεία. Παίρνουμε έτσι $8 \cdot 8 = 64$ τετράγωνα δεύτερης τάξης. Σε καθένα από αυτά επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία και παίρνουμε $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ τετράγωνα τρίτης τάξης, κ. ο. κ. για κάθε φυσικό αριθμό n (Σχήμα 8). Μετά το πέρας της κατασκευής μένει ένα σύνολο S΄, το χαλί του Sierpinski. Το σύνολο αυτό είναι μια καμπύλη σύμφωνα με τον ορισμό του Cantor. Κατ' αρχάς το S΄ είναι συνεχές, αφού προκύπτει ως τομή μιας ακολουθίας συνεχών. Το πρώτο συνεχές αποτελείται από τα 8 τετράγωνα πρώτης τάξης, το δεύτερο από τα 64 τετράγωνα δεύτερης τάξης κ.λ.π. Στην ακολουθία αυτή κάθε συνεχές περιέχεται στα προηγούμενα του[1]. Ακόμα, σε οποιαδήποτε περιοχή κάθε σημείου του S΄ μπορούμε να βρούμε ένα σημείο το

[1] Βλέπε Κεφάλαιο II, §. 6, Πρόταση 1.

οποίο δεν ανήκει στο συνεχές. Πραγματικά, αν θεωρήσουμε ένα σημείο x του S΄ και έναν θετικό αριθμό ε, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός n, ώστε η διαγώνιος του τετραγώνου Q^n τάξης n να είναι μικρότερη από ε. Τότε στην ε-περιοχή του σημείου x βρίσκονται τα σημεία των γειτονικών στο Q^n τετραγώνων που παραλείπονται. Τα σημεία αυτά δεν ανήκουν στο S'. Άρα, το χαλί του Sierpinski είναι πράγματι μια καμπύλη κατά Cantor.



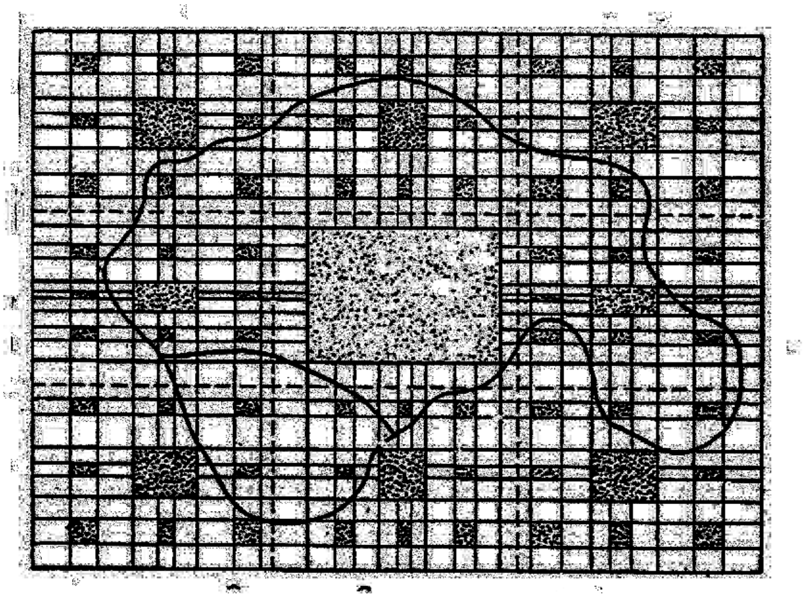
Σχήμα 8

Η καμπύλη αυτή έχει μια αξιοσημείωτη ιδιότητα. Κάθε επίπεδη καμπύλη περιέχεται σ' αυτήν. Ισχύει δηλαδή το ακόλουθο:

Θεώρημα: *Για κάθε καμπύλη κατά Cantor C, υπάρχει ένα υποσύνολο C' του χαλιού του Sierpinski το οποίο είναι ομοιομορφικό με το σύνολο C.*

Απόδειξη: Εφόσον το C είναι συνεχές, είναι κλειστό και φραγμένο. Άρα υπάρχει ένα ορθογώνιο R, το οποίο περιέχει το C. Διαμερίζουμε το R σε εννέα ίσα ορθογώνια, μέσω ευθειών παραλλήλων προς τις πλευρές του (στο Σχήμα 9 οι ευθείες αυτές έχουν σχεδιαστεί διακεκομμένες). Η C, ως καμπύλη Cantor δεν περιέχει, κανένα ανοικτό υποσύνολο. Άρα δεν μπορεί το ολόκληρο το μεσαίο ορθογώνιο να είναι υποσύνολο της. Εφόσον το C είναι κλειστό, στο εσωτερικό του ορθογώνιου R περιέχεται ένα ορθογώνιο R_0 του οποίου οι πλευρές είναι παράλληλες με τις πλευρές του E και το οποίο δεν περιέχει κανένα σημείο του C. Προεκτείνουμε τις πλευρές του R_0 ως την τομή τους με τις πλευρές του αρχικού ορθογώνιου R. Έτσι διαμερίζεται το ορθογώνιο R σε εννέα όχι κατά ανάγκη ορθογώνια. Αφαιρούμε από το R τα εσωτερικά σημεία του R_0. Το εναπομείναν σύνολο αποτελείται από οκτώ ορθογώνια, τα οποία καλούμε ορθογώνια πρώτης τάξης, τα αριθμούμε κατά την θετική φορά αρχίζοντας από την κάτω αριστερή γωνία του παραλληλογράμμου και τα συμβολίζουμε R_1^1, R_2^1, R_3^1,..., R_8^1. Το σύνολο των σημείων που ανήκουν στα ορθογώνια πρώτης τάξης το συμβολίζουμε με S_1.

Για να κατασκευάσουμε τα ορθογώνια δεύτερης τάξης δουλεύουμε κατά τον ακόλουθο τρόπο: Διαιρούμε καθένα από τα ορθογώνια πρώτης τάξης σε εννέα ίσα ορθογώνια. Θεωρούμε π.χ. το ορθογώνιο R_1^1. Στο εσωτερικό του μεσαίου ορθογώνιου, το οποίο προέκυψε από τη διαμέριση του R_1^1, υπάρχει, όπως προηγουμένως, ένα ορθογώνιο P_{10}^1, στο εσωτερικό του οποίου δεν περιέχεται κανένα σημείο της καμπύλης C. Προεκτείνουμε τις πλευρές του μέχρι την τομή τους με τις πλευρές του αρχικού ορθογώνιου. Στο μεσαίο ορθογώνιο, που προέκυψε από την διαμερίση του R_2^1, μπορούμε όμοια να βρούμε ένα ορθογώνιο P_{20}^1 , το οποίο βρίσκεται ολόκληρο στην λωρίδα που δημιουργούν οι προεκτάσεις των πλευρών του προηγουμένως κατασκευασθέντος ορθογώνιου P_{10}^1 και το οποίο δεν περιέχει κανένα σημείο της καμπύλης C. Επεκτείνουμε τις πλευρές του ορθογώνιου P_{20}^1 ως την τομή τους με τις πλευρές του αρχικού παραλληλογράμμου. Όμοια βρίσκουμε στο ορθογώνιο R_3^1 ένα ορθογώνιο P_{30}^1, που δεν περιέχει κανένα σημείο της καμπύλης C και αποτελείται από τα σημεία του μεσαίου ορθογώνιου, το οποίο προέκυψε από τη διαμέριση του ορθογώνιου R_3^1 και τα οποία περικλείονται στις λωρίδες που δημιουργούν οι επεκτάσεις των πλευρών των P_{10}^1 και P_{20}^1. Κατά τον ίδιο τρόπο παίρνουμε τα ορθογώνια P_{40}^1, P_{50}^1, P_{60}^1, P_{70}^1, P_{80}^1.



Σχήμα 9

Συμβολίζουμε με $R_{k_0}^{\ 1}$ (k=1,2,..,8) το ορθογώνιο το οποίο περιέχεται στο $P_{k_0}^{\ 1}$ και αποτελείται από τα εσωτερικά σημεία της τομής των κατακόρυφων και οριζόντιων λωρίδων, οι οποίες δημιουργούνται από την επέκταση των πλευρών των ορθογωνίων P και τέμνουν το $R_k^{\ 1}$. Έχουμε έτσι μια διαμέριση του αρχικού ορθογώνιου μέσο των προεκτάσεων των πλευρών του ορθογωνίου $R_{k_0}^{\ 1}$. Αφαιρώντας από κάθε ορθογώνιο $R_k^{\ 1}$ πρώτης τάξης τα εσωτερικά σημεία τα οποία ανήκουν στο ορθογώνιο $R_{k_0}^{\ 1}$, μένει από κάθε ορθογώνιο πρώτης τάξης ένα σύνολο το οποίο αποτελείται από οκτώ ορθογώνια. Τα καλούμε ορθογώνια δεύτερης τάξης. Τα αριθμούμε κατά την θετική φορά αρχίζοντας από το κάτω αριστερά ορθογώνιο και τα συμβολίζουμε με $R_{k_1}^{\ 2}$, $R_{k_2}^{\ 2}$, ..., $R_{k_8}^{\ 2}$. Το σύνολο των σημείων που ανήκουν στα 64 ορθογώνια δεύτερης τάξης το συμβολίζουμε με S_2. Με καθένα από τα ορθογώνια R_{k_1} (k, 1 = 1,2,... 8) δεύτερης τάξης ακολουθούμε την ίδια διαδικασία που ακολουθήσαμε για τα ορθογώνια πρώτης τάξης, Έτσι, παίρνουμε $8\cdot8\cdot8 = 512$ ορθογώνια R_{klm} (k, l, m = 1,2,..., 8) τρίτης τάξης. Το σύνολο των σημείων τους το συμβολίζουμε με S_3.

Συνεχίζοντας κατά τον ίδιο τρόπο, παίρνουμε μία ακολουθία συνεχών $S_1 \supset S_2 \supset ... \supset S_\nu \supset ...$, όπου το καθένα περιέχεται στο προηγούμενο. Σύμφωνα με Θεώρημα 1 στο Κεφαλαίο II, η τομή όλων αυτών των συνεχών αποτελεί συνεχές το οποίο συμβολίζουμε με S. Η καμπύλη C περιέχεται στο S. Θα δείξουμε ότι το S είναι ομοιόμορφο με το χαλί του Sierpinski. Έστω x οποιοδήποτε σημείο του S. Από τον ορισμό του S, το x ανήκει στο σύνολο S_1 και άρα σε κάποιο ορθογώνιο R_k^1 πρώτης τάξης, στο σύνολο S_2 και άρα σε κάποιο ορθογώνιο R_{kl}^2 δεύτερης τάξης, το οποίο περιέχεται στο ορθογώνιο R_k^1 στο σύνολο S_3 και άρα σε κάποιο ορθογώνιο R_{klm}^3 τρίτης τάξης, το οποίο περιέχεται στο R_{kl}^2 κλπ. Έτσι παίρνουμε μία φθίνουσα ακολουθία ορθογωνίων $R_k^1 \supset R_{kl}^2 \supset R_{klm}^3 \supset ....$. Αντιστοιχούμε τώρα το ορθογώνιο R_k^1 στο τετράγωνο Q_k^1 πρώτης τάξης, το οποίο παρουσιάζεται στην κατασκευή του χαλιού του Sierpinski κι έχει την ίδια θέση στο αρχικό τετράγωνο Q που έχει το ορθογώνιο R_k^1 στο R (βλ. Σχήματα 8 και 9). Επίσης, αντιστοιχούμε το ορθογώνιο R_{kl}^2 δεύτερης τάξης με το τετράγωνο $Q_{kl}^2 \subset Q_k^1$ δεύτερης τάξης το οποίο έχει την ίδια θέση στο Q_k^1 που έχει το R_{kl}^2 στο R_k^1 κλπ. Έτσι αντιστοιχούμε την άπειρη φθίνουσα ακολουθία ορθογωνίων:

$$R^1 \supset R^2 \supset .... \supset R^n \supset .....$$

στην άπειρη φθίνουσα ακολουθία τετραγώνων:

$$Q^1 \supset Q^2 \supset ... \supset Q^n \supset ...$$

Εφόσον το μήκος της πλευράς του τετραγώνου n-οστής τάξης είναι $\left(\frac{a}{3}\right)^n$, (όπου α είναι το μήκος της πλευράς του τετραγώνου Q) η τομή των τετραγώνων

$$Q^1 \cap Q^2 \cap ... \cap Q^n \cap ....$$

είναι μη κενή και αποτελείται από ένα μοναδικό σημείο (από Θεώρημα 2, §4, Κεφάλαιο ΙΙ). Το σημείο αυτό το ονομάζουμε x'. Το σημείο αυτό x' αντιστοιχούμε με το σημείο x του συνεχούς S. Έτσι δείξαμε ότι κάθε σημείο x του συνεχούς S αντιστοιχεί σ' ένα μοναδικό σημείο x' του χαλιού του Sierpinski S΄.

Θα δείξουμε ότι διαφορετικά σημεία του S αντιστοιχούν σε διαφορετικά σημεία του S΄. Έστω x, y δύο σημεία του S. Αυξανομένων των αριθμών τάξης τα μήκη των πλευρών των ορθογωνίων, άρα και τα μήκη των διαγωνίων τους, τείνουν στο μηδέν, εφόσον μια πλευρά ενός ορθογώνιου είναι μικρότερη από τα 2/3 της αντίστοιχης πλευράς του ορθογώνιου προηγούμενης τάξης που το περιέχει. Άρα, όπως κι αν επιλέγουν τα σημεία x και y του S, υπάρχει αρκετά μεγάλος αριθμός n, ώστε να υπάρχουν δύο ορθογώνια n-οστής τάξης, τα οποία περιέχουν τα σημεία x και y και είναι ξένα μεταξύ τους. Τότε όμως δεν έχουν κανένα κοινό σημείο και τα τετράγωνα που αντιστοιχούν στα ορθογώνια. Άρα τα σημεία x΄και y΄, τα οποία αντιστοιχούν στα σημεία x και y αντίστοιχα, είναι διαφορετικά.

Έχουμε δείξει ότι κάθε σημείο του S αντιστοιχεί σε ένα μοναδικό σημείο του S' και ότι διαφορετικά σημεία του S αντιστοιχούν σε διαφορετικά σημεία του S΄. Με τον ίδιο τρόπο μπορούσαμε να δείξουμε ότι κάθε σημείο του S΄ αντιστοιχεί σ' ένα (μοναδικό) σημείο του S. Άρα, η απεικόνιση που ορίστηκε μεταξύ των S και S΄ είναι αμφιμονοσήμαντη. Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι η απεικόνιση είναι συνεχής και κατά τις δύο κατευθύνσεις. Έστω x_0 ένα οποιοδήποτε σημείο του S, ε ένας θετικός αριθμός και $x_0{}'$ η εικόνα του σημείου x_0 μέσο της απεικόνισης του συνεχούς S στο συνεχές S΄. Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχει ένας θετικός αριθμός δ, ώστε: $\rho\ (x', x_0{}') < \varepsilon$ όταν $\rho\ (x, x_0) < \delta$, όπου x΄είναι η εικόνα του σημείου x.

Επιλέγουμε n τόσο μεγάλο ώστε τα τετράγωνα τάξης n, τα οποία περιέχουν το σημείο $x_0{}'$, περιέχονται στην ε-περιοχή του σημείου αυτού. Θέτουμε ως δ την ακτίνα του κύκλου στο x_0 , ο οποίος περιέχεται στην ένωση των ορθογωνίων n-τάξης, τα οποία περιέχουν το x_0. Τότε για $\rho(x_o, x) < \delta$, ισχύει $\rho(x_o{}', x') < \varepsilon$. Όμοια δείχνουμε την συνέχεια της απεικόνισης από το S' στο S. Άρα τα συνεχή S και S΄είναι ομοιόμορφα. Όμως η καμπύλη C περιέχεται εξολοκλήρου στο S. Μέσω του ομοιομορφισμού του συνεχούς S στο χαλί του Sierpinski S΄, η καμπύλη C απεικονίζεται ομοιομορφικά σε ένα σύνολο C΄, το οποίο περιέχεται στο S'. Έτσι αποδείχθηκε το Θεώρημά μας.

Παρατήρηση: Η ιδιότητα να είναι ένα (επίπεδο) σύνολο καμπύλη Cantor διατηρείται μέσο ενός ομοιομορφισμού. Αυτό σημαίνει ότι *όταν μια καμπύλη Cantor C είναι ομοιομορφική με ένα επίπεδο σύνολο C', τότε το σύνολο C' είναι επίσης μια καμπύλη κατά*

Cantor. Το ότι το σύνολο C΄ είναι μια καμπύλη προκύπτει από το ότι οι ιδιότητες της συνεκτικότητας και της συμπάγειας διατηρούνται όχι μόνο από ομοιομορφισμούς, αλλά και από συνεχείς απεικονίσεις[2]. Δυσκολότερη είναι η απόδειξη του ισχυρισμού ότι η ομοιόμορφη εικόνα C΄ ενός επίπεδου συνόλου C, το οποίο δεν περιέχει κανένα ανοικτό υποσύνολο, δεν περιέχει επίσης κανένα ανοικτό υποσύνολο. Αυτό έπεται από την ακόλουθη πρόταση: Αν το G είναι ένα ανοικτό σύνολο στο επίπεδο και το H ένα επίπεδο σύνολο, ομοιομορφικό με το G, τότε το H είναι επίσης ανοικτό. Την πρόταση αυτή δεν θα αποδείξουμε εδώ[3].

Δεν μπορεί κάθε καμπύλη κατά Cantor να δοθεί σε παραμετρική μορφή

$$x=\varphi(t), \quad y=\psi(t).$$

Ένα παράδειγμα μιας τέτοιας καμπύλης, της οποίας η παραμετρικοποίηση δεν είναι δυνατή, είναι το προαναφερθέν σύνολο, το οποίο αποτελείται από τα σημεία του γραφήματος της τριγωνομετρικής συνάρτησης:

$$y = \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right), \quad 0<x \le 1 \quad \text{και το οριακό τμήμα } x = 0,\ 1 \le y \le 1.$$

Το σύνολο αυτό ως συνεκτικό και συμπαγές, είναι συνεχές. Δεν περιέχει κανένα ανοικτό υποσύνολο, άρα είναι καμπύλη κατά Cantor. Στο προηγούμενο κεφάλαιο (§ 5) αποδείχτηκε ότι η καμπύλη αυτή δεν μπορεί να παρασταθεί ως συνεχής εικόνα ενός κλειστού διαστήματος. Η μη ύπαρξη μιας τέτοιας παράστασης προέκυπτε από το ότι η καμπύλη αυτή δεν είναι τοπικά συνεκτική.

Αποδεικνύεται ότι *ένα συνεχές, και ειδικότερα μια καμπύλη Cantor, είναι συνεχής εικόνα ενός κλειστού διαστήματος αν και μόνο αν είναι τοπικά συνεκτικό*.

Η αναγκαιότητα της συνθήκης αυτής είναι άμεση από Θεώρημα 4, §5, του προηγούμενου Κεφαλαίου, εφόσον ένα κλειστό διάστημα είναι τοπικά συνεκτικό συνεχές και οι ιδιότητες της τοπικής συνεκτικότητας και του συνεχούς διατηρούνται από συνεχείς συναρτήσεις. Το ότι η συνθήκη αυτή είναι ικανή δεν θα αποδειχθεί εδώ. Την απόδειξη μπορεί να την βρει κανείς για παράδειγμα στο βιβλίο του F. Hausdorff, Θεωρία Συνόλων. Η τοπική συνεκτικότητα μπορεί να εκφραστεί κατά αρκετούς διαφορετικούς τρόπους. Αναφέρουμε, χωρίς απόδειξη, την ακόλουθη πρόταση.

Ένα συνεχές είναι τοπικά συνεκτικό αν και μόνο αν για κάθε θετικό ε μπορεί να γραφεί ως πεπερασμένη ένωση συνεχών με διάμετρο μικρότερη του ε.

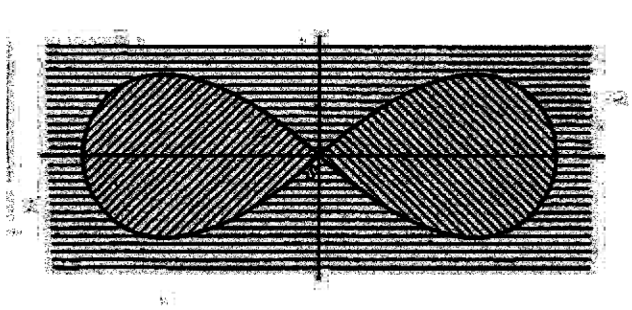
Την ιδιότητα αυτή την έχει το χαλί του Sierpinski. Θεωρούμε μια διαμέριση του χαλιού του Sierpinski σε οσοδήποτε μικρά συνεχή παίρνοντας τετράγωνα αρκετά μεγάλης

---

[2] βλ. Κεφ.ΙΙ, § 5, Θεωρήματα 2 και 3.

τάξης. Το κάθε κομμάτι του χαλιού του Sierpinski το οποίο περιέχεται σε κάθε τέτοιο τετράγωνο αποτελεί επίσης ένα χαλί του Sierpinski. Παίρνοντας την ένωση τέτοιων μερών (το καθένα από τα οποία είναι συνεχές) έχουμε το χαλί του Sierpinski. Εφόσον το χαλί του Sierpinski μπορεί να παρασταθεί κατά τέτοιο τρόπο, είναι τοπικά συνεκτικό σύνολο, και άρα μπορεί να παρασταθεί ως συνεχής εικόνα ενός κλειστού διαστήματος. Άρα, μπορεί να τεθεί σε παραμετρική μορφή. Επομένως, το χαλί του Sierpinski που είναι καμπύλη κατά Cantor, είναι επίσης καμπύλη σύμφωνα με τον ορισμό του Jordan. Λόγω της ευρύτητας του ορισμού οι καμπύλες κατά Cantor μπορούν να είναι ιδιαίτερα περίπλοκες. Θα ασχοληθούμε με το ζήτημα μελετώντας τα σύνορα των ανοικτών, συνεκτικών συνόλων του επιπέδου.

Όπως γνωρίζουμε ήδη από την στοιχειώδη Γεωμετρία, η περιφέρεια ενός κύκλου διαμερίζει το επίπεδο σε δύο ανοικτά, συνεκτικά σύνολα (το εσωτερικό και το εξωτερικό), των οποίων αποτελεί το κοινό σύνορο. Συμβαίνει ότι εκτός από τον κύκλο και κάθε καμπύλη ομοιόμορφη προς αυτόν έχει την ιδιότητα να διαμερίζει το επίπεδο σε δύο ανοικτά, συνεκτικά σύνολα. Η ιδιότητα αυτή αποτελεί το περιεχόμενο του διάσημου Θεωρήματος του Jordan, η οποία παρότι φαίνεται προφανής είναι αρκετά δύσκολη να αποδειχτεί. Ο λημνίσκος του Bernoulli διαμερίζει το επίπεδο σε τρία ανοικτά, συνεκτικά σύνολα και το διπλό σημείο S της καμπύλης αυτής ανήκει στο σύνορο και των τριών αυτών συνόλων (Σχήμα 10). Όμως όλα τα υπόλοιπα σημεία του λημνίσκου αποτελούν συνοριακά σημεία μόνο δύο συνόλων. Εκ πρώτης όψεως φαίνεται ότι το κοινό σύνορο περισσότερων από δύο ανοικτών, συνεκτικών συνόλων θα μπορούσε να αποτελείται το πολύ από απλά σημεία μιας καμπύλης.



Σχήμα 10

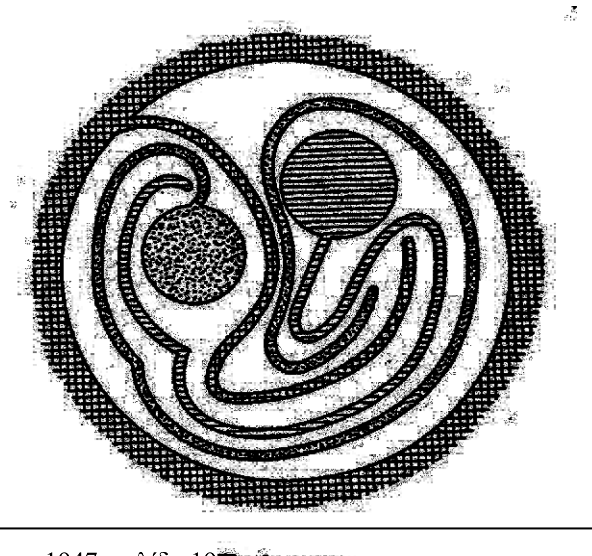
Στην πραγματικότητα δύσκολα μπορεί κανείς να παραστήσει σε έναν χάρτη τρία ή περισσότερα κράτη να περικλείονται ταυτόχρονα από μια τέτοια καμπύλη. Παρόλα αυτά υπάρχουν τέτοιες καμπύλες, οι οποίες αποτελούν το σύνορο τριών ή περισσότερων ανοικτών, συνεκτικών συνόλων.

---

[3] Την απόδειξη για χώρους οποιασδήποτε διάστασης μπορεί κανείς να την βρεί π.χ. στο P.S.Alexandroff

Δηλαδή, σε κάθε περιοχή κάθε σημείου μιας τέτοιας καμπύλης περιέχονται σημεία όλων των συνόλων.

Για να γίνει αυτό κατανοητό θεωρούμε ένα νησί στην ανοικτή θάλασσα και μέσα σε αυτό δύο λίμνες. Κατόπιν ακολουθούμε το εξής πρόγραμμα εργασίας. Στην πρώτη ώρα σκάβουμε ένα "τυφλό" κανάλι (δηλαδή μια επέκταση του αντίστοιχου νερού) από την θάλασσα και από κάθε μία από τις δύο λίμνες, ώστε αυτά τα κανάλια να μην εφάπτονται πουθενά και ως αποτέλεσμα της εργασίας η απόσταση κάθε σημείου της στεριάς από το θαλασσινό νερό όπως και από το νερό κάθε λίμνης να είναι μικρότερη από 1 χλμ. Στην επόμενη μισή ώρα προστίθενται στα τρία κανάλια επεκτάσεις τέτοιες ώστε τα κανάλια να παραμείνουν τυφλά, να μην εφάπτονται και η απόσταση κάθε σημείου της στεριάς από το νερό κάθε μιας υδάτινης περιοχής να είναι μικρότερη από 1/2 χλμ. Στο επόμενο τέταρτο συνεχίζονται τα κανάλια κατά τέτοιο τρόπο ώστε να μην τέμνονται μεταξύ τους, όπως και προηγουμένως, και να διασχίζουν με τέτοια πυκνότητα το εσωτερικό του νησιού, ώστε η απόσταση κάθε σημείου της στεριάς από κάθε μία από τις τρεις υδάτινες περιοχές να είναι μικρότερη από 1/4, κ.λ.π. Μετά δύο ώρες απομένει από το νησί ένα συνεχές C για κάθε σημείο του οποίου το νερό και από τα τρία κανάλια βρίσκεται οσοδήποτε κοντά και το οποίο διαχωρίζει τις τρεις υδάτινες περιοχές (την θάλασσα και τις δύο λίμνες), δηλαδή το νερό δύο από αυτές δεν μπορεί να αναμιχθεί. Οι υδάτινες περιοχές (οι οποίες επεκτάθηκαν με τα κανάλια) είναι τα τρία ανοικτά, συνεκτικά σύνολα, των οποίων το συνεχές C αποτελεί το κοινό σύνορο. Ένα από αυτά τα σύνολα (η "θάλασσα") δεν είναι φραγμένο. Τα άλλα δύο είναι φραγμένα (Σχήμα 11)[4].



Σχήμα 11

"Συνδυαστική τοπολογία" Μόσχα 1947, σελίδα 19

[4] Το παράδειγμα αυτό ανήκει στον Ολλανδό μαθηματικό L. E. J. Brouwer παράσταση είναι παρμένη από το πολλές φορές αναφερθέν βιβλίο του P.S. Alexandroff (σελ. 266-277).

Εξετάσαμε τόσο λεπτομερώς τον ορισμό της καμπύλης κατά Cantor, διότι περιορισμένος στις επίπεδες καμπύλες περιλαμβάνει όλα όσα περιέχει η έννοια της καμπύλης στην μαθηματική πράξη. Θέλουμε όμως να δώσουμε ένα γενικότερο ορισμό της καμπύλης, ο οποίος να μην αναφέρεται μόνο σε επίπεδες καμπύλες, αλλά και σε καμπύλες στον χώρο[5].

Μια εύκολη γενίκευση του ορισμού της καμπύλης κατά Cantor για τον χώρο δεν είναι δυνατή, γιατί στον χώρο υπάρχουν συνεχή τα οποία δεν περιέχουν κανένα ανοικτό σύνολο (ανοικτό στον χώρο), τα οποία όμως δεν θεωρούμε καμπύλες, για παράδειγμα το τετράγωνο. Αυτό σημαίνει ότι είναι ακόμα αδύνατον να απαντήσουμε στο ερώτημα τι είναι μία καμπύλη. Θα ασχοληθούμε τώρα με τον ορισμό της καμπύλης κατά Urysohn.

[5] Καθώς επίσης σε καμπύλες σε ευκλείδειους χώρους μεγαλύτερης διάστασης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV
ΓΕΝΙΚΟΣ ΟΡΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

§ 4.1 Ορισμός καμπύλης. Βασικές ιδιότητες

Θα προσπαθήσουμε να εξετάσουμε τις βασικές ιδιότητες των συνόλων εκείνων που ονομάζουμε καμπύλες. Καταρχήν, τα σύνολα αυτά είναι συνεκτικά που σημαίνει ότι αποτελούνται από ένα κομμάτι χωρίς να διασπώνται σε χωριστά κομμάτια. Αρκετές από τις καμπύλες που θα εξετάσουμε στη συνέχεια είναι φραγμένες και κλειστές δηλ. συμπαγή σύνολα[1], όπως το ευθύγραμμο τμήμα, η περιφέρεια, η έλλειψη, ο λημνίσκος του Bernoulli κλπ. Παρακάτω, θα μελετήσουμε μόνο τα συνεκτικά σύνολα που είναι συμπαγή, δηλ. μόνο τα συνεχή[2].

Σύνολα όπως το τετράγωνο, ο κύβος είναι επίσης συνεχή. Γιατί όμως δεν καλούμε και αυτά καμπύλες; Επειδή είναι δι ή τρισδιάστατα. Καμπύλες είναι μόνο τα σύνολα που είναι μονοδιάστατα. Τι σημαίνει "μονοδιάστατο"; Εδώ, δεν θα αναφερθούμε στο γενικό ερώτημα τι είναι η διάσταση, ή όπως λέμε, ποια η διάσταση διαφόρων συνόλων, αλλά θα δώσουμε έναν ακριβή ορισμό ενός συνεχούς, το οποίο είναι μονοδιάστατο (δηλ έχει διάσταση 1). Λέμε ότι, *ένα συνεχές C έχει στο σημείο x διάσταση 1*, όταν υπάρχει μια οσοδήποτε μικρή περιοχή του x, της οποίας το σύνορο δεν περιέχει κανένα συνεχές, που αποτελείται από περισσότερα από ένα σημεία. Με άλλα λόγια, ένα συνεχές C έχει στο σημείο x διάσταση 1, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο διαμέτρου μικρότερης του ε, το οποίο περιέχει το x και του οποίου το σύνορο δεν περιέχει συνεχές που αποτελείται από περισσότερα από ένα σημεία. Ένα συνεχές είναι μονοδιάστατο, όταν σ' όλα του τα σημεία έχει διάσταση 1.

Εδώ μπορούμε να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό: Μια *καμπύλη* είναι μονοδιάστατο συνεχές, που σημαίνει, ένα συνεχές του οποίου κάθε σημείο έχει αρκετά μικρή περιοχή της οποίας το σύνορο δεν περιέχει κανένα συνεχές, που να αποτελείται παραπάνω από ένα σημείο. Αυτός ακριβώς είναι ο ορισμός *καμπύλης κατά Urysohn*. Το απλούστερο παράδειγμα

---

[1] Σύγκρινε Κεφ.ΙΙ.

[2] Παρόλα αυτά, πολλά γεωμετρικά σχήματα που δεν είναι συμπαγή και συνεκτικά αναφέρονται ως καμπύλες. Ειδικά η ευθεία, που δεν είναι συμπαγής. Επίσης και η υπερβολή που δεν είναι ούτε συμπαγής ούτε συνεκτική. Έτσι οι θεωρήσεις μας θα περιορισθούν στις καμπύλες που είναι συνεχή, διότι είναι η σημαντικότερη περίπτωση. Σ' αυτή ανάγεται η γενικότερη μελέτη γεωμετρικών σχημάτων που δεν είναι συνεχή και στην μαθηματική πράξη αναφέρονται ως καμπύλες.

ενός μονοδιάστατου συνεχούς δηλ. μιας καμπύλης κατά Urysohn είναι ένα κλειστό διάστημα. Πραγματικά, κάθε περιοχή οποιουδήποτε σημείου x ενός κλειστού διαστήματος είναι ένα ανοικτό σύνολο, του οποίου το σύνορο αποτελείται από δύο σημεία αν το x είναι εσωτερικό σημείο και αποτελείται από ένα μόνο σημείο όταν το x είναι τελικό σημείο του διαστήματος.

Όμοια, διαπιστώνουμε ότι κι η περιφέρεια κύκλου έχει σε κάθε σημείο του διάσταση 1, που σημαίνει ότι είναι καμπύλη κατά Unysohn. Εδώ, αρκεί πάλι να πάρουμε μια ε-περιοχή οποιουδήποτε σημείου x του κύκλου. Αυτό είναι ένα τόξο (χωρίς τα άκρα του) με μέσο το σημείο x. Αυτή η περιοχή είναι ανοικτό σύνολο, του οποίου το σύνορο αποτελείται από δύο σημεία (τα άκρα του τόξου). Γενικά: Κάθε καμπύλη κατά Cantor είναι καμπύλη κατά Urysohn.

Πριν περάσουμε στην απόδειξη αυτού του ισχυρισμού, θα εξετάσουμε δύο προτάσεις, οι οποίες θα φανούν πολύ χρήσιμες τόσο στην απόδειξη, όσο και για μια σειρά άλλων περιπτώσεων.

Θεώρημα 1: *Εάν ένα συνεχές K είναι υποσύνολο μιας καμπύλης C (κατά Urysohn), τότε το K είναι καμπύλη.*

Απόδειξη: Έστω τυχαίο σημείο x του K και ε τυχαίος θετικός αριθμός. Λόγω του ότι η C είναι καμπύλη, υπάρχει (σχετικά με την C) ανοικτό σύνολο G διαμέτρου μικρότερης του ε, που περιέχει το x και το σύνορο του δεν περιέχει συνεχή με περισσότερα (από ένα) σημεία. Έστω U το σύνολο των σημείων του G που ανήκουν στο K. Το σύνολο U είναι ανοικτό στο K. Περιέχει το σημείο x, η διάμετρος του είναι μικρότερη του ε και το σύνορο της στο K δεν περιέχει συνεχές περισσότερων σημείων, αφού είναι υποσύνολο του συνόρου του ανοικτού συνόλου G. Άρα, το K είναι καμπύλη.

Θεώρημα 2: *Η τοπολογική εικόνα μιας καμπύλης είναι καμπύλη.*

Απόδειξη: Έστω X ένα μονοδιάστατο συνεχές και f τοπολογική απεικόνιση του συνόλου X στο σύνολο Y. Θα δείξουμε ότι και το Y είναι μονοδιάστατο συνεχές. Ότι το Y είναι συνεχές προκύπτει από το ότι σε κάθε συνεχή απεικόνιση διατηρούνται τόσο η συνεκτικότητα όσο και η συμπάγεια. Απομένει να αποδείξουμε ότι αυτό το συνεχές είναι μονοδιάστατο. Έστω y_o, τυχαίο σημείο του Y και ε τυχαίος θετικός αριθμός. Ονομάζουμε x_o την αντίστροφη εικόνα του y_o, και δ έναν θετικό αριθμό, έτσι ώστε από τις σχέσεις

$\rho(x_o, x) < \delta$ και $y = f(x)$, $y_o = f(x_o)$, να συνεπάγεται ότι $\rho(y_o, y) < \varepsilon$.

Αφού X είναι καμπύλη, μπορούμε μέσα στη δ-περιοχή του να βρούμε ένα ανοικτό σύνολο U που περιέχει το x_o και το σύνορο του U να μην περιέχει συνεχή, εκτός από μονοσύνολα. Ονομάζοντας την εικόνα του συνόλου U με V, έχουμε ότι το V είναι ανοικτό στο Y, περιέχει το σημείο y_o, και περιέχεται στην ε-περιοχή του y_o. Θα αποδείξουμε ότι το σύνορο του V δεν περιέχει συνεχές που να αποτελείται από περισσότερα από ένα σημεία. Αφού το V είναι η εικόνα του U μέσο της απεικόνισης f, είναι και το σύνορο του V εικόνα του συνόρου του U. Αν το σύνορο του V περιείχε κάποιο συνεχές K, που θα αποτελούταν από περισσότερα από ένα σημεία, τότε η εικόνα του συνεχούς μέσο της αντίστροφης απεικόνισης της f δηλ. της f^{-1}, είναι ένα συνεχές που αποτελείται από περισσότερα σημεία και θα περιέχεται στο σύνορο του ανοικτού συνόλου U. Αυτό όμως είναι αντίφαση με τον ορισμό του U. Έτσι, συνάγεται ότι το σύνορο του ανοικτού συνόλου δεν περιέχει συνεχές, το οποίο να αποτελείται από περισσότερα από ένα σημεία.

Με αυτό τον τρόπο αποδείξαμε ότι, κάθε σημείο y_o του συνεχούς Y περιέχει μια οσοδήποτε μικρή περιοχή του V, που το σύνορο της δεν περιέχει συνεχές που να αποτελείται από περισσότερα από ένα σημεία. Άρα το Y είναι καμπύλη και αποδείχτηκε Θεώρημα 2.

Μετά από αυτές τις εισαγωγικές παρατηρήσεις, θα περάσουμε στην απόδειξη του παραπάνω ισχυρισμού ότι κάθε καμπύλη του κατά Cantor είναι και καμπύλη κατά Urysohn. Πράγματι, όπως είδαμε στο Κεφάλαιο ΙΙΙ, κάθε καμπύλη C κατά Cantor είναι ομοιόμορφη με ένα υποσύνολο C΄ του χαλιού του Sierpinski S. Αφού το C είναι συνεχές θα είναι και το C΄ συνεχές. Αν αποδείξουμε ότι το χαλί Sierpinski είναι καμπύλη κατά Urysohn, τότε από το Θεώρημα 1 θα συναχθεί ότι και το C΄ είναι καμπύλη του Urysohn. Τότε όμως από το Θεώρημα 2 και το C΄ είναι καμπύλη (κατά Urysohn). Έτσι λοιπόν, αρκεί να δείξουμε ότι *το χαλί του Sierpinski είναι καμπύλη κατά Urysohn.*

Είδαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο, ότι το χαλί S του Sierpinski είναι συνεχές. Πρέπει όμως να αποδειχθεί ότι για κάθε σημείο m_o του συνεχούς S υπάρχει μια ανοικτή περιοχή, στην οποία ανήκει το σημείο m_o και το σύνορο της δεν περιέχει συνεχές που να αποτελείται από περισσότερα από ένα σημεία. Ονομάζουμε x_o και y_o, τις συντεταγμένες του σημείου m_o, σ' ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, του οποίου οι άξονες περνούν από δύο γειτονικές πλευρές του τετραγώνου Q, από το οποίο κατασκευάστηκε το χαλί S του Sierpinski. Θέτουμε το μήκος των πλευρών του τετραγώνου ίσο με 1. Έστω ε τυχαίος θετικός αριθμός. Επιλέγουμε τέσσερις αριθμούς α_1, α_2, β_1, β_2 έτσι ώστε να ισχύουν οι ανισότητες

$$x_o - \frac{1}{2}\varepsilon \leq \alpha_1 < x_o < \alpha_2 \leq x_o + \frac{1}{2}\varepsilon$$

$$y_o - \frac{1}{2}\varepsilon \leq \beta_1 < y_o < \beta_2 \leq y_o + \frac{1}{2}\varepsilon$$

και τέτοιους ώστε κανένας απ΄ αυτούς να μην έχει πεπερασμένο τριαδικό ανάπτυγμα[3]. Τότε οι τέσσερις ευθείες με εξισώσεις

$$x = \alpha_1,\ x_o = \alpha_2,\ y = \beta_1,\ y = \beta_2,$$

ορίζουν στο επίπεδο ένα ορθογώνιο L που περιέχει στο εσωτερικό του το σημείο $m_o(x_o, y_o)$ και κάθε μια από αυτές τις ευθείες τέμνουν το χαλί S του Sierpinski σε ένα σύνολο P του Cantor. Επειδή, το σύνορο του ορθογωνίου L αποτελείται από τμήματα αυτών των ευθειών, η τομή του συνόρου αυτού με το σύνολο S δεν περιέχει συνεχή με περισσότερα από ένα σημεία (το τέλειο σύνολο του Cantor δεν περιέχει κανένα διάστημα). Επιπλέον, αν ένα σημείο m(x, y) ανήκει στο ορθογώνιο L, τότε

$$\alpha_1 \leq x \leq \alpha_2 \quad \text{και} \quad \beta_1 \leq y \leq \beta_2$$

απ' όπου, σύμφωνα με την επιλογή των σημείων α_1, α_2, β_1, β_2, έπεται ότι

$$|x - x_0| \leq \frac{1}{2}\varepsilon \quad \text{και} \quad |y - y_0| \leq \frac{1}{2}\varepsilon$$

Άρα

$$\rho(m, m_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\varepsilon < \varepsilon,$$

που σημαίνει ότι το σημείο m(x, y) ανήκει στην ε- περιοχή του σημείου $m_o(x_o, y_o)$. Όλο το ορθογώνιο L περιέχεται λοιπόν στην ε-περιοχή του m . Παίρνοντας το σύνολο όλων εκείνων των σημείων του εξεταζόμενου ορθογωνίου τετραγώνου που ανήκουν στο χαλί S του Sierpinski, έχουμε ένα ανοικτό σύνολο στο S, όπου ανήκει το m και το οποίο βρίσκεται στην ε-περιοχή του σημείου αυτού. Το σύνορο του συνεχούς αυτού δεν περιέχει συνεχές, το οποίο να αποτελείται από περισσότερα από ένα σημεία.

---

[3] Λέμε ότι ένας αριθμός ρ, $0 < \rho < 1$, έχει πεπερασμένο τριαδικό ανάπτυγμα όταν μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$p = \frac{P_1}{3} + \frac{P_2}{3^2} + \ldots + \frac{P_n}{3^n}$ όπου οι αριθμοί $P_1, P_2, ..., P_n$ μπορούν να πάρουν τις τιμές 0,1,2. Ένας τέτοιος αριθμός είναι π.χ. $\frac{7}{27} = \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3}$.

Έτσι, δείξαμε ότι το χαλί S του Sierpinski αποτελεί καμπύλη κατά Urysohn. Συνεπώς αποδείχτηκε ότι κάθε καμπύλη κατά Cantor είναι καμπύλη κατά Urysohn.

Ισχύει επίσης το αντίστροφο: *Κάθε επίπεδη καμπύλη κατά Urysohn είναι καμπύλη κατά Cantor.* Η απόδειξη του ισχυρισμού περιορίζεται στο ότι καμία επίπεδη καμπύλη (κατά Urysohn) δεν περιέχει ανοικτό σύνολο του επιπέδου.

Αν η καμπύλη C περιείχε ένα ανοικτό υποσύνολο του επιπέδου, τότε θα περιείχε και έναν κυκλικό δίσκο ο οποίος θα περιεχόταν εξολοκλήρου στο ανοικτό σύνολο. Αυτός ο δίσκος ως συνεχές και υποσύνολο του C, βάση Θεωρήματος 1, θα αποτελούσε καμπύλη κατά Urysohn. Θα δείξουμε παρακάτω ότι *ένας κυκλικός δίσκος δεν είναι καμπύλη κατά Urysohn.*

Θα κάνουμε την απόδειξη με την εις άτοπο απαγωγή. Ας υποθέσουμε ότι ένας δίσκος K έχει ένα εσωτερικό σημείο x τέτοιο ώστε ένα ανοικτό σύνολο G στο οποίο ανήκει το x και περιέχεται μαζί με την κλειστότητα του στο K έχει σύνορο

$$D = Fr(G) = \overline{G} \setminus G$$

που δεν περιέχει κανένα συνεχές εκτός από μονοσύνολα.

Όμως παρατηρήσαμε, Θεώρημα 2, Κεφάλαιο ΙΙ ότι αν είναι ένα ανοικτό, μη κενό γνήσιο υποσύνολο ενός συνόλου R, τότε το σύνορο FrG) του ανοικτού αυτού συνόλου διαχωρίζει το σύνολο R. Για να είμαστε πιο σαφείς: Αν αφαιρέσουμε από το R το σύνορο του ανοικτού συνόλου G, τότε το υπολειπόμενο σύνολο

$$R\text{-}Fr(G)$$

παριστάνεται ως ένωση των δύο ανοικτών συνόλων G και R-$\overline{G}$, τα οποία δεν έχουν κοινά σημεία:

$$R\text{-}Fr(G) = G \cup (R\text{-}\overline{G}), \quad G \cap (R\text{-}\overline{G}) = \varnothing$$

Για να διαπιστώσει κανείς, ότι ο κυκλικός δίσκος K δεν αποτελεί καμπύλη κατά τον Urysohn πρέπει να αποδείξει τα εξής: *Αν ένα κλειστό σύνολο D δεν περιέχει συνεχή διαφορετικά από μονοσύνολα, τότε δεν αποσυνθέτει τον κύκλο.* Γι αυτό δεν μπορεί να αποτελέσει σύνορο κάποιου ανοικτού συνόλου G . Εδώ δεν μπορούμε να αποδείξουμε πλήρως το Θεώρημα αυτό. Θα προσπαθήσουμε όμως να περιγράψουμε σε γενικές γραμμές την απόδειξη.

1^o . Καταρχήν αποδεικνύεται ότι ένα συμπαγές σύνολο D που δεν περιέχει τετριμμένα συνεχή, μπορεί για οποιοδήποτε ε να γραφεί ως ένωση πεπερασμένων το πλήθος κλειστών συνόλων, διαμέτρου μικρότερης του ε δηλ.

$$D = D_1 \cup D_2 \cup ...D_n, \text{ με } \delta(D_i) < \varepsilon, \quad (i = 1,2, ...,n).$$

2 ^{o}. Αποδεικνύεται μετά ότι: Αν D είναι κλειστό υποσύνολο του κυκλικού δίσκου που δεν περιέχει συνεχή και

$$D = D_1 \cup D_2 \cup ...D_n,$$

μια διαμέριση του D σε ξένα μεταξύ τους, κλειστά υποσύνολα D_i, διαμέτρου μικρότερης του ε, τότε μπορούμε να συμπεριλάβουμε κάθε σύνολο D_i στο εσωτερικό ενός πολυγώνου P_i, το οποίο περιέχεται εξολοκλήρου στο K, όπου όμως η διάμετρος κάθε P_i είναι μικρότερη του ε και ανά δύο τα πολύγωνα P_i, P_k δεν έχουν κοινά σημεία.

3 ^{o}. Από το 2 ^{o} μπορούμε να βρούμε ένα πεπερασμένο σύστημα πολυγώνων

$$P_1{}^1, P_2{}^1,\ldots,P_{n_1}{}^1$$

διαμέτρου μικρότερης του 1, τα οποία ανά δύο είναι ξένα και η ένωση τους περιέχει το D. Τα ονομάζουμε πολύγωνα πρώτης τάξης. Κατά ανάλογο τρόπο μπορούμε να βρούμε για κάθε πολύγωνο πρώτης τάξης ένα πεπερασμένο σύστημα πολυγώνων διαμέτρου μικρότερης του 1/2 ανά δύο ξένων μεταξύ τους και που περιέχονται εξολοκλήρου στα αντίστοιχα πολύγωνα πρώτης τάξης. Κατ' αυτόν τον τρόπο θα αποκτήσουμε ένα πεπερασμένο σύστημα πολυγώνων 2ης τάξης

$$P_1{}^2, P_2{}^2, \ldots, P_{n_2}{}^2$$

διαμέτρου μικρότερης του 1/2, τα οποία είναι ανά δύο ξένα και η ένωση τους περιέχει το D. Συνεχίζοντας με ανάλογο τρόπο θα έχουμε για κάθε φυσικό αριθμό k ένα πεπερασμένο σύστημα πολυγώνων k-τάξης

$$P_1{}^\kappa, P_2{}^\kappa, \ldots, P_{n_k}{}^k$$

με διάμετρο μικρότερης του 1/k, ανά δύο ξένα, που συμπεριλαμβάνονται στα πολύγωνα (k-1) τάξης και η ένωση τους περιέχει το D.

4 ^{o}. Ονομάζοντας με F_k την ένωση όλων των πολυγώνων k-τάξης, έχουμε την φθίνουσα ακολουθία κλειστών συνόλων

$$F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_k \supset \ldots$$

των οποίων η τομή είναι το σύνολο D.

5 ^{o}. Αφαιρώντας από τον κύκλο K τα σύνολα F_k , παίρνουμε μια αύξουσα ακολουθία ανοικτών συνεκτικών συνόλων G_k

$$G_1 \subset G_2 \subset \ldots . \subset G_k \subset \ldots$$

των οποίων η ένωση S αποτελείται από όλα τα σημεία του κύκλου με εξαίρεση των σημείων του D. Το σύνολο S ως ένωση συνεκτικών συνόλων με κοινά σημεία αποτελεί ένα συνεκτικό σύνολο[+]. Άρα το K\D είναι συνεκτικό και συνεπώς το D δεν αποσυνθέτει τον δίσκο K.

Έτσι αποδείχτηκε ότι ένα φραγμένο κλειστό σύνολο D, που δεν περιέχει συνεχή, δεν αποσυνθέτει τον κυκλικό δίσκο. Έπεται ότι ο κυκλικός δίσκος δεν είναι καμπύλη κατά Urysohn . Συνεπώς, κάθε καμπύλη κατά Urysohn που περιέχεται στο επίπεδο είναι καμπύλη κατά Cantor.

[+] Επίσης κατ' αυτόν τον τρόπο αποδεικνύεται ότι ένα πεπερασμένο κλειστό σύνολο D, το οποίο δεν περιέχει κάποιο συνεχές δεν διαχωρίζει ένα επίπεδο. Αυτή είναι η διατύπωση της πρότασης του Phragmén – Brouwer.

§ 4. 2. Τάξη διακλάδωσης. Παραδείγματα.

Ο ορισμός της καμπύλης κατά τον Urysohn δεν διασαφηνίζει μόνο την φύση του αντικειμένου σ' όλη του την καθολικότητα, αλλά μας υποδεικνύει μεθόδους τις οποίες πρέπει να χρησιμοποιήσουμε στην εξέταση των γενικών ιδιοτήτων των καμπύλων. Το βασικό σημείο του ορισμού είναι ότι το συνεχές, το οποίο εμείς ονομάζουμε καμπύλη, είναι μονοδιάστατο δηλ. στο ότι κάθε σημείο του συνεχούς C έχει μια οσοδήποτε μικρή περιοχή, της οποίας το σύνορο δεν περιέχει κανένα συνεχές που να αποτελείται από περισσότερα από ένα σημεία. Ενδιαφερόμαστε μόνο για τις περιοχές των σημείων του συνεχούς C, των οποίων τα σύνορα περιέχουν ένα "ελάχιστο πλήθος σημείων". Η έκφραση "πλήθος σημείων" σημαίνει τον πληθικό αριθμό του συνόλου των συνοριακών σημείων.

Λέμε ότι μια καμπύλη στο σημείο x έχει *τάξη διακλάδωσης* m, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό σύνολο C διαμέτρου μικρότερης του ε που περιέχει το x και του οποίου το σύνορο περιέχει το πολύ[1] m σημεία, ενώ είναι αδύνατο για αρκετά μικρό $\varepsilon > 0$ να υπάρχει ανοικτό σύνολο διαμέτρου μικρότερης του ε που να περιέχει το x και του οποίου το σύνορο περιέχει λιγότερα από m σημεία. Όταν το σημείο x της καμπύλης C έχει τάξη διακλάδωσης m, γράφουμε

$$\mathrm{Ord}_x\, C = m$$

Όμως το σύνορο ενός ανοικτού συνόλου είναι πάντοτε κλειστό σύνολο. Κάθε κλειστό σύνολο που περιέχεται σε ένα συμπαγές σύνολο, είναι είτε πεπερασμένο, είτε αριθμήσιμο, ή έχει τον πληθικό αριθμό του συνεχούς[2]. Συνεπώς, το σύνορο κάθε ανοικτού συνόλου (σχετικά με ένα συμπαγές) είναι πεπερασμένο ή ένα αριθμήσιμο σύνολο ή έχει τον πληθικό αριθμό του συνεχούς. Από τα ανωτέρω συνάγεται η εξής ταξινόμηση των σημείων της καμπύλης ως προς με την τάξη διακλάδωσης.

1°. Λέμε ότι ένα σημείο x μιας καμπύλης C έχει *πεπερασμένη τάξη διακλάδωσης n* (όπου n είναι ένας φυσικός αριθμός), όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό σύνολο στο οποίο ανήκει το x, με διάμετρο μικρότερη από ε του οποίου το σύνορο αποτελείται το πολύ από n σημεία και για αρκετά μικρό $\varepsilon > 0$ το σύνορο κάθε ανοικτού συνόλου, που περιέχει το σημείο x και έχει διάμετρο μικρότερη του ε, αποτελείται από τουλάχιστον n σημεία.

---
[1] Με την έννοια του πληθικού αριθμού.
[2] Βλέπε P.S. Alexadroff, σελ. 221.

2$^{\text{ο}}$. Λέμε ότι ένα σημείο x μιας καμπύλης C έχει *άπειρη τάξη διακλάδωσης ω*, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μια ανοικτή περιοχή που περιέχει το x και έχει διάμετρο μικρότερη του ε, της οποίας το σύνορο αποτελείται από πεπερασμένο σύνολο σημείων, όμως όσο μικραίνει το ε ο ελάχιστος αριθμός των συνοριακών σημείων αυξάνει απεριόριστα.

3$^{\text{ο}}$. Λέμε ότι η καμπύλη C έχει στο σημείο x *αριθμήσιμη τάξη διακλάδωσης* $\aleph_0$, όταν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτό σύνολο που περιέχει το x είναι διαμέτρου μικρότερης του ε, του οποίου το σύνορο περιέχει το πολύ αριθμήσιμο πλήθος σημείων (δηλ. είναι ένα πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύνολο), που όμως για αρκετά μικρό ε δεν υπάρχει ανοικτό σύνολο, που περιέχει το x και έχει διάμετρο μικρότερη του ε, του οποίου το σύνορο να αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος σημείων.

4$^{\text{ο}}$. Λέμε ότι το σημείο x της καμπύλης C έχει *συνεχή τάξη διακλάδωσης,* όταν για αρκετά μικρό $\varepsilon > 0$ δεν υπάρχει ανοικτό σύνολο που περιέχει το x και διαμέτρου μικρότερης του ε, του οποίου το σύνορο να αποτελείται από πεπερασμένο ή αριθμήσιμο πλήθος σημείων.

Ένα σημείο της καμπύλης C, του οποίου η τάξη διακλάδωσης είναι μεγαλύτερη του 2, λέγεται *σημείο διακλάδωσης* (της καμπύλης αυτής). Ένα σημείο του οποίου η τάξη διακλάδωσης είναι ίση με 1, ονομάζεται *τελικό σημείο*.

Είδαμε στις παραπάνω παραγράφους ότι ένα συνεχές K που είναι υποσύνολο μιας καμπύλης C, είναι καμπύλη (Θεώρημα 1), και ένα σύνολο ομοιόμορφο με μια καμπύλη είναι επίσης καμπύλη (Θεώρημα 2). Τα επόμενα δύο θεωρήματα, των οποίων τις αποδείξεις λόγω της απλότητας τις αφήνουμε στον αναγνώστη, συμπληρώνουν τις προηγούμενες προτάσεις.

Θεώρημα 1 . *Αν ένα συνεχές K είναι υποσύνολο μιας καμπύλης C και $x \in K$, τότε η τάξη διακλάδωσης του x ως προς το K δεν είναι μεγαλύτερη από την τάξη διακλάδωσης του x ως προς το C, δηλαδή*

$$\mathrm{Ord}_x\, K \leq \mathrm{Ord}_x\, C$$

Θεώρημα 2. *Αν C και C′ είναι δύο ομομορφικές καμπύλες, x ένα σημείο του C και x′ του C′, το οποίο αντιστοιχεί μέσω της τοπολογικής απεικόνισης στο x, τότε οι τάξεις διακλάδωσης τους είναι ίσες, δηλαδή:*

$$\mathrm{Ord}_x\, C = \mathrm{Ord}_{x'}\, C'$$

Για να εξοικειωθούμε με τους διάφορους ορισμούς οι οποίοι συνδέονται με την τάξη διακλάδωσης, θα αναφερθούμε σε μια σειρά παραδειγμάτων τα οποία διασαφηνίζουν την έννοια αυτή.

Παράδειγμα 1. Ένα ευθύγραμμο τμήμα T έχει σε όλα τα εσωτερικά του σημεία τάξη διακλάδωσης 2 ενώ η τάξη διακλάδωσης των άκρων του είναι 1.

Πραγματικά, κάθε εσωτερικό σημείο του T, μπορεί να συμπεριληφθεί σε ένα διάστημα οσοδήποτε μικρού μήκους. Το διάστημα αυτό είναι ανοικτό σύνολο, ως προς το T το σύνορο του οποίου αποτελείται από δύο σημεία - τα τελικά σημεία του διαστήματος. Συνεπώς, η τάξη διακλάδωσης κάθε εσωτερικού σημείου του T είναι το πολύ 2. Από την άλλη πλευρά, αν G οποιοδήποτε ανοικτό σύνολο που περιέχει το σημείο x και η διάμετρος του G είναι τόσο μικρή, ώστε τα ακραία σημεία του T να μην ανήκουν στο G, τότε το σύνολο G, το οποίο είναι ανοικτό ως προς το T, είναι ανοικτό και ως προς όλη την ευθεία.

Όμως, κάθε ανοικτό σύνολο της ευθείας αποτελείται από πεπερασμένα ή αριθμήσιμα το πλήθος ξένα διαστήματα. Σε ένα από αυτά ανήκει το x. Τα τελικά σημεία του διαστήματος που περιέχουν το x εισέρχονται στο σύνορο του ανοικτού συνόλου G. Συνεπώς, το σύνορο του ανοικτού συνόλου G που περιέχει το σημείο x, αποτελείται από τουλάχιστον δύο σημεία. Έτσι, κάθε σημείο του ευθυγράμμου τμήματος T περιέχεται σε ένα ανοικτό σύνολο με οσοδήποτε μικρή διάμετρο, του οποίου το σύνορο αποτελείται από δύο σημεία, και για αρκετά μικρό ε (μικρότερο από την μισή απόσταση του σημείου x από τα ακραία σημεία του T) το σύνορο κάθε ανοικτής περιοχής που περιέχει το σημείο x και έχει διάμετρο μικρότερη του ε, περιέχει τουλάχιστον δύο σημεία. Άρα, η τάξη διακλάδωσης κάθε εσωτερικού σημείου της περιοχής είναι ίση με 2.

Το τελικό σημείο α του διαστήματος [α, β] μπορεί να συμπεριληφθεί σε ένα ημιδιάστημα [α,x) οσοδήποτε μικρού μήκους το οποίο είναι ανοικτό σύνολο ως προς το T και του οποίου το σύνορο αποτελείται ακριβώς από το σημείο x. Επιπλέον, κάθε ανοικτό σύνολο, στο οποίο ανήκει το σημείο α και του οποίου η διάμετρος είναι μικρότερη του μήκους του [α, β] περιέχει ένα ημιδιάστημα [α,x). Άρα η τάξη διακλάδωσης των ακραίων σημείων του διαστήματος είναι ίση με 1.

Παράδειγμα 2. Κάθε κυκλική περιφέρεια έχει, σε κάθε σημείο της, τάξη διακλάδωσης 2. Πραγματικά, από τη μια, κάθε σημείο x της κυκλικής γραμμής μπορεί να περικλειστεί σε ένα "ανοικτό" τόξο (χωρίς τελικά σημεία) οσοδήποτε μικρού μήκους. Αυτό το τόξο είναι ανοικτό σύνολο, ως προς την κυκλική γραμμή. Το σύνορο αυτού του ανοικτού συνόλου αποτελείται από δύο σημεία τα ακραία σημεία του τόξου. Συνεπώς, η τάξη διακλάδωσης κάθε σημείου της κυκλικής γραμμής είναι το πολύ 2. Από την άλλη, κάθε ανοικτό σύνολο της κυκλικής γραμμής αποτελείται από ένα πεπερασμένο ή αριθμήσιμο πλήθος τόξων, τα οποία ανά δύο δεν έχουν κοινά σημεία και των οποίων τα ακραία σημεία ανήκουν στο σύνορο του ανοικτού αυτού συνόλου. Σε ένα από αυτά τα τόξα ανήκει το x. Συνεπώς η τάξη διακλάδωσης κάθε σημείου x της κυκλικής γραμμής είναι τουλάχιστον 2. Και οι δύο εκτιμήσεις μαζί συνάγουν ότι η τάξη διακλάδωσης κάθε σημείου κυκλικής είναι ίση με 2.

Παρατήρηση. Εφόσον, λόγω Θεωρήματος 2 αυτής της παραγράφου, οι τοπολογικές απεικονίσεις δεν αλλάζουν την τάξη των σημείων, μπορούμε λόγω αυτών των αποτελεσμάτων να συνοψίσουμε τα εξής:

1^o . Η τάξη διακλάδωσης ενός απλού τόξου είναι 2 σε κάθε εσωτερικό του σημείο και είναι 1 στα άκρα του τόξου.

2^o . Η τάξη διακλάδωσης κάθε εσωτερικού σημείου μιας απλής κλειστής καμπύλης είναι ίση με 2.

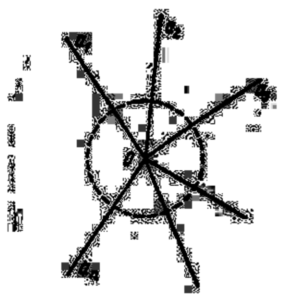
Παράδειγμα 3. Έστω ότι η καμπύλη L αποτελείται από n ευθύγραμμα τμήματα

$$Oa_1, Oa_2, ..., Oa_n$$

τα οποία ξεκινούν από το σημείο O (Σχήμα 12). Η τάξη διακλάδωσης της καμπύλης L στο σημείο O είναι ίση με n. Πράγματι, έστω ε τυχαίος θετικός αριθμός, Θεωρούμε τα n τμήματα.

$$Oc_1, Oc_2, ..., Oc_n,$$

που είναι μέρη των προηγούμενων και έχουν μήκος μικρότερο από το ε/2. (τα σημεία c_i ανήκουν στα τμήματα Oa , i = 1, 2,…n αντίστοιχα).



Σχήμα 12.

Η ένωση αυτών των ημιδιαστημάτων είναι ως προς το L ένα ανοικτό σύνολο διαμέτρου μικρότερης του ε, στο οποίο ανήκει το σημείο O και του οποίου το σύνορο αποτελείται από n σημεία, τα τελικά σημεία των ημιδιαστημάτων. Άρα η τάξη διακλάδωσης στο O είναι το πολύ n. Αν ο αριθμός ε είναι μικρότερος των μηκών όλων των τμημάτων $Oa_1, Oa_2, ..., Oa_n$, τότε κάθε ανοικτό σύνολο του L που περιέχει το O και είναι διαμέτρου μικρότερης του ε, περιέχει n ημιδιαστήματα που ξεκινούν από το O. Τα τελικά σημεία αυτών των ημιδιαστημάτων ανήκουν στο σύνορο του θεωρούμενου ανοικτού συνόλου. Συνεπώς η τάξη διακλάδωσης της καμπύλης L στο σημείο O είναι τουλάχιστον n.

Και οι δυο εκτιμήσεις οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η τάξη διακλάδωσης της καμπύλης L στο σημείο O είναι ίση με n. Η τάξη διακλάδωσης των εσωτερικών σημείων των περιοχών $Oa_1, Oa_2, ..., Oa_n$, της L είναι ίση με 2, ενώ των τελικών σημείων ίση με 1.

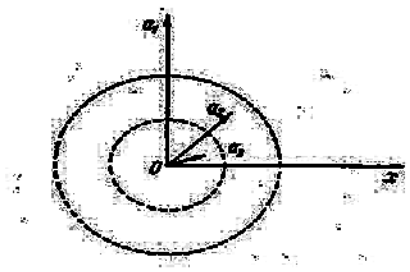
Παράδειγμα 4. Έστω ότι η καμπύλη L αποτελείται από αριθμήσιμο πλήθος ευθυγράμμων τμημάτων $Oa_1, Oa_2, ..., Oa_n, ...$ τα οποία ξεκινούν από το κέντρο των συντεταγμένων (Σχήμα 13). Τα μήκη αυτών των τμημάτων θα είναι

$$Oa_1 = 1/2,\ Oa_2 = 1/4,\ ....,\ Oa_n = 1/2^n,\ ....$$

και οι γωνίες που σχηματίζουν με τον άξονα Ox θα είναι

$$\pi/2,\ \pi/4,\ ...,\ \pi/2^n$$

Έτσι, τα μήκη των περιοχών καθώς και οι γωνίες αυξανόμενου το n, τείνουν στο μηδέν.



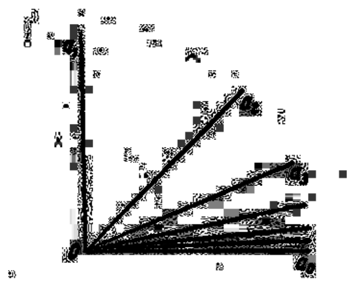
Σχήμα 13

Το σημείο O της καμπύλης L έχει μη φραγμένη τάξη διακλάδωσης ω, δηλ. έχει την ιδιότητα, για κάθε ε > 0 να υπάρχει ανοικτό σύνολο διαμέτρου μικρότερης του ε, το οποίο περιέχει το O και το σύνορο του αποτελείται από πεπερασμένο αριθμό σημείων, των οποίων ο αριθμός αυξάνει απεριόριστα όταν το ε τείνει στο μηδέν. Πραγματικά, η ε/2-

περιοχή του σημείου Ο αποτελείται από πεπερασμένα το πλήθος ημιδιαστήματα, τα οποία ξεκινούν από το Ο και περιέχονται στα τμήματα τα οποία έχουν μήκος τουλάχιστον ε/2, και από ένα άπειρο σύνολο τμημάτων, των οποίων το μήκος είναι μικρότερο του ε/2. Το σύνορο αυτών των συνόλων αποτελείται από πεπερασμένα στο πλήθος σημεία, τα ακραία σημεία των ημιδιαστημάτων, τα οποία περιέχονται στην ε/2-περιοχή. Η διάμετρος της περιοχής αυτής είναι προφανώς μικρότερη του ε.

Επιπλέον, σε κάθε ανοικτό σύνολο της καμπύλης L που περιέχει το σημείο Ο, η συνιστώσα[3] του Ο, που είναι ανοικτό σύνολο στο L, αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος ημιδιαστημάτων, που ξεκινούν από το σημείο Ο και ένα άπειρο πλήθος τμημάτων που ξεκινούν από το Ο. Το σύνορο αυτής της συνιστώσας αποτελείται από τα ακραία σημεία των ημιδιαστημάτων (αυτά ανήκουν και στο σύνορο όλου του ανοικτού συνόλου). Όσο μικρότερη είναι η διάμετρος του ανοικτού συνόλου, και συνεπώς της συνιστώσας του σημείου Ο, τόσο περισσότερα ημιδιαστήματα ανήκουν σ' αυτήν την συνιστώσα κι έτσι τόσο περισσότερα σημεία, τα τελικά σημεία των ημιδιαστημάτων ανήκουν, στο σύνορο του ανοικτού συνόλου. Όταν η διάμετρος του ανοικτού συνόλου τείνει στο μηδέν τότε, το πλήθος αυτών των σημείων αυξάνει απεριόριστα.

Όλα τα εσωτερικά σημεία των τμημάτων, από τα οποία αποτελείται η καμπύλη L, έχουν τάξη διακλάδωσης ίση με 2 ενώ η τάξη διακλάδωσης των ακραίων σημείων είναι ίση με 1.



Σχήμα 14

Παράδειγμα 5. Έστω ότι η καμπύλη L (Σχήμα 14) αποτελείται από ένα κλειστό διάστημα Oa_0 μήκους 1 και το άπειρο πλήθος των κλειστών διαστημάτων

$$Oa_1, Oa_2, ..., Oa_n, \ldots$$

μήκους 1, που ξεκινούν από το σημείο Ο και σχηματίζουν με το Oa_0 γωνίες ίσες

[3] Με τη συνιστώσα ενός σημείου x σ'ένα σύνολο R εννοείται το μεγαλύτερο συνεκτικό σύνολο K, το οποίο περιέχει το σημείο x και στο R. Με το "μεγαλύτερο" εννοούμε ότι κάθε σύνολο M, το οποίο περιέχει το K ως γνήσιο υποσύνολο, δεν είναι πλέον συνεκτικό.

αντίστοιχα με

$$\pi/2, \pi/4, ..., \pi/2^n$$

Η καμπύλη L έχει σε κάθε σημείο του Oa_0 αριθμήσιμη τάξη διακλάδωσης. Πράγματι, κάθε ανοικτό σύνολο που περιέχει το O και είναι διαμέτρου μικρότερης του 1, αποτελείται από πεπερασμένο ή αριθμήσιμο πλήθος διαστημάτων, τα οποία περιέχονται στα τμήματα Oa_0, Oa_1,Oa_2,… και προέρχονται από την συνιστώσα του σημείου O, η οποία είναι ένωση αριθμήσιμου πλήθους ημιδιαστημάτων που ξεκινούν από το σημείο O.

Έστω m εσωτερικό σημείο τμήματος Oa_0. Τότε κάθε ανοικτό σύνολο που το περιέχει αποτελείται από διαστήματα τα οποία βρίσκονται στις περιοχές Oa_0, Oa_1,Oa_2,... με ενδεχόμενη εξαίρεση τα πεπερασμένα το πλήθος τμήματα

$$Oa_1, Oa_2, ..., Oa_n, \ldots$$

Άλλωστε κάθε αρκετά μικρή ανοικτή περιοχή G, η οποία περιέχει το α_0, αποτελείται από ένα αριθμήσιμο πλήθος ημιδιαστημάτων με ακραία σημεία

$$a_0, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots,$$

τα οποία περιέχονται στο G και ένα πεπερασμένο (ενδεχομένως κενό) ή αριθμήσιμο πλήθος διαστημάτων, τα οποία περιέχονται στα τμήματα

$$Oa_1, Oa_2, ..., Oa_{n+1}, \ldots$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι σε όλες τις περιπτώσεις το σύνορο ενός ανοικτού συνόλου, με αρκετά μικρή διάμετρο, στο οποίο ανήκει ένα σημείο του τμήματος Oa_0, αποτελείται από ένα αριθμήσιμο πλήθος σημείων. Συνεπώς, όλα τα σημεία του τμήματος Oa_0 έχουν αριθμήσιμη τάξη διακλάδωσης στην καμπύλη L. Τα υπόλοιπα σημεία της καμπύλης L έχουν τάξη διακλάδωσης ίση με 2 ή 1.

Παράδειγμα 6. Έστω ότι η καμπύλη L (Σχήμα 7, σελ. 40) αποτελείται από την ακολουθία των ευθυγράμμων τμημάτων

$$A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_n, B_n, \ldots.$$

όπου A_n αποτελείται από τα σημεία με συντεταγμένες

$$x=(1/2)^n, \quad -1 \leq y \leq 1$$

και B_n αποτελείται από τα σημεία με συντεταγμένες

$$(1/2)^{n+1} \le x \le (1/2)^n, \quad y=(-1)^n.$$

και απο την οριακή γραμμή A_0 που αποτελείται από τα σημεία με συντεταγμένες:

$$x=0, \quad -1 \le y \le 1$$

Αυτό το σύνολο L, όπως αναφέρθηκε στην σελ. 40, είναι ομοιομορφικό με το σύνολο που αποτελείται από τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$Y = \sin(\frac{2\pi}{x}), \quad 0< x \le 1$$

και της οριακής γραμμής

$$x = 0, \quad -1 \le y \le 1.$$

Καταρχήν, δείχνουμε ότι το σύνολο L πράγματι αποτελεί καμπύλη κατά Urysohn. Το L είναι συμπαγές. Πράγματι, έστω M ένα άπειρο υποσύνολο του L. Έστω ότι το σύνολο M περιέχει ένα άπειρο υποσύνολο N, του οποίου τα σημεία ανήκουν σε κάποιο από τα τμήματα

$$A_0, A_1, B_1, A_2, B_2, ...$$

Τότε, λόγω της συμπάγειας του ευθυγράμμου τμήματος το σύνολο N έχει ένα σημείο συσσώρευσης p το οποίο ανήκει σ' αυτό το τμήμα. Το σημείο p, ως σημείο συσσώρευσης του N, είναι σημείο συσσώρευσης του M. Αν όμως το M έχει κοινά σημεία με άπειρο πλήθος από τα τμήματα A_1, B_1, A_2, B_2, …, τότε σίγουρα υπάρχει σημείο στο τμήμα A_0, το οποίο είναι το σημείο συσσώρευσης του M.

Το σύνολο L είναι συνεκτικό. Πράγματι, το σύνολο S, το οποίο αποτελείται από τα κλειστά διαστήματα

$$A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_n, B_n \ldots,$$

είναι συνεκτικό αφού κάθε ζεύγος γειτονικών διαστημάτων αυτής της ακολουθίας έχει κοινά σημεία. Επισυνάπτοντας στο σύνολο S τα σημεία του τμήματος A_0, τα οποία είναι τα σημεία συσσώρευσης του S, έχουμε το σύνολο L. Αυτό συνεπώς είναι συνεκτικό, (λόγω του Θεωρήματος 5, § 2.3). Ως συνεκτικό και συμπαγές σύνολο το L είναι συνεχές. Θα δείξουμε ότι το συνεχές L είναι καμπύλη. Αν το σημείο m ανήκει σε οποιοδήποτε από τα διαστήματα A_n, B_n $(n \neq 0)$, τότε η τάξη διακλάδωσης είναι ίση με 2, εκτός και αν το m έχει συντεταγμένες (1/2, 1) (τελικό σημείο του A_1) του οποίου η τάξη διακλάδωσης είναι ίση με 1. Έστω m_0 σημείο της οριακής γραμμής A_0 και ε τυχαίος θετικός αριθμός, ο οποίος είναι μικρότερος από τις αποστάσεις του m_0 από τα άκρα της οριακής γραμμής. Καλούμε U το ανοικτό σύνολο που αποτελείται από διαστήματα μήκους ε, τα οποία περιέχονται στο A και στα τμήματα A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, … για τα οποία έχουμε $(1/n)^2 < ε/2$ και τέτοια ώστε τα κέντρα όλων αυτών των διαστημάτων βρίσκονται στην ευθεία που περνά από το m_0 και είναι παράλληλη προς τον άξονα O_x. Το ανοικτό αυτό σύνολο περιέχει το m_0, έχει διάμετρο μικρότερη του ε και το σύνορο του αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος σημείων - τα ακραία σημεία των διαστημάτων, από τα οποία αποτελείται το αναφερόμενο ανοικτό σύνολο. Συνεπώς το σύνορο του U δεν περιέχει κανένα συνεχές εκτός από μονοσύνολα.

Όμοια αποδεικνύεται η ύπαρξη τέτοιου συνόλου V στην περίπτωση που το m_0 είναι άκρο του τμήματος A_0.

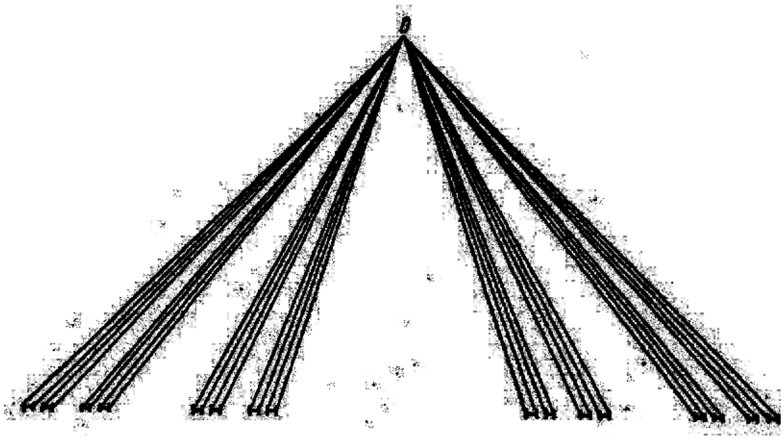
Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι η καμπύλη L έχει σε κάθε σημείο της A_0 αριθμήσιμη τάξη διακλάδωσης.

Πράγματι, κάθε ανοικτό σύνολο στο οποίο ανήκει ένα σημείο m_0 της οριακής γραμμής A_0 περιέχει ανοικτά διαστήματα, τα οποία βρίσκονται στο A_0 και σε όλα τα κάθετα διαστήματα

$$A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots$$

για κάποιο κατάλληλο n. Επιπλέον, τουλάχιστο ένα από τα ακραία σημεία αυτών των διαστημάτων ανήκει στο σύνορο του θεωρούμενου ανοικτού συνόλου. Συνεπώς, το σύνορο κάθε ανοικτού συνόλου, το οποίο περιέχει κάποιο σημείο m_0 της οριακής γραμμής A_0, αποτελείται από αριθμήσιμο πλήθος σημείων, Αυτό σημαίνει ότι η καμπύλη L έχει στο m_0 αριθμήσιμη τάξη διακλάδωσης $\aleph$.

Παράδειγμα 7. Έστω ότι η καμπύλη L (Σχήμα 15) αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα τα οποία ενώνουν το σημείο O με τα σημεία του τέλειου συνόλου C του Cantor. Καταρχήν θα αποδείξουμε ότι το σύνολο αυτό είναι καμπύλη. Η απόδειξη ότι το L είναι συνεχές, αφήνεται στον αναγνώστη.



Σχήμα 15

Θα αποδείξουμε λοιπόν μόνο ότι για κάθε $\varepsilon > 0$, κάθε σημείο του L βρίσκεται σε ένα ανοικτό σύνολο διαμέτρου μικρότερης του ε, το σύνορο του οποίου δεν περιέχει συνεχές που να έχει περισσότερα από ένα σημεία.

Γι' αυτό αρκεί να πάρουμε ένα τραπέζιο, στο εσωτερικό του οποίου βρίσκεται το αναφερόμενο σημείο, οι βάσεις του είναι παράλληλες στο τμήμα που περιέχει το C, ενώ οι άλλες πλευρές βρίσκονται σε ευθείες, οι οποίες ενώνουν το σημείο O με τα σημεία των ενδιάμεσων διαστημάτων (δηλαδή τμημάτων που αφαιρέθηκαν κατά την κατασκευή του συνόλου C). Θα πρέπει όμως το τραπέζιο να είναι τόσο μικρό ώστε το μήκος των πλευρών του, καθώς και των διαγωνίων του, να είναι μικρότερα του ε. Το σύνολο των εσωτερικών σημείων του L είναι το ζητούμενο ανοικτό σύνολο, του οποίου το σύνορο δεν περιέχει συνεχές περισσοτέρων του ενός σημείων. Το σύνορο αυτό αποτελείται από τα δυο τέλεια σύνολα του Cantor, τα οποία λαμβάνουμε ως την τομή των βάσεων του τραπεζίου με το σύνολο L. Αν κάποιο σημείο ανήκει στο C ή ταυτίζεται με το O, τότε διαμορφώνεται ανάλογα το ανοικτό σύνολο. Οπότε το L είναι καμπύλη.

Θα αποδείξουμε τώρα, ότι κάθε σημείο του L έχει συνεχή τάξη διακλάδωσης. Γνωρίζουμε ότι το σύνορο κάθε ανοικτού συνόλου G ενός χώρου R αποσυνθέτει το σύνολο R με την έννοια ότι, το R-Fr(G) μπορεί να παρασταθεί ως το ένωση των δύο ξένων μεταξύ τους ανοικτών συνόλων G και R-$\overline{G}$. Για να πειστεί κανείς ότι κάθε σημείο του L έχει συνεχή τάξη διακλάδωσης, αρκεί να δειχθεί ότι δεν υπάρχει ανοικτό σύνολο, του οποίου το σύνορο να αποτελείται από πεπερασμένο ή αριθμήσιμο πλήθος σημείων. Αρκεί να αποδειχτεί ότι το υπολειπόμενο σύνολο L-A, το οποίο παίρνουμε αφαιρώντας ένα πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύνολο A από το L, είναι συνεκτικό.

Έστω A ένα το πολύ αριθμήσιμο υποσύνολο του L που δεν περιέχει το σημείο O. Το σύνολο S των σημείων εκείνων των τμημάτων που δεν περιέχουν κάποιο σημείο του A, είναι συνεκτικό. Κάθε σημείο x που ανήκει στο L περιέχει σε κάθε περιοχή του σημεία, τα οποία ανήκουν σε ένα μη αριθμήσιμο πλήθος από τμήματα που σχηματίζουν την καμπύλη L. Έτσι κάθε σημείο x του συνόλου

$$B = L\text{-}A$$

είναι σημείο συσσώρευσης του συνεκτικού συνόλου S. Επισυνάπτοντας στο συνεκτικό σύνολο S και τα σημεία συσσώρευσης του, έχουμε πάλι συνεκτικό σύνολο. Συνεπώς το σύνολο B = L-A είναι συνεκτικό.

Παράδειγμα 8. Το χαλί S του Sieprinski (βλ. Κεφ. II) έχει σε κάθε σημείο του συνεχή τάξη διακλάδωσης.

Για την απόδειξη, αρκεί να δείξουμε, όπως παραπάνω ότι: Αν αφαιρέσουμε από το S ένα αριθμήσιμο, κλειστό σύνολο F, τότε το υπολειπόμενο σύνολο

$$G = S\text{-}F$$

είναι συνεκτικό.

Έστω ότι το ανοικτό σύνολο $G = S\text{-}F$ δεν είναι συνεκτικό. Τότε μπορεί να παραστεί ως η ένωση δύο ανοικτών μη κενών, ξένων μεταξύ τους, συνόλων G_1 και G_2:

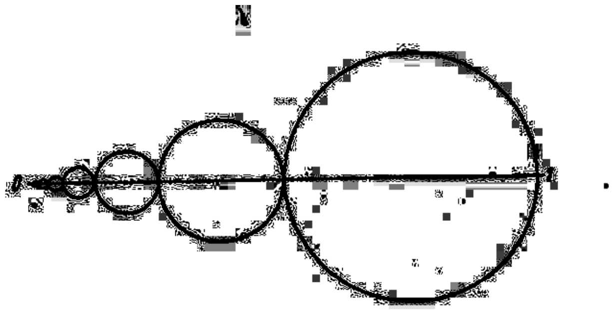
$$G = G_1 \cup G_2.$$

Έστω Q το μοναδιαίο τετράγωνο, από το οποίο κατασκευάσαμε το χαλί S του Sierpinski και έστω C το σύνορο αυτού του τετραγώνου. Καταρχήν θα δείξουμε ότι το C περιέχεται εξολοκλήρου στην κλειστότητα ενός από τα σύνολα G_1 ή G_2. Έστω H το σύνολο το οποίο αποτελείται από τις παράλληλες ευθείες μήκους 1 που περιέχονται στο S, οι οποίες δεν περιέχουν σημεία του συνόλου F. Κάθε τέτοιο κλειστό διάστημα δεν μπορεί, ως συνεκτικό υποσύνολο του G, να έχει κοινά σημεία και με τα δύο ανοικτά σύνολα G_1, G_2. Έστω D_1 οποιοδήποτε από αυτά τα τμήματα, που είναι παράλληλο στην οριζόντια πλευρά του τετραγώνου και που περιέχεται στο G_1. Τότε κάθε κάθετο τμήμα, ξένο με το σύνολο F, περιέχεται επίσης στο G_1, διότι έχει με αυτό το σύνολο ένα κοινό σημείο (το σημείο τομής με την οριζόντια ευθεία D_1). Συνεπώς και κάθε οριζόντιο τμήμα, ξένο με το σύνολο F, περιέχεται στο G_1, αφού τέμνει όλα τα κάθετα τμήματα (που περιέχονται στο G_1). Έτσι, αποδείξαμε ότι το σύνολο H, που αποτελείται από οριζόντιες και κάθετες ευθείες, οι οποίες δεν περιέχουν σημεία του F, περιέχεται εξολοκλήρου στο G_1. Κάθε σημείο του συνόρου C είναι όμως σημείο συσσώρευσης του H, οπότε ισχύει C $\overline{G}_1$.

Έστω Q^n ένα τετράγωνο n-οστης τάξης και C^n το σύνορο του. Επειδή το μέρος της καμπύλης S που περιέχεται στο Q^n έχει την ίδια δομή με όλη την καμπύλη, μπορούμε, όπως παραπάνω να δείξουμε ότι για κάθε n το σύνορο C^n κάθε τετραγώνου Q^n περιέχεται σε ένα από τα σύνολα $_1$ ή $\overline{G}_2$. Αν όμως ένα τετράγωνο Q^{n+1}, n+1 – τάξης περιέχεται σε ένα τετράγωνο Q^n n-οστης τάξης, τότε το σύνορο του C^{n+1} έχει με το σύνορο C^n του Q^n κοινά σημεία. Επειδή, το σύνολο αυτών των κοινών σημείων αποτελείται από ένα ή δυο κλειστά ευθύγραμμα τμήματα (τις πλευρές του μικρότερου τετραγώνου Q^{n+1}) είναι μη αριθμήσιμο. Συνεπάγεται ότι το C^{n+1} και C^n έχουν κοινά σημεία, τα οποία δεν ανήκουν στο F. Για αυτό το C^{n+1} περιέχεται σε εκείνο από τα σύνολα $\overline{G}_1$ ή $\overline{G}_2$, στο οποίο περιέχεται και το C^n.

Αφού όμως το σύνορο C του Q περιέχεται στο $\overline{G}_1$, τα σύνορα όλων των τετραγώνων πρώτης τάξης περιέχονται στο ${}_1$. Κατά τον ίδιο τρόπο, δείχνουμε ότι τα σύνορα των τετραγώνων δεύτερης τάξης αλλά και όλων των ανωτέρων τάξεων περιέχονται στο ${}_1$. Επειδή το σύνολο που είναι η ένωση των συνόρων τετραγώνων όλων των δυνατών τάξεων είναι πυκνό στο S, έπεται ότι το σύνολο S περιέχεται στο ${}_1$, άρα το G_2 είναι κενό. Έτσι αποδείχθηκε ότι το σύνολο G = S-F είναι συνεκτικό.

Παρατήρηση. Συγκρίνοντας τα τελευταία τέσσερα παραδείγματα, διαπιστώνουμε ότι, τα σημεία που έχουν άπειρη τάξη διακλάδωσης δεν εμφανίζονται μεμονωμένα και αυτό δεν είναι σύμπτωση. Όπως έδειξε ο Urysohn, αν υπάρχουν τέτοια σημεία, τότε είναι τόσο απλά ώστε σε κάθε ε-περιοχή καθενός από αυτά περιέχεται ένα συνεχές, αποτελούμενο από σημεία με άπειρη τάξη διακλάδωσης.



Σχήμα 16

Παράδειγμα 9. Έστω η καμπύλη L (Σχήμα 16) που αποτελείται από το σημείο O και ένα αριθμήσιμο πλήθος κύκλων, των οποίων οι διάμετροι είναι τα ακόλουθα τμήματα :

$$[1, 1/2], [1/2, 1/3], \ldots, [1/n, 1/n+1], \ldots$$

Το σημείο O του L έχει τάξη διακλάδωσης 1, αφού το σύνορο κάθε 1/n - περιοχής του O αποτελείται μόνο από το σημείο 1/n. Στα σημεία επαφής των κύκλων η L έχει τάξη διακλάδωσης 4, ενώ στα υπόλοιπα ίση με 2.

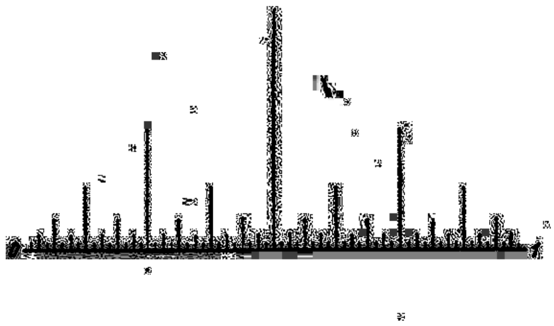
Παράδειγμα 10. Η καμπύλη L (Σχήμα 17) που αποτελείται από τα οριζόντια τμήματα

$$0 \leq x \leq 1, \qquad y = 0$$

του x-άξονα και τα κάθετα σε αυτόν ευθύγραμμα τμήματα, τα οποία περνούν από τους ρητούς αριθμούς, περιέχονται στο άνω ημιεπίπεδο και έχουν μήκος 1/q, όπου p/q η ανάγωγη κλασματική παράσταση της τετμημένης του σημείου του άξονα Ox:

$$0 < x = p/q < 1, \quad 0 \leq y \leq 1/q.$$ [4]

Η τάξη διακλάδωσης των (πάνω) ακραίων σημείων των καθετών τμημάτων είναι ίση με 1, ενώ στα εσωτερικά σημεία είναι ίση με 2, αφού για αρκετά μικρό ε, η ε-περιοχή ενός σημείου κάθετου τμήματος (που δεν ανήκει στο οριζόντιο τμήμα) δεν περιέχονται άλλα σημεία εκτός αυτού του τμήματος. Τάξη διακλάδωσης 2 έχουν και τα άρρητα σημεία του οριζοντίου τμήματος.



Σχήμα 17

Πράγματι, έστω x_0 τυχαίο άρρητο σημείο του οριζόντιου ευθύγραμμου τμήματος και έστω τυχαίο θετικό ε. Μπορούμε να βρούμε έναν ρητό αριθμό ε΄ > 0 με ε΄ < , έτσι ώστε όλα τα κάθετα ευθύγραμμα τμήματα, τα οποία περιέχονται στη λωρίδα μεταξύ των ευθειών $x = x_0-\varepsilon'$ και $x = x_0+\varepsilon'$, να έχουν μήκη μικρότερα του ε/2. Τότε το σύνολο G που αποτελείται από τα σημεία (x,y) του L, για τα οποία:

$$x_0-\varepsilon' < x < x_0+\varepsilon', \quad 0 \leq y < \varepsilon/2$$

είναι ανοικτό στο L και περιέχει το σημείο $(x_0, 0)$. Το G περιέχεται επίσης στην ε-περιοχή του σημείου (x , 0) και το σύνορό του αποτελείται από δυο σημεία του οριζοντίου τμήματος – αυτά που έχουν τετμημένες $x_0-\varepsilon'$ και $x_0+\varepsilon'$.

Όμοια αποδεικνύεται ότι η καμπύλη L έχει τάξη διακλάδωσης 1 στα άκρα του οριζοντίου τμήματος.

[4] Εύκολα αποδεικνύεται η πληρότητα, συμπάγεια και συνεκτικότητα του L, καθώς και η υποτιθέμενη συμμετρία του Σχήματος 17 (Προσθήκη στην γερμανική έκδοση).

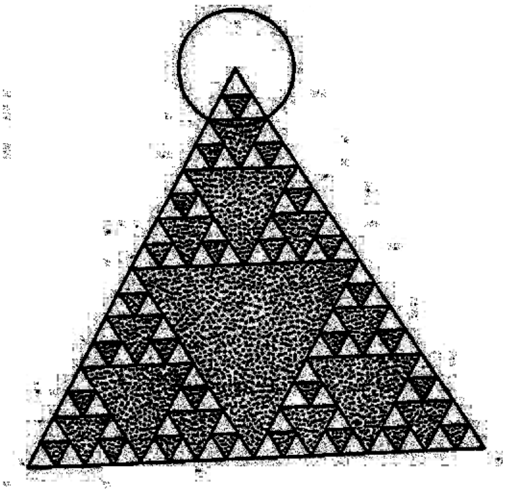
Αν $x_0 = p/q$ ένα εσωτερικό σημείο (ρητό) του οριζόντιου τμήματος, τότε η τάξη του L στο x_0 είναι ίση με 3. Πράγματι, αν ε είναι μικρότερο από τους αριθμούς p /q , 1- p/q και 1/q, τότε το σύνορο, κάθε ανοικτού συνόλου διαμέτρου μικρότερης του ε και που περιέχει το x_0, τέμνει τα τρία ευθύγραμμα τμήματα που ξεκινούν από το x_0. Όπως παραπάνω για τα άρρητα σημεία αποδεικνύεται ότι το σημείο x_0 έχει οσοδήποτε μικρή περιοχή που το σύνορο της αποτελείται από τρία σημεία, τα οποία ανήκουν στα κλειστά τμήματα που ξεκινούν από το x_0.

Συνεπώς, η τάξη της καμπύλης L στο σημείο x_0 είναι το πολύ 3. Άρα, και από τις δύο παραπάνω εκτιμήσεις, συνάγουμε ότι η τάξη της L στο x_0 είναι ίση με 3.

Παράδειγμα 11. Η καμπύλη C κατασκευάζεται ως εξής: Σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο με μήκος πλευράς 1, ενώνουμε τα μέσα των πλευρών και αφαιρούμε τα εσωτερικά σημεία του τριγώνου που σχηματίσαμε από τις ευθείες των μέσων. Το υπολειπόμενο σύνολο αποτελείται από τρία τρίγωνα, τα οποία ονομάζουμε τρίγωνα πρώτης τάξης. Δουλεύουμε ανάλογα για το κάθε τρίγωνο πρώτης τάξης.

Ενώνουμε τα μέσα των πλευρών του τριγώνου και αφαιρούμε τα εσωτερικά σημεία του που σχηματίσαμε από τις ευθείες των μέσων. Ανάλογα εργαζόμαστε στα τρίγωνα δεύτερης τάξης και παίρνουμε 27 τρίγωνα τρίτης τάξης. Συνεχίζοντας την διαδικασία, παίρνουμε για κάθε φυσικό αριθμό n ένα σύνολο, το οποίο αποτελείται από 3^n τρίγωνα n-οστης τάξης (Σχήμα 18). Το υπολειπόμενο σύνολο C, ύστερα από όλη την παραπάνω διαδικασία, είναι ένα συνεχές, διότι είναι τομή συνεχών, της οποίας το πρώτο συνεχές αποτελείται από τρία τρίγωνα πρώτης τάξης, το δεύτερο από εννέα τρίγωνα δεύτερης τάξης, το τρίτο από 27 τρίγωνα τρίτης τάξης κ.λ.π Κάθε συνεχές περιέχεται στο προηγούμενο, συνεπώς η τομή τους από Θεώρημα 1 § 6, Κεφ.ΙΙ, είναι επίσης συνεχές.
Το συνεχές αυτό C είναι μία καμπύλη. Για να πειστούμε, θα δείξουμε ότι τα σημεία του C έχουν τάξη διακλάδωσης 2, 3, ή 4. Στις γωνίες του αρχικού τριγώνου το C έχει τάξη 2. Αυτό ισχύει διότι για κάθε n, το σύνορο μιας $(1/2)^n$ - περιοχής μιας κορυφής αποτελείται από δύο σημεία, άρα η τάξη διακλάδωσης του συνεχούς C στις κορυφές είναι το πολύ 2. Επιπλέον, το σύνορο κάθε αρκετά μικρού ανοικτού συνόλου, περιέχει μια κορυφή του αρχικού τριγώνου, τέμνει σίγουρα δύο πλευρές, οι οποίες ξεκινούν από την κορυφή αυτή.

Άρα, η τάξη διακλάδωση του C στις κορυφές είναι τουλάχιστον 2. Από τις δύο αυτές εκτιμήσεις, έχουμε ότι η τάξη διακλάδωσης στα εξεταζόμενα σημεία είναι ίση με 2. Στις κορυφές των τριγώνων όλων των τάξεων, τα οποία θεωρήσαμε κατά τις διαμερίσεις του αρχικού τριγώνου, η τάξη διακλάδωσης είναι 4. Έστω x μία από αυτές τις κορυφές. Τότε για κάθε n, το σύνορο της $1/2^n$-περιοχής του x για αρκετά μεγάλο n αποτελείται από τέσσερα



Σχήμα 18

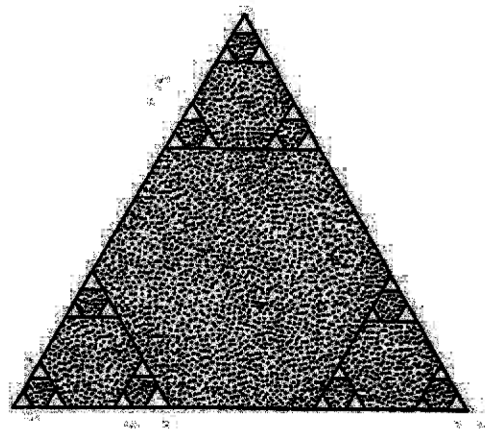
σημεία - τις κορυφές δύο τρίγωνων n-οστης τάξης των οποίων το x είναι κοινή κορυφή. Συνεπώς, η τάξη διακλάδωσης του C στο x είναι το πολύ 4. Επιπλέον, αν k ο μικρότερος αριθμός για τον οποίον η κορυφή είναι k-οστης τάξης, τότε υπάρχει ένα ακόμη τρίγωνο k-οστης τάξης για το οποίο το σημείο x αποτελεί επίσης κορυφή. Συνεπώς, ξεκινούν από το x τέσσερα ευθύγραμμα τμήματα, των οποίων κοινό σημείο είναι το x. Το σύνορο αρκετά μικρού ανοικτού συνόλου, που περιέχει το x θα τέμνει αυτά τα ευθύγραμμα τμήματα και έτσι η τάξη διακλάδωσης είναι τουλάχιστον 4. Αυτές οι δυο εκτιμήσεις μας οδηγούν στο ότι η τάξη διακλάδωσης του C στις κορυφές των τριγώνων όλων των τάξεων είναι ίση με 4.

Αν τελικά x τυχαίο σημείο του C, το οποίο δεν είναι ούτε κορυφή αρχικού τριγώνου, ούτε κορυφή κανενός των τριγώνων που προέκυψαν κατά τη διαμέριση, τότε η τάξη διακλάδωσης του C στο σημείο αυτό είναι ίση με 3. Πράγματι, για κάθε n υπάρχει τρίγωνο n-οστης τάξης στο οποίο το σημείο x ανήκει είτε στην πλευρά είτε στο εσωτερικό του. Το σύνορο του ανοικτού συνόλου που αποτελείται από σημεία του C, που ανήκουν στο εσωτερικό του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο τάξης n κύκλου και περιέχει το x, αποτελείται από τρία σημεία - τις γωνίες του αναφερόμενου τριγώνου Αφού μπορούμε να ελαχιστοποιήσουμε την διάμετρο του ανοικτού συνόλου με κατάλληλη επιλογή του n, έπεται ότι η τάξη διακλάδωσης του C στο σημείο x δεν είναι μεγαλύτερη του 3.

Επιπλέον, μπορούμε για κάθε σημείο x να βρούμε μία ακολουθία τριγώνων τα οποία περιέχουν το x και να έχουν την ιδιότητα: το κάθε τρίγωνο να περιέχεται στο προηγούμενο. Το σημείο x είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου των κορυφών των τριγώνων αυτής της ακολουθίας. Κάθε δυο γειτονικά τρίγωνα της ακολουθίας έχουν ακριβώς μια κοινή κορυφή (ενώ οι άλλες δύο κορυφές του επομένου τριγώνου ανήκουν στις πλευρές του προηγούμενου). Από τα τμήματα των πλευρών του τριγώνου, των οποίων το μέσο είναι το παραπάνω σημείο x, μπορούμε να κατασκευάσουμε τρεις απείρων όρων τεθλασμένες γραμμές, για τις οποίες το x είναι σημείο συσσώρευσης. Αυτές οι τεθλασμένες δημιουργούνται από τμήματα των πλευρών, καθώς περνάμε από τις κορυφές ενός τριγώνου στις κορυφές του επόμενου τριγώνου. Οι τρεις αυτές τεθλασμένες δεν έχουν κοινά σημεία. Αφού το x είναι σημείο συσσώρευσης της καθεμίας πρέπει το σύνορο μιας αρκετά μικρής περιοχής του x, να τέμνει κάθε μια από αυτές. Συνεπώς, η τάξη διακλάδωσης του C στο x είναι τουλάχιστον 3. Άρα, και από τις δύο εκτιμήσεις, έχουμε ότι η τάξη διακλάδωσης του C στο x είναι ίση με 3.

Παρατήρηση 1. Έστω C_1, C_2 δύο συνεχή, ομοιόμορφα με το συνεχές C του παραδείγματος 11, τα οποία δεν έχουν άλλα κοινά σημεία, εκτός από τις κορυφές του αρχικού τρίγωνου του συνεχούς C. Τότε η ένωση $C_1 \cup C_2$ είναι ένα παράδειγμα καμπύλης στην οποία τα σημεία έχουν τάξη διακλάδωσης 3 ή 4.

Παρατήρηση 2. Με μια μικρή τροποποίηση του προηγούμενου παραδείγματος μπορούμε να έχουμε μια καμπύλη C της οποίας τα σημεία έχουν τάξη διακλάδωσης 2 ή 3. Εδώ, αρκεί αντί για το μέσο της πλευράς του τριγώνου, να πάρουμε τα κλειστά ευθύγραμμα τμήματα, των οποίων τα σημεία απέχουν από τις γωνίες κατά το 1/3 της πλευράς, και να αφαιρέσουμε τα αντίστοιχα κανονικά εξάγωνα που προκύπτουν, (Σχήμα 19).



Σχήμα 19

§ 4.3 Καμπύλες πεπερασμένης τάξης διακλάδωσης

Τα σημεία της καμπύλης που έχουν τάξη διακλάδωσης μεγαλύτερης του 2 (συμπεριλαμβανομένων και των σημείων μη φραγμένης και άπειρης τάξης διακλάδωσης), τα καλέσαμε (§ 2) σημεία διακλάδωσης, ενώ τα σημεία τάξης διακλάδωσης 1, ακραία σημεία της καμπύλης.

Τα αναφερόμενα παραδείγματα δείχνουν πόσο πολύμορφη μπορεί να είναι η δομή μιας καμπύλης, ανάλογα με τα σημεία διακλάδωσης που υπάρχουν. Δεν μπορούμε να αναφερθούμε εδώ σε όλες τις ιδιότητες των καμπυλών που εξαρτώνται από την διακλάδωση. Θα περιοριστούμε σε εκείνες τις καμπύλες που έχουν μόνο πεπερασμένο πλήθος σημείων διακλάδωσης, και σε καθένα από αυτά η τάξη διακλάδωσης είναι πεπερασμένη. Αυτές οι καμπύλες λέγονται *καμπύλες πεπερασμένης διακλάδωσης*.
Σ' αυτήν την παράγραφο, θα αναφέρουμε μια σειρά Θεωρημάτων που δείχνουν πόσο βαθιά χαρακτηρίζει μια καμπύλη η τάξη διακλάδωσης. Θα δούμε π.χ ότι μια καμπύλη, η οποία δεν περιέχει καθόλου σημεία διακλάδωσης, δηλ. τα σημεία της καμπύλης έχουν τάξη διακλάδωσης ίση με 1 ή 2 είναι ένα απλό τόξο, δηλ. τοπολογική εικόνα ενός ευθυγράμμου τμήματος ή μια απλή κλειστή καμπύλη, δηλ. τοπολογική εικόνα ενός κύκλου. Συγκεκριμένα, αν η τάξη διακλάδωσης όλων των σημείων μιας καμπύλης είναι ίση με 2, τότε η καμπύλη είναι μια απλή κλειστή και αν έχει ακραία σημεία (αποδεικνύεται ότι πρέπει να είναι ακριβώς δύο), τότε η καμπύλη είναι ένα απλό τόξο. Θα δούμε επίσης ότι αν μια καμπύλη πεπερασμένης διακλάδωσης διασπάται σε πεπερασμένο πλήθος τόξων, τα οποία δεν έχουν άλλα κοινά σημεία, εκτός ίσως των τελικών σημείων.

Οι αποδείξεις όλων αυτών των ισχυρισμών βασίζονται στο ότι κάθε ζεύγος σημείων μιας καμπύλης πεπερασμένης διακλάδωσης, μπορεί να συνδεθεί με ένα απλό τόξο, που περιέχεται στην καμπύλη. Αυτός ο ισχυρισμός συνάγεται από (Θεώρημα 2, § 2.6) το ότι, μια καμπύλη πεπερασμένης διακλάδωσης είναι ένα τοπικά συνεκτικό συνεχές. Με την απόδειξη αυτής της πρότασης θα αρχίσουμε τις αποδείξεις των Θεωρημάτων που αναφέραμε παραπάνω.

Θεώρημα 1. *Αν ένα συνεκτικό σύνολο R έχει σε κάθε σημείο του πεπερασμένη τάξη διακλάδωσης, τότε είναι τοπικά συνεκτικό.*

Για την απόδειξη αυτής της πρότασης θα χρειαστούμε το επόμενο Λήμμα

Λήμμα: *Αν ένα σύνολο M δεν μπορεί να παρασταθεί ως ένωση n συνεκτικών, συνόλων (δηλ. όταν σε κάθε παράσταση του συνόλου M ως ένωση n όρων, τουλάχιστον ένας από αυτούς δεν είναι συνεκτικός), τότε μπορεί να παρασταθεί ως ένωση n+1 ανά δύο ξένων και κλειστών (στο M) συνόλων.*

Πράγματι, αν το M δεν είναι συνεκτικό, τότε μπορεί, βάσει του ορισμού, να παρασταθεί το M ως ένωση δυο ξένων μεταξύ τους κλειστών συνόλων (στο M). Αυτό αποδεικνύει το Λήμμα για n=1. Έστω ότι το Λήμμα ισχύει, για τους αριθμούς από 1 έως n-1. Θα το αποδείξουμε για τον αριθμό n.

Θα υποθέσουμε ότι δεν μπορούμε να παραστήσουμε το M ως ένωση n συνεκτικών όρων. Τότε επίσης δεν μπορεί να παρασταθεί ως ένωση n-1 συνεκτικών όρων. Από την επαγωγική υπόθεση έπεται ότι το M είναι ένωση

$$(n-1) + 1 = n$$

ξένων μεταξύ τους, κλειστών συνόλων

$$A_1, A_2, ..., A_n.$$

Αφού όμως το M δεν παριστάνεται ως ένωση n συνεκτικών συνόλων τουλάχιστον ένα από τα σύνολα A_1, ..., A_n δεν είναι συνεκτικό, Έστω ότι τέτοιο είναι το σύνολο A_n. Τότε μπορεί να παρασταθεί ως ένωση δύο μη κενών, ξένων, κλειστών στο A_n άρα και στο M συνόλων A_n^* και A_{n+1}. Κατ' αυτόν τον τρόπο δείχνουμε ότι το σύνολο M είναι ένωση των n+1 κλειστών (στο M) συνόλων

$$A_1, A_2, ..., A_n^*, A_{n+1}$$

τα οποία είναι ξένα ανά δύο. Έτσι αποδείχτηκε το Λήμμα.

Θα περάσουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 1. Πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε σημείο x του R και για κάθε ανοικτό σύνολο U, που περιέχει το σημείο x, υπάρχει ανοικτό, συνεκτικό σύνολο V, το οποίο περιέχει το x και περιέχεται στο U. Εφόσον το σύνολο R έχει σε κάθε σημείο του πεπερασμένη τάξη διακλάδωσης, υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο G που περιέχει το x, και η κλειστότητα του περιέχεται στο U και τέτοιο ώστε το σύνορο του αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος σημείων

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n.$$

Καταρχήν θα δείξουμε ότι το σύνολο

$$\overline{G} = G \cup \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \ldots \cup \alpha_n$$

είναι η ένωση n συνεκτικών συνόλων. Έστω ότι αυτό δεν συμβαίνει. Τότε λόγω του Λήμματος, το $\overline{G}$ είναι η ένωση n+1 μη κενών, ξένων μεταξύ τους, κλειστών (στο $\overline{G}$, άρα και στο R) συνόλων:

$$B_1, B_2, \ldots, B_{n+1}$$

Κανένα από τα κλειστά αυτά σύνολα δεν περιέχεται εξολοκλήρου στο ανοικτό σύνολο G, διότι αν πχ. B_i περιεχόταν στο G, τότε θα μπορούσαμε να παραστήσουμε όλο το σύνολο R, ως ένωση δύο μη κενών, ανά δύο ξένων κλειστών συνόλων B_i και

$$B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_{i-1} \cup B_{i+1} \cup \ldots . B_{n+1} \cup (R\text{-}G)$$

που είναι αδύνατο αφού το R είναι συνεκτικό. Αν όμως κανένα από τα σύνολα

$$B_1, B_2, \ldots, B_{n+1}$$

των οποίων η ένωση είναι το σύνολο $\overline{G}$ που δεν περιέχεται εξολοκλήρου στο G, τότε καθένα από αυτά περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του συνόρου του G δηλ. ένα από τα σημεία.

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n.}$$

Αυτό όμως είναι αδύνατο, διότι έχουμε n+1 σύνολα B_i, όμως μόνο n σημεία α_i και σύνολα B_i δεν έχουν κοινά σημεία. Το άτοπο αυτό μας οδηγεί στο αποτέλεσμα ότι το είναι ένωση συνόλων

$$(1) \qquad F_1, F_2, \ldots, F_k$$

που είναι κλειστά και συνεκτικά.

Έστω C_x η ένωση εκείνων από τα σύνολα του συστήματος (1), τα οποία περιέχουν το σημείο x. Το σημείο x ανήκει στο G. Αν αφαιρέσουμε από το G τα σύνολα του (1), τα οποία δεν περιέχουν το x, λαμβάνουμε το ανοικτό σύνολο H (x), το οποίο περιέχει το x και το ίδιο περιέχεται στο C_x.

Έτσι, αποδείξαμε ότι για κάθε σημείο x του R και για κάθε ανοικτό σύνολο U που το περιέχει, υπάρχει ένα συνεκτικό σύνολο C_x και ένα ανοικτό σύνολο H (x), έτσι ώστε να ισχύει

$$x \in H(x) \subset C_x \subset U.$$

Έστω V το μεγαλύτερο συνεκτικό σύνολο το οποίο περιέχει το x και περιέχεται στο U (το V είναι η ένωση όλων των συνεκτικών συνόλων τα οποία περιέχουν το x και περιέχονται στο σύνολο U). Κατ' αρχήν ισχύει

$$C_x \subset V \subset U.$$

Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο V είναι ανοικτό. Έστω y τυχαίο σημείο του V. Τότε από τα παραπάνω υπάρχει ένα συνεκτικό σύνολο C_y και ένα ανοικτό σύνολο H(y), για το οποίο ισχύει

$$y \in H(y) \subset C_y \subset U$$

Αφού V και C_y είναι συνεκτικά σύνολα τα οποία έχουν κοινό το σημείο y και περιέχονται στο U, η ένωση τους

$$V \cup C_y$$

είναι επίσης ένα συνεκτικό σύνολο, το οποίο περιέχεται στο U. Αφού όμως το V είναι το μεγαλύτερο συνεκτικό σύνολο, το οποίο περιέχει το x και περιέχεται στο U. Πρέπει να ισχύει: $C_y \subset V$. Άρα για κάθε σημείο y του συνεκτικού συνόλου V υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο H(y), έτσι ώστε

$$y \in H(y) \subset V.$$

Συνεπώς, μπορούμε να παραστήσουμε το V ως ένωση ανοικτών συνόλων H(y), άρα το V είναι ανοικτό σύνολο. Οπότε για κάθε σημείο x και για κάθε ανοικτό σύνολο U που το περιέχει, υπάρχει ένα συνεκτικό ανοικτό σύνολο V το οποίο περιέχει το x και περιέχεται στο U. Έτσι αποδείχθηκε ότι το R είναι τοπικά συνεκτικό.

Θεώρημα 2. *Αν το συνεχές C έχει δύο σημεία a και b τάξη διακλάδωσης 1, και σε όλα τα υπόλοιπα σημεία τάξη διακλάδωσης 2, τότε το C είναι ένα απλό τόξο με άκρα a και b.*

Απόδειξη. Αφού το C έχει σε όλα τα σημεία του πεπερασμένη τάξη διακλάδωσης είναι τοπικά συνεκτικό. Συνεπώς, τα σημεία του μπορούν να συνδεθούν ανά δυο με ένα απλό τόξο (Θεώρημα 2 στην § 2. 6) που περιέχεται στο C. Έστω ab ένα απλό τόξο του C, το οποίο συνδέει τα a και b. Ας υποθέσουμε ότι δεν ισχύει ο ισχυρισμός του Θεωρήματος. Έστω ότι το C περιέχει ένα σημείο c, το οποίο δεν ανήκει στο τόξο ab. Αφού το C είναι συνεκτικό, μπορούμε να ενώσουμε το c με το a μέσω ενός τόξου ac, το οποίο περιέχεται στο C. Καλούμε d το τελευταίο σημείο του τόξου ac (με κατεύθυνση από το a στο c), στο οποίο το τόξο ac τέμνει το τόξο ab. Αν το d δεν συμπίπτει ούτε με το a ούτε με το b, τότε το C στο σημείο c έχει τάξη διακλάδωσης μεγαλύτερη ή ίση του 3. Πράγματι, αν G ένα ανοικτό σύνολο το οποίο περιέχει το d και είναι τόσο μικρό ώστε τα a, b και c να μην ανήκουν σ' αυτό, τότε από το d ξεκινούν τρία τόξα, τα οποία ανά δύο δεν έχουν κοινά σημεία: Τα τόξα da και db, τα οποία αποτελούν μαζί το τόξο ab, και το τόξο dc. Όμως da, db, dc είναι συνεκτικά σύνολα τα οποία συνδέουν το d (που ανήκει στο G) με τα a,b και c (τα οποία δεν ανήκουν στο G), άρα θα τέμνουν το σύνορο του G. Συνεπώς το σύνορο κάθε αρκετά μικρού, ανοικτού συνόλου, στο οποίο ανήκει το d, περιέχει τουλάχιστον τρία σημεία, αντίθετα με τον ισχυρισμό ότι το σημείο d του συνεχούς C έχει τάξη διακλάδωσης 1 ή 2. Πρέπει λοιπόν το σημείο d να ταυτίζεται με το a ή το b.

Ας υποθέσουμε ότι d = a. Τότε το σύνορο του ανοικτού συνόλου G, το οποίο περιέχει το d και είναι τόσο μικρό ώστε τα σημεία b και c να είναι εκτός του συνόλου, τέμνει τόσο το τόξο ab καθώς και το τόξο ac. Συνεπώς, το σημείο d (το οποίο από υπόθεση ταυτίζεται με το a) έχει τάξη διακλάδωσης 2. Αυτό όμως έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση του Θεωρήματος ότι η τάξη διακλάδωσης του C στο σημείο a είναι ίση με 1 .

Η υπόθεση ότι το συνεχές C έχει κάποιο σημείο, το οποίο δεν ανήκει στο τόξο ab, μας οδήγησε σε άτοπο. Άρα το C ταυτίζεται με το ab.

Θεώρημα 3. *Αν όλα τα σημεία του συνεχούς C έχουν τάξη διακλάδωσης 2, τότε το C είναι μία απλή κλειστή καμπύλη.*

Απόδειξη. Παραπάνω (§ 2. 6) δείξαμε ότι κάθε συνεχές C έχει τουλάχιστον δύο σημεία a και b, τα οποία δεν το αποσυνθέτουν. Αυτό σημαίνει ότι τα σύνολα C-{a} και C-{b} είναι συνεκτικά. Επειδή στην περίπτωση μας όλα τα σημεία του C έχουν πεπερασμένη τάξη διακλάδωσης, το C είναι τοπικά συνεκτικό. Έτσι μπορούμε, τα σημεία του C να τα ενώσουμε ανά δύο με ένα τόξο του C. Ενώνουμε τα σημεία a και b, (τα οποία δεν διαμερίζουν το C) με ένα τέτοιο τόξο ab. Στο C υπάρχει σημείο c το οποίο δεν ανήκει στο ab. Και τούτο διότι, αν το C ταυτιζόταν με το ab, τότε τα σημεία a και b του συνεχούς αυτού θα είχαν τάξη διακλάδωσης 1, σε αντίθεση με την υπόθεση του Θεωρήματος. Αφού το a δεν διαμερίζει το C, δηλ. το ανοικτό σύνολο C-{a) είναι συνεκτικό και ανοικτό, είναι επίσης τοπικά συνεκτικό, καθόσον όλα τα σημεία του έχουν πεπερασμένη τάξη διακλάδωσης. Άρα, τα σημεία b και c του C-{a} μπορούν να ενωθούν με ένα απλό τόξο bc που περιέχεται στο C και στο οποίο δεν ανήκει το a. Κατά τον ίδιο τρόπο μπορούν τα σημεία a και c, του ανοικτού συνεκτικού και τοπικά συνεκτικού ανοικτού συνόλου C-{b} να ενωθούν με ένα απλό τόξο ac του C, στο οποίο να μην ανήκει το b.

Θα δείξουμε πρώτα ότι τα τόξα ab, bc και ca, εκτός των τελικών σημείων τους, δεν έχουν άλλα κοινά σημεία. Θα δείξουμε ότι, π. χ. τα ca και cb δεν έχουν άλλο κοινό σημείο εκτός του c. Διαφορετικά, έστω d το τελευταίο σημείο του ca (περνώντας από το c προς το a) , το οποίο ανήκει στο cb. Έστω G τυχαίο ανοικτό σύνολο το οποίο περιέχει το d και τόσο μικρό ώστε τα a, b και c να μην ανήκουν στο G. Από το d ξεκινούν τρία τόξα: db, dc (στα οποία το d τέμνει το τόξο bc) και το da. Τα τόξα αυτά, εκτός του σημείου d, δεν έχουν άλλα κοινά σημεία, ενώ το καθένα έχει κοινό σημείο με το σύνορο του συνόλου G. Για τον λόγο αυτό, το σημείο d του συνεχούς C έχει τάξη διακλάδωσης τουλάχιστον 3, αντίθετα από την υπόθεση. Το άτοπο δείχνει ότι τα ca και cb εκτός του b δεν έχουν άλλα κοινά σημεία.

Αποδείξαμε ότι τα τόξα ab, bc και ca εκτός των τελικών σημείων τους δεν έχουν άλλα κοινά σημεία. Έτσι, η ένωση τους είναι μια απλή κλειστή καμπύλη L. Θα δείξουμε τώρα, ότι το C δεν έχει άλλα σημεία εκτός από τα σημεία της L. Υποθέτουμε ότι ισχύει το αντίθετο: Έστω d ένα σημείο του C που δεν ανήκει στο L. Συνδέουμε το d με τυχαίο σημείο του L, π.χ. το a, με ένα απλό τόξο ad. Έστω e το τελικό σημείο του ad (περνώντας από το a προς το d), στο οποίο το ad τέμνει την καμπύλη L. Με την μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε πολλές φορές παραπάνω δείχνουμε ότι η τάξη διακλάδωσης του e είναι τουλάχιστον 3, αντίθετα με την υπόθεση. Συνεπώς, δεν υπάρχει στο C σημείο d, το οποίο δεν ανήκει στο L. Άρα, το C ταυτίζεται με την απλή κλειστή καμπύλη L.

Θεώρημα 4. *Αν μια καμπύλη δεν περιέχει σημεία διακλάδωσης , δηλ. η τάξη διακλάδωσης όλων των σημείων της είναι το πολύ 2, τότε η καμπύλη είτε είναι απλό τόξο, είτε απλή κλειστή καμπύλη.*

Απόδειξη. Αν η καμπύλη L, που δεν έχει σημεία διακλάδωσης δεν έχει τελικά σημεία (δηλ. η τάξη διακλάδωσης σε όλα τα σημεία είναι ίση με 2), τότε βάσει του Θεωρήματος 3, το L είναι απλή κλειστή καμπύλη. Αν όμως μία καμπύλη L δεν έχει σημεία διακλάδωσης και έχει ακριβώς δύο τελικά σημεία, τότε η L βάσει Θεωρήματος 2 είναι απλό τόξο.

Άρα, για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, πρέπει να δείξουμε ότι: *Αν η καμπύλη L δεν περιέχει σημεία διακλάδωσης, τότε ή δεν έχει καθόλου τελικά σημεία ή έχει, ακριβώς δύο τελικά σημεία.*

Για τον σκοπό αυτό αρκεί να αποδείξουμε τα παρακάτω:

1^o. *Αν η καμπύλη L έχει μόνο ένα τελικό σημείο, τότε έχει τουλάχιστον ένα σημείο διακλάδωσης.*

2^o. *Αν το πλήθος των τελικών σημείων της L είναι μεγαλύτερο του 2, τότε το L έχει τουλάχιστον ένα σημείο διακλάδωσης.*

Θα αποδείξουμε καταρχήν το πρώτο. Υποθέτουμε ότι η καμπύλη L έχει μόνο ένα τελικό σημείο, το a. Τότε, αφού το L είναι συνεχές, υπάρχουν στο L, βάσει του Θεωρήματος 3, § 6, Κεφ. II, δύο σημεία τα οποία δεν διαμερίζουν το L. Έστω λοιπόν b ένα σημείο του L, διαφορετικό από το a και το οποίο δεν διαμερίζει το L. Αντίθετα από τον ισχυρισμό του 1^o, υποθέτουμε ότι το L δεν έχει σημεία διακλάδωσης, δηλ. η τάξη διακλάδωσης του L σε όλα τα σημεία του είναι το πολύ 2. Τότε το L είναι τοπικά συνεκτικό, οπότε ανά δύο τα σημεία του ενώνονται με ένα απλό τόξο. Συνδέουμε το a και το b με ένα απλό τόξο ab που περιέχεται στην L. Στο L υπάρχουν σημεία που δεν ανήκουν στο ab, διότι αν το L ταυτιζόταν με το ab τότε το L, αντίθετα με την υπόθεση, θα είχε δύο τελικά σημεία τα a, b.

Έστω c σημείο του L που δεν ανήκει στο ab. Αφού το b δεν διαμερίζει την καμπύλη δηλ. το σύνολο L-{b} είναι συνεκτικό (και τοπικά συνεκτικό), μπορούμε να συνδέσουμε το a και c με ένα απλό τόξο ac που περιέχεται στην L-{b}. Αυτό το τόξο δεν περιέχει το b, Έστω d το τελικό σημείο του τόξου ac (περνώντας από το a προς το c), στο οποίο αυτό συναντά το τόξο ab. Το σημείο d δεν μπορεί να ταυτίζεται με το a, διότι στην περίπτωση αυτή η τάξη διακλάδωσης του a θα ήταν ίση με 2, αντίθετα με την υπόθεση, ότι το a είναι τελικό σημείο. Συνεπώς το d είναι διάφορο του a, άρα έχει τάξη διακλάδωσης τουλάχιστον 3, διότι το σύνορο κάθε αρκετά μικρού ανοικτού συνόλου που περιέχει το d, έχει με το L τουλάχιστον τρία κοινά σημεία: Δύο από αυτά ανήκουν στα da και db, τα οποία μαζί σχηματίζουν το τόξο ab, και το τρίτο ανήκει στο dc. Συνεπώς, το d είναι σημείο διακλάδωσης. Αυτό αποδεικνύει τον πρώτο ισχυρισμό.

Για την απόδειξη του δεύτερου, χρειαζόμαστε τον επόμενο Λήμμα.

Λήμμα : *Ένα τελικό σημείο δεν αποσυνθέτει μια καμπύλη, δηλ. το σύνολο που προκύπτει μετά την αφαίρεση ενός τελικού σημείου της είναι συνεκτικό.*

Πράγματι, έστω a τελικό σημείο της καμπύλης L. Υποθέτουμε ότι το σύνολο L-{a} (ανοικτό στην L) δεν είναι συνεκτικό. Τότε γράφεται ως ένωση δύο μη κενών, ξένων μεταξύ τους , ανοικτών συνόλων G και H.

Καθένα των κλειστών συνόλων

$$\overline{G}=G\cup\{a\},\quad \overline{H}=H\cup\{a\}$$

είναι συνεκτικό. Πράγματι, αν το σύνολο $\overline{G}=G\cup\{a\}$ δεν ήταν συνεκτικό, θα ήταν ένωση δύο μη κενών, κλειστών, ξένων μεταξύ τους συνόλων P και Q. Έστω ότι το a ανήκει στο Q. Τα σύνολα P και $Q\cup\overline{H}$ είναι κλειστά, δεν έχουν κοινά σημεία και η ένωση είναι το σύνολο L. Αυτό βρίσκεται σε αντίφαση με την υπόθεση συνεκτικότητας του L. Συνεπώς το $\overline{G}$ είναι συνεκτικό. Κατά τον ίδιο τρόπο δείχνουμε και την συνεκτικότητα του $\overline{H}$.

Έστω U ένα τυχαίο ανοικτό σύνολο, το οποίο περιέχει το a και περιέχει σημεία των συνόλων $\overline{G}$ και $\overline{H}$. Επειδή τα σύνολα $\overline{G}$ και $\overline{H}$ είναι συνεκτικά και έχουν κοινό σημείο το a, πρέπει το σύνορο του U να έχει κοινά σημεία με το $\overline{G}$ καθώς και με το $\overline{H}$. Όμως, τα σύνολα αυτά έχουν κοινό σημείο μόνο το a. Έπεται ότι σύνορο του U τέμνει το $\overline{G}$ και το $\overline{H}$ σε δύο διαφορετικά σημεία. Εδώ όμως έχουμε άτοπο, αφού κατά την υπόθεση, η τάξη διακλάδωσης της καμπύλης L στο σημείο a είναι ίση με 1. Συνεπώς, το σύνολο L-{a} είναι συνεκτικό. Έτσι αποδείχτηκε το Λήμμα.

Περνάμε στην απόδειξη του ισχυρισμού 2^o. Έστω a, b, c τρία τελικά σημεία της καμπύλης L. Με βάση το Λήμμα κανένα από αυτά δεν αποσυνθέτει την καμπύλη L, που σημαίνει ότι καθένα των συνόλων L-{a}, L-{b}, L-{c} είναι συνεκτικό.

Ας υποθέσουμε ότι η καμπύλη L δεν έχει σημεία διακλάδωσης. Τότε είναι τοπικά συνεκτική. Άρα τα σημεία a, b και c μπορούν ανά δύο να ενωθούν με ένα απλό τόξο το οποίο δεν θα περιέχει το τρίτο σημείο. Τα τρία τόξα ab, ac και bc έχουν ανά δύο κοινά σημεία, τα οποία είναι διάφορα των τελικών σημείων τους, διότι αν π.χ. τα ab και cb είχαν κοινό σημείο μόνο το b, τότε η L στο b θα έχει τάξη διακλάδωσης 2 (αντίθετα με την υπόθεση ότι το b είναι τελικό σημείο). Συνεπώς τα ab και bc έχουν κοινό σημείο διάφορο του b. Έστω d το τελευταίο σημείο του τόξου bc, το οποίο ανήκει στο τόξο ab. Τότε, όπως παραπάνω, αποδεικνύεται ότι το L έχει στο d τάξη διακλάδωσης τουλάχιστον 3. Αυτό σημαίνει ότι το d είναι σημείο διακλάδωσης και έτσι αποδεικνύεται ο δεύτερος ισχυρισμός.

Το επόμενο Θεώρημα δείχνει την γεωμετρική σημασία της τάξης διακλάδωσης στην περίπτωση που αυτή είναι πεπερασμένη.

Θεώρημα 5. *Αν μία καμπύλη L έχει πεπερασμένη τάξη διακλάδωσης και η τάξη διακλάδωσης στο σημείο p της L είναι n, τότε το σημείο p είναι κοινό σημείο n απλών τόξων που περιέχονται στην L και τέτοιων ώστε, κάθε αρκετά μικρή περιοχή του p, που δεν έχει άλλα σημεία διακλάδωσης , αποτελείται από σημεία αυτών των n τόξων.*

Απόδειξη. Αφού το L έχει πεπερασμένο πλήθος σημείων διακλάδωσης και σε καθένα από αυτά η τάξη είναι πεπερασμένη ενώ στο p έχει τάξη διακλάδωσης n, από το Θεώρημα 1, έπεται ότι η καμπύλη L είναι τοπικά συνεκτική και συνεπώς υπάρχει ανοικτό συνεκτικό σύνολο G που περιέχει το p και τέτοιο ώστε η κλειστότητά του δεν περιέχει άλλα σημεία διακλάδωσης εκτός από το p. Το σύνορο του G αποτελείται από n σημεία. Έστω $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ τα συνοριακά σημεία του G. Επισυνάπτοντας στο σύνολο G το σύνορο του έχουμε ένα τοπικά συνεκτικό συνεχές (βλ. Θεώρημα 1), το οποίο περιέχει το σημείο p. Τα σύνολα της μορφής:

$$U_i = G \cup \{\alpha_i\} = \overline{G} \cup \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots \alpha_n\}$$

είναι συνεκτικά και ανοικτά στο $\overline{G}$ για i=1, 2, ..., n. Αφού το $\overline{G}$ είναι τοπικά συνεκτικό, το p μπορεί να συνδεθεί με καθένα από τα σημεία α_i (i = 1 , 2,... ,n) μέσω ενός απλού τόξου $p\alpha_i$, που περιέχεται στο U_i. Το τόξο $p\alpha_i$ δεν περιέχει λοιπόν κανένα από τα σημεία

$$\alpha_k, \quad k=1, 2,..., n \quad k \neq i$$

Τα τόξα $p\alpha_i$ (i = 1, 2,. .. , n), εκτός του σημείου p, δεν έχουν άλλα κοινά σημεία. Πράγματι, έστω ότι $p\alpha_1$ και $p\alpha_2$ έχουν κοινό σημείο, διαφορετικό από p. Τότε αυτό δεν θα μπορούσε να ήταν ούτε το σημείο α , ούτε το σημείο α_2. Έστω b το τελευταίο σημείο του τόξου $p\alpha_1$ (περνώντας από το p προς το α), το οποίο συγχρόνως ανήκει στο $p\alpha_2$. Τότε το σημείο αυτό έχει τάξη διακλάδωσης 3, διότι από το σημείο αυτό ξεκινούν τρία τόξα, τα οποία ανά δύο δεν έχουν κοινά σημεία: τα τόξα bp και $b\alpha_2$, τα οποία μαζί αποτελούν το τόξο $b\alpha_2$, και το τόξο $b\alpha_1$. Αυτό όμως είναι αδύνατο, αφού το b ανήκει στο και κατά την προϋπόθεση κανένα σημείο του $\overline{G}$, διάφορο του p, δεν είναι σημείο διακλάδωσης.

Έτσι αποδείξαμε ότι από το p ξεκινούν τουλάχιστον n απλά τόξα, τα οποία, εκτός του p, δεν έχουν άλλα κοινά σημεία. Θα δείξουμε τώρα ότι κάθε σημείο του ανοικτού συνόλου G ανήκει σε κάποιο από αυτά τα τόξα. Διαφορετικά θα υπήρχε ένα σημείο c που ανήκει στο G, το οποίο δεν ανήκει σε κανένα από τα τόξα $p\alpha_1$, $p\alpha_2$, ..., $p\alpha_n$. Τότε θα μπορούσε να συνδεθεί το c με το p μέσω ενός απλού τόξου που περιέχεται στο G. Όπως παραπάνω, μπορούμε να δείξουμε ότι το pc, εκτός του p, δεν έχει άλλο κοινό σημείο με κανένα από τα τόξα $p\alpha_1$, $p\alpha_2$, ..., $p\alpha_n$. Έστω ε-περιοχή του σημείου p, όπου το ε είναι η μικρότερη από τις αποστάσεις του σημείου p από τα σημεία α_1, α_2, ..., α_n, c. Τότε το σύνορο κάθε ανοικτού συνόλου που περιέχει το p και περιέχεται στην ε-περιοχή του p, περιέχει τουλάχιστο n+1 σημεία διότι καθένα από τα τόξα $p\alpha_1$, $p\alpha_2$, ..., $p\alpha_n$, pc, έχει ένα σημείο στο εσωτερικό του G και άλλο σημείο εκτός του G, άρα τέμνει το σύνορο του G. Αυτό όμως δεν είναι δυνατόν, αφού το L έχει στο p τάξη διακλάδωσης n . Το άτοπο φανερώνει ότι κάθε σημείο c του ανοικτού συνόλου G ανήκει σ' ένα από τα τόξα $p\alpha_1$, $p\alpha_2$, ..., $p\alpha_n$ και έτσι αποδείχθηκε το θεώρημα μας.

Παρατήρηση. Από το αποδειχθέν Θεώρημα συνάγεται ειδικά το εξής:

Αν σε μια καμπύλη πεπερασμένης διακλάδωσης το p έχει τάξη διακλάδωσης 2, τότε ξεκινούν από αυτό δύο τόξα, τα οποία δεν έχουν άλλα κοινά σημεία εκτός του p και σε κάθε αρκετά μικρή συνεκτική περιοχή του p είναι ένα τόξο (χωρίς τελικά σημεία), στο οποίο το p είναι εσωτερικό του σημείο.

Αν το p είναι τελικό σημείο, σε μια καμπύλη πεπερασμένης διακλάδωσης, τότε ξεκινά από αυτό ένα μόνο απλό τόξο, του οποίου τελικό σημείο είναι το p και σε κάθε αρκετά μικρή περιοχή του p είναι ένα "ημιανοικτό" τόξο, δηλ. τόξο χωρίς άκρο, το οποίο έχει τελικό σημείο το p.

Η δομή των καμπυλών πεπερασμένης διακλάδωσης γίνεται σαφής από επόμενο Θεώρημα.

Θεώρημα 6. *Μία καμπύλη L γράφεται ως ένωση πεπερασμένου πλήθους απλών τόξων, τα οποία εκτός των τελικών σημείων τους δεν έχουν άλλα κοινά σημεία, εάν και μόνο εάν, η καμπύλη L έχει πεπερασμένη τάξη διακλάδωσης.*

Αφήνουμε στον αναγνώστη να αποδείξει την αναγκαία συνθήκη. Θα αποδείξουμε απλώς και μονό ότι η συνθήκη είναι ικανή[1]. Θα χρειαστούμε γι αυτό το επόμενο Λήμμα:

Λήμμα: *Μια καμπύλη L πεπερασμένης διακλάδωσης έχει πεπερασμένο πλήθος τελικών σημείων.*

Έστω ότι ισχύει το αντίθετο δηλ. το σύνολο των τελικών σημείων είναι άπειρο. Επειδή το L είναι τοπικά συνεκτικό, μπορεί κάθε σημείο p του L να ενωθεί με καθένα τελικό σημείο μέσω ενός τόξου.

Απόδειξη (της πολωνικής μετάφρασης[2]**):** Αν μεταξύ αυτών των τόξων υπήρχε άπειρο πλήθος τέτοιων τα οποία να μην έχουν άλλα κοινά σημεία εκτός από το p, τότε η τάξη

---

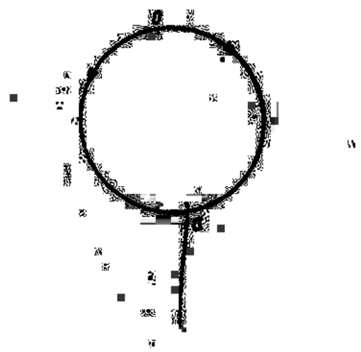
[1] Στην περίπτωση που δεν εμφανίζονται καθόλου σημεία διακλάδωσης τούτο είναι σαφές βάσει του Θεωρήματος 4. Οπότε μπορούμε τόσο στην απόδειξη του Λήμματος, όσο και του Θεωρήματος 6, να υποθέσουμε την ύπαρξη ενός τουλάχιστον σημείου διακλάδωσης. Τότε το Σχήμα 20 είναι αντιπροσωπευτικό.

[2] (Η απόδειξη της γερμανικής μετάφρασης). Εφόσον, η τάξη διακλάδωσης του L σε όλα τα σημεία του είναι πεπερασμένη, ξεκινά από το O, σε μια μικρή περιοχή πεπερασμένο πλήθος τόξων, τα οποία είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους έχοντας μόνο κοινό σημείο το O. Επίσης, θα πρέπει το άπειρο πλήθος των τόξων που ξεκινούν από το O σε σχέση με το άπειρο πλήθος των διαφόρων τελικών σημείων, να έχει ως αρχικό κομμάτι το τμήμα ενός τόξου του πεπερασμένου πλήθους που ξεκινούν από το O, κι έστω ότι αυτά είναι τα τόξα Op_1, Op_2, ..., Op_n , ... με τελικά σημεία τα p_i . Για i = 2, 3, ... έχουμε ως τελικό με κατεύθυνση από το O στο p_i το α_i , το οποίο είναι κοινό για το Op_i και το Op_1,. Όλα αυτά τα α_i είναι σημεία διακλάδωσης του L.

Κατά την υπόθεση για το L μπορεί να εμφανιστούν στην ακολουθία α_2, α_3, … μόνο πεπερασμένο πλήθος διαφόρων σημείων και για τουλάχιστον ένα, έστω α, πρέπει να υπάρχει μία άπειρη υπακολουθία Op_1', Op_2', ... της ακολουθίας Op_1, Op_2, ... έτσι ώστε το α να είναι κοινό τελικό σημείο όλων των p_i' (με κατεύθυνση από το O στο p_i') και το Op_1, τα O και α είναι σίγουρα διάφορα και το α είναι σημείο διακλάδωσης του L. Επαναλαμβάνουμε τον τελικό τρόπο τώρα για το α και την ακολουθία Op_1', Op_2', ... τότε υπάρχει στο Op_1' ένα σημείο διακλάδωσης διάφορο του α και του O, διακλάδωσης στο p θα ήταν μη-φραγμένο ή άπειρο (δηλαδή αριθμήσιμο ή με πληθικό αριθμό του συνεχούς). Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει άπειρο πλήθος τόξων που έχουν άλλα κοινά σημεία εκτός από το p, τότε απ΄ αυτό προκύπτει ότι σε καθένα από αυτά τα τόξα υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο διακλάδωσης.

Και στις δυο περιπτώσεις έχουμε αντίφαση με την υπόθεση του Λήμματος. Άρα το Λήμμα έχει αποδειχθεί.

Περνάμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 6. Καταρχήν δείχνουμε ότι αν η καμπύλη L είναι απλή κλειστή καμπύλη, τότε από κάθε σημείο p του οποίου η τάξη διακλάδωσης είναι 2, ξεκινούν δύο τόξα, που δεν έχουν άλλα κοινά σημεία εκτός από το p και των οποίων τα άκρα είτε είναι τελικά σημεία, είτε σημεία διακλάδωσης του L. Στην τελευταία περίπτωση μπορεί το άκρο των δύο τόξων να είναι το ίδιο σημείο διακλάδωσης. Τότε τα δύο τόξα μαζί σχηματίζουν μια απλή κλειστή γραμμή (Σχήμα 20).



Σχήμα 20

Σύμφωνα με την παρατήρηση της προηγούμενης σελίδας, από κάθε σημείο p του οποίου η τάξη διακλάδωσης είναι 2, ξεκινούν δύο τόξα τα οποία εκτός του p δεν έχουν άλλα κοινά σημεία και στο εσωτερικό τους δεν περιέχουν σημεία διακλάδωσης της καμπύλης L. Έστω pa και pb τα μέγιστα τόξα με αυτήν την ιδιότητα[3]. Τότε τα τελικά σημεία αυτών των τόξων (δηλ. τα σημεία a και b) δεν είναι σημεία με τάξη διακλάδωσης 2.

δηλ. το α'. Συνεχίζοντας την διαδικασία καταλήγουμε σε ένα άπειρο πλήθος σημείων διακλάδωσης, το οποίο είναι άτοπο ως προς την υπόθεση για το L. Οπότε το L έχει μόνο πεπερασμένο πλήθος τελικών σημείων.

[3] Η ύπαρξη, η ενός μέγιστου τόξου pa της αναμενόμενης μορφής προκύπτει ως εξής: Έστω δύο τόξα pa΄ και pb΄, τα οποία ξεκινούν από το p συγκεκριμένης περιοχής του εσωτερικού του L, δεν έχουν κοινά σημεία διακλάδωσης και με μόνο κοινό σημείο το p. Απαλείφουμε προς το παρόν τα εσωτερικά σημεία του pb΄ και το εσωτερικό των σφαιρών

Πραγματικά, αν το a είχε τάξη διακλάδωσης 2, τότε θα μπορούσαμε να συμπεριλάβουμε το a στο εσωτερικό ενός τόξου cd, το οποίο θα ήταν περιοχή του a και δεν θα περιέχει κανένα σημείο διακλάδωσης της L. Επιπλέον, ένα των τελικών σημείων αυτού του τόξου, έστω c, θα ανήκει στο pa, ενώ ταυτόχρονα το άλλο άκρο d δεν θα ανήκε στο pa. Τα τόξα pa και ad δεν έχουν εκτός του a κοινά σημεία. Έτσι το pd είναι απλό τόξο, το οποίο στο εσωτερικό του δεν περιέχει σημεία διακλάδωσης της L. Όμως το pa περιέχεται στο τόξο pd συνεπώς το τόξο pa δεν είναι μέγιστο, και τέτοιο που να μην περιέχει στο εσωτερικό του σημεία διακλάδωσης. Από το άτοπο αυτό συμπεραίνουμε ότι η τάξη διακλάδωσης του L στο a δεν μπορεί να είναι ίση με 2 δηλ. το a είναι είτε τελικό σημείο είτε σημείο διακλάδωσης.

Αν υποθέσουμε ότι τα τελικά σημεία α και b των δυο μέγιστων τόξων τα οποία ξεκινούν από το p και στο εσωτερικό τους δεν περιέχουν σημεία διακλάδωσης, είναι τελικά σημεία της καμπύλης L, τότε το L είναι ένα απλό τόξο ab. Πράγματι, αν το σύνολο L-ab δεν ήταν κενό, τότε θα ήταν κλειστό (όπως και το ab), διότι κάθε αρκετά μικρή περιοχή ενός τυχαίου σημείου του τόξου ab περιέχει μόνο σημεία αυτού του τόξου. Συνεπώς, η καμπύλη L που θα ήταν ένωση δύο κλειστών ξένων μεταξύ τους και μη κενών συνόλων των ab και L-ab, κάτι που είναι αδύνατο, αφού η L είναι συνεκτική.

Έτσι, δείξαμε ότι κάθε σημείο p της καμπύλης L ανήκει σ΄ ένα από τα τόξα των οποίων τα τελικά σημεία είναι είτε σημεία διακλάδωσης (τα οποία μπορεί και να ταυτίζονται), είτε ένα σημείο διακλάδωσης και ένα τελικό σημείο. Το πλήθος των τόξων αυτών είναι πεπερασμένο, διότι το L, από την προϋπόθεση, έχει μόνο πεπερασμένο πλήθος σημείων διακλάδωσης, και βάσει του παραπάνω Λήμματος έχει και πεπερασμένο πλήθος τελικών σημείων. Όμως, βάσει του Θεωρήματος 5, από κάθε σημείο διακλάδωσης ξεκινά μόνο πεπερασμένο πλήθος τόξων και από ένα τελικό σημείο μόνο ένα τόξο. Άρα, το πλήθος των όλων αυτών των τόξων είναι πεπερασμένο.

εκείνων που βρίσκονται γύρω από το πεπερασμένο πλήθος των σημείων διακλάδωσης και έχουν ακτίνα $\varepsilon = \varepsilon_1 > 0$ με κλειστές θήκες που είναι μεταξύ τους και ως προς το pa ξένα. Έτσι, προκύπτει το συμπαγές L_1 με συνεκτικό άξονα το K_n το οποίο περιέχει το pa'. Αν από το ε πάρουμε την μονότονη μηδενική ακολουθία (ε_n), τότε κάθε φορά προκύπτει ένα συμπαγές L_n με συνεκτικό άξονα K_n που συμπεριλαμβάνει το pa'. Οι (L_n) και (K_n) είναι μονότονες αύξουσες ακολουθίες συνόλων. Τότε όμως και το τοπολογικό όριο του (K_n), εννοούμε την κλειστή θήκη της ένωσης $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, είναι συνεχές, άρα μια καμπύλη και μάλιστα ένα τόξο, του οποίου το ένα τελικό σημείο είναι το p και το άλλο του σημείο το καλούμε a. Συνεπώς το μέγιστο τόξο που περικλείει το pa', κατά τον ζητούμενο τρόπο, είναι το pa. Ανάλογα βρίσκουμε και το pb.

Αφού, η τάξη διακλάδωσης των εσωτερικών σημείων κάθε τέτοιου τόξου είναι ίση με 2, τότε ανά δύο τα τόξα αυτά δεν έχουν κοινά σημεία, εκτός, ίσως των τελικών σημείων.

Είδαμε ότι η κυκλική περιφέρεια (και γενικά κάθε απλή κλειστή καμπύλη) έχει την ιδιότητα, η τάξη διακλάδωσης σε όλα τα σημεία της έχει παντού την ίδια τιμή 2. Τίθεται η ερώτηση, αν υπάρχουν και άλλες καμπύλες στις οποίες η τάξη διακλάδωσης όλων των σημείων είναι σταθερή και διαφορετική του 2. Αποδεικνύεται ότι αυτό δεν συμβαίνει για κανέναν, φυσικό αριθμό $n > 2$. Ισχύει μάλιστα το επόμενο:

Θεώρημα 7. *Αν όλα τα σημεία μιας καμπύλης L έχουν τάξη διακλάδωσης τουλάχιστον n, τότε υπάρχει στην L ένα σημείο του οποίου η τάξη διακλάδωσης είναι τουλάχιστον 2n-2.*

Θα αποδείξουμε την πρόταση στην παρακάτω μορφή: *Αν όλα τα σημεία μιας καμπύλης L έχουν τάξη διακλάδωσης μικρότερη του 2n-2, τότε υπάρχει στο L ένα σημείο του οποίου η τάξη διακλάδωσης είναι μικρότερη του n.*

Απόδειξη. Έστω A_0 τυχαίο ανοικτό σύνολο στο L. Αφού η τάξη διακλάδωσης κάθε σημείου του L είναι μικρότερη του 2n-2, υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο G, το οποίο περιέχεται μαζί με την κλειστότητα του στο A_0 και το σύνορο του αποτελείται από λιγότερο του 2n-2 σημεία. Έστω α_0 ένα συνοριακό σημείο του G. Επειδή $\overline{G}$ περιέχεται στο A_0, και το σύνορο του G, περιέχεται στο A_0. Άρα, ειδικότερα το σημείο α_0 ανήκει στο A_0. Αφού το A_0 είναι ανοικτό σύνολο, υπάρχει θετικό ε ώστε η ε-περιοχή του α_0 να περιέχεται στο A_0. Επιλέγουμε το ε έτσι ώστε να είναι μικρότερο του $(1/2)\delta_0$, όπου δ_0 είναι η διάμετρος του A_0 και μικρότερο από τη μισή απόσταση του σημείου α_0 από τα υπόλοιπα συνοριακά σημεία του G.

Αφού η καμπύλη L έχει σε όλα της τα σημεία και ειδικότερα, στο α_0, τάξη διακλάδωσης μικρότερη του 2n-2, υπάρχει ανοικτό σύνολο U που περιέχει το α_0, το οποίο περιέχεται στην ε/2-περιοχή του α_0, και του οποίου το σύνορο περιέχει λιγότερα από 2n-2 σημεία. Έστω k το πλήθος των οριακών σημείων του U, τότε

$$k < 2n-2.$$

Το σύνολο U μαζί με την κλειστότητα του περιέχεται στο A_0. Πράγματι, για κάθε σημείο x του συνόλου U, έχουμε

$$\rho(\alpha_0,x) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon,$$

συνεπώς το x ανήκει στην ε-περιοχή του α_0, άρα και στο A_0.

Η διάμετρος του U είναι μικρότερη του $\delta_0/2$. Πραγματικά, αν x και y είναι σημεία του U, τότε

$$\rho(x,y) \le \rho(\alpha_0,x) + \rho(\alpha_0,y) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon < (1/2)\delta_0$$

και έτσι ισχύει για την διάμετρο του U η ανισότητα

$$\delta(U) \le \varepsilon < (½)\delta_0$$

Η κλειστότητα $\overline{U}$ του U εκτός του α_0, δεν περιέχει συνοριακά σημεία του συνόλου G. Πράγματι, αν x σημείο του , τότε ισχύει

$$\rho(\alpha_0,x) < \varepsilon$$

και το ε ήταν επιλεγμένο έτσι ώστε να είναι μικρότερο από το μισό της απόστασης του σημείου α_0 από τα υπόλοιπα συνοριακά σημεία του συνόλου G.

Έστω H το ανοικτό συμπλήρωμα του $\overline{G}$,

$$H = L - \overline{G}$$

Θεωρούμε τα ανοικτά σύνολα

$$U \cap G \quad \text{και} \quad U \cap H.$$

Έχουμε την εξής σχέση

$$U = (U \cap G) \cup (U \cap Fr(G)) \cup (U \cap H).$$

Ισχύει όμως

$$U \cap Fr(G) = \{\alpha_0\}$$

και έτσι έχουμε

$$U = (U \cap G) \cup \{\alpha_0\} \cup (U \cap H)$$

Το σύνορο του ανοικτού συνόλου $U \cap G$ περιέχεται στην ένωση των συνόρων των συνόλων U και G:

$$Fr(U \cap G) \subset Fr(U) \cup Fr(G).$$

Από τα συνοριακά σημεία του G, όμως, μόνο το σημείο α_0 μπορεί να ανήκει στο σύνορο του U G, από τα οριακά σημεία του U, μόνο τα σημεία τα οποία ανήκουν στο G. Οπότε

$$Fr(U \cap G) \subset (Fr(U) \cap G) \cup \{\alpha_0\}.$$

Κατά τον ίδιο τρόπο έχουμε

$$Fr(U \cap H) \subset (Fr(U) \cap H) \cup \{\alpha_0\}.$$

Αφού το σύνορο του U αποτελείται από k σημεία, δηλ. είναι πεπερασμένο σύνολο, άρα και τα σύνολα

$$G \cap Fr(U) \quad \text{και} \quad H \cap Fr(U)$$

είναι πεπερασμένα, και πόσο μάλλον τα σύνολα

$$Fr(U \cap G) \quad \text{και} \quad Fr(U \cap H).$$

Υποθέτουμε ότι το σύνορο $U \cap G$ αποτελείται από p σημεία και το σύνορο του $U \cap H$ από q σημεία. Τότε το σύνολο $Fr(U) \cap G$ περιέχει τουλάχιστον p-1 σημεία και το σύνολο $Fr(U) \cap H$ περιέχει τουλάχιστον q-1 σημεία. Επειδή όμως κάθε σημείο του L ανήκει σε ένα από τα σύνολα G, H ή Fr(G) και τα σύνορα των U και G δεν έχουν κοινά σημεία, συνάγεται ότι κάθε συνοριακό σημείο του U ανήκει είτε στο G είτε στο H. Το πλήθος των σημείων που ανήκει στο σύνορο του U είναι k, το πλήθος των συνοριακών σημείων του U που ανήκουν στο G είναι τουλάχιστον p -1, το πλήθος των συνοριακών σημείων του U που ανήκουν στο H είναι τουλάχιστον q-1. Οπότε έχουμε

$$(p-1)+(q-1) \leq k < 2n-2.$$

Επομένως

$$p+q < 2n .$$

Από την ανισότητα προκύπτει ότι τουλάχιστον ένας αριθμός από τους p και q είναι μικρότερος του n.

Έτσι, παρατηρούμε ότι το σύνορο ενός από τα ανοικτά σύνολα $U \cap G$ ή $U \cap H$ αποτελείται από λιγότερα από n σημεία. Έστω A_1 εκείνο το σύνολο του οποίου το σύνορο αποτελείται από λιγότερα από n σημεία.

Λόγω

$$\overline{A}_1 \subset \overline{U} \subset A_0$$

έχουμε

$$\overline{A}_1 \subset A_0$$

Αφού η διάμετρος του U είναι μικρότερη του $\delta_0/2$, και η διάμετρος δ_1 του A_1, είναι μικρότερη του $\delta_0/2$. Επίσης, το σύνορο του A_1 αποτελείται από λιγότερα από n σημεία.

Αποδείξαμε έτσι ότι *αν μια καμπύλη έχει σε κάθε σημείο της τάξη διακλάδωσης μικρότερη του 2n-2, τότε για κάθε ανοικτό υποσύνολο A_0 της καμπύλης L υπάρχει ανοικτό σύνολο A_1, το οποίο με την κλειστότητα περιέχεται στο A_0 και τέτοιο ώστε η διάμετρός να του είναι μικρότερη, από τη μισή διάμετρο του A_0 και το σύνορο του περιέχει λιγότερα από n σημεία.*

Εφαρμόζοντας αυτό το αποτέλεσμα στο σύνολο A_1 βρίσκουμε ένα σύνολο A_2, του οποίου η κλειστότητα περιέχεται στο A_1 του οποίου η διάμετρος είναι μικρότερη του $\delta_0/4$ και το σύνορο του αποτελείται από λιγότερα από n σημεία. Συνεχίζοντας έτσι, έχουμε την φθίνουσα ακολουθία ανοικτών συνόλων

$$(2) \qquad A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_m \supset \dots,$$

τέτοιων ώστε κάθε σύνολο A_{m+1} με την κλειστότητα του περιέχεται στο προηγούμενο σύνολα A_m:

$$\overline{A}_{m+1} \subset A_m$$

και η διάμετρος του A_m είναι μικρότερη του $\delta_0/2^m$ και το σύνορο του καθενός συνόλου A_m αποτελείται από λιγότερα από n σημεία. Έχουμε ότι, με αυξανόμενο m, οι διάμετροι των συνόλων A_m (δηλ. και των $\overline{A}_m$) τείνουν στο μηδέν. Γι' αυτό τα κλειστά σύνολα

$$\overline{A}_1 \supset \overline{A}_2 \supset \ldots \supset \overline{A}_m \supset \ldots,$$

τα οποία σχηματίζουν φθίνουσα ακολουθία έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο x_0.

Θα αποδείξουμε ότι η καμπύλη στο x_0 έχει τάξη διακλάδωσης μικρότερη του n. Όπως και να έχει επιλεγεί ο θετικός αριθμός ε, μπορεί να βρεθεί φυσικός αριθμός m, έτσι ώστε

$$\delta_0/2^m < \varepsilon,$$

Το ανοικτό σύνολο A_m της ακολουθίας (2) έχει διάμετρο μικρότερη του $\delta_0/2^m<\varepsilon$. Το σύνορο του A_m περιέχει λιγότερα από n σημεία. Προφανώς, το x_0 ανήκει στο A_m. Έτσι, το L έχει στο x_0 τάξη διακλάδωσης μικρότερη του n. Το Θεώρημα 7 αποδείχθηκε.

Από το αποδειχθέν Θεώρημα συνεπάγεται άμεσο ότι καμία καμπύλη εκτός από μια απλή κλειστή καμπύλη δεν έχει σε όλα τα σημεία της την ίδια πεπερασμένη τάξη διακλάδωσης. Πράγματι, αν η τάξη διακλάδωσης της καμπύλης L σε όλα τα σημεία της είναι ίση με n, τότε θα υπήρχε στο L ένα σημείο με τάξη διακλάδωσης τουλάχιστον 2n-2. Όμως για $n \geq 3$ ισχύει

$$2n-2 > n.$$

Όπως έδειξε ο P.S. Urysohn για κάθε $n \geq 2$ υπάρχουν καμπύλες που αποτελούνται μόνο από σημεία τα οποία έχουν τάξη διακλάδωσης n ή 2n-2. Ειδικότερα, για n=3 παίρνουμε την τιμή 2n-2 = 4.

Ένα παράδειγμα μιας καμπύλης η οποία αποτελείται από σημεία των οποίων η τάξη διακλάδωσης είναι 3 ή 4, έχει δοθεί παραπάνω στην παρατήρηση 1 στο Παράδειγμα 11 της § 2.

O Urysohn επίσης έδειξε ότι υπάρχουν καμπύλες οι οποίες σε όλα τα σημεία τους έχουν τάξη διακλάδωσης απεριόριστη, αριθμήσιμη ή με πληθικό αριθμό του συνεχούς. Ως παράδειγμα μιας καμπύλης η οποία σε όλα τα σημεία της έχει τάξη διακλάδωσης του συνεχούς είναι το χαλί του Sierpinski.

§ 4. 4 Μερικές γενικές ιδιότητες των καμπυλών

Στην παράγραφο αυτή θα δώσουμε μια σειρά προτάσεων οι οποίες επεξηγούν τη φύση της έννοιας της καμπύλης και συνδέουν τους γενικούς ορισμούς της καμπύλης με τη διαίσθηση μας η οποία δημιουργήθηκε από τη μελέτη συγκεκριμένων καμπυλών. Εδώ θα περιοριστούμε στην διατύπωση των προτάσεων χωρίς να επεκταθούμε στις αποδείξεις τους.

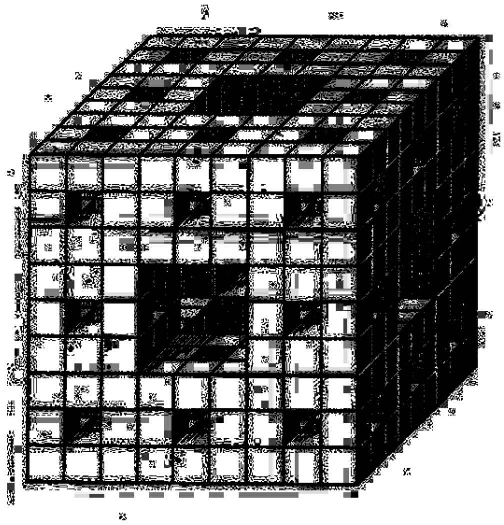
Όπως έχει αναφερθεί, ο ορισμός καμπύλης κατά Urysohn, συμπεριλαμβάνει όχι μόνον τις επίπεδες αλλά και τις καμπύλες του χώρου. Μπορεί κατά λέξη να μεταφερθεί σε οποιονδήποτε n-διάστατο χώρο[1].

Αποδεικνύεται το εξής αξιοσημείωτο: *Για οποιαδήποτε καμπύλη C σε ένα μετρικό χώρο υπάρχει στον ευκλείδειο 3-διαστατό χώρο μια ομοιομορφική με την C, καμπύλη C΄* (δηλ. μια καμπύλη ταυτόσημη από τοπολογική άποψη με τη C). Επιπλέον, τέτοιες καμπύλες C΄ δεν χρειάζεται να αναζητηθούν σε υποσύνολα του 3-διάστατου χώρου, αλλά μόνο στα υποσύνολα ενός, συγκεκριμένου συνεχούς του 3-διάστατου χώρου, το οποίο είναι επίσης μία καμπύλη. Με άλλα λόγια, *στον 3-διάστατο χώρο υπάρχει μία "καθολική" καμπύλη, η οποία δεν περιέχει μόνο κάθε καμπύλη του τρισδιάστατου χώρου, αλλά και κάθε καμπύλη οποιουδήποτε n-διάστατου χώρου*[2].

Λόγω της δυσκολίας της απόδειξης αυτού του Θεωρήματος θα περιοριστούμε στην περιγραφή της κατασκευής της καθολικής καμπύλης που έχει δοθεί από τον Αυστριακό μαθηματικό K. Menger. Ένας κύβος V_0 χωρίζεται σε 27 ίσους κύβους: μετά αφαιρούνται ο "μεσαίος" κύβος και οι έξι κύβοι που έχουν με αυτόν κοινές έδρες. Ως αποτέλεσμα έχουμε το σύνολο V_1, το οποίο αποτελείται από 20 κλειστούς κύβους πρώτης τάξης. Σε κάθε κύβο πρώτης τάξης εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία, δηλ. χωρίζουμε τον καθένα σε 27 κύβους και αφαιρούμε τον μεσαίο κύβο καθώς και τους κύβους που έχουν με αυτόν κοινή έδρα. Το σύνολο V_2, που απομένει, αποτελείται από 400 κύβους δεύτερης τάξης. Εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία για τον καθένα κύβο και λαμβάνουμε το κλειστό σύνολο V_3 που

[1] Καθώς και για κάθε σύνολο, στο οποίο έχει ορισθεί μια έννοια απόστασης, δηλ. σε κάθε μετρικό χώρο.
[2] Και μάλιστα κάθε μετρικού χώρου.

αποτελείται από 20^3 =8.000 κύβους τρίτης τάξης. Η διαδικασία αυτή μπορεί να συνεχιστεί επ' άπειρο (Σχήμα 21).



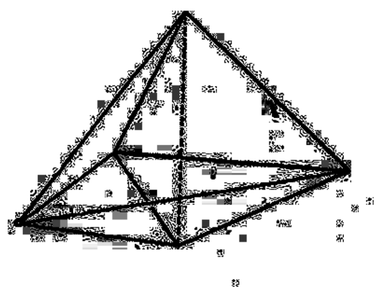
Σχήμα 21

Το σύνολο των σημείων του κύβου V_0, που απομένει ύστερα απ' όλη τη διαδικασία, είναι η αναζητούμενη "καθολική" καμπύλη. Ως τομή μιας άπειρης φθίνουσας ακολουθίας συνεχών είναι και η ίδια συνεχές. Πολύ πιο δύσκολο είναι να αποδείξει κανείς ότι το συνεχές αυτό έχει διάσταση 1, δηλ. ότι πράγματι είναι καμπύλη.

Όπως είδαμε το ρόλο της "καθολικής καμπύλης" για τις επίπεδες καμπύλες παίζει το χαλί του Sierpinski. Προκύπτει όμως το ερώτημα: Γιατί δεν είναι "καθολική" καμπύλη και για όλες τις καμπύλες του χώρου;

Αυτό οφείλεται στο ότι *στον χώρο υπάρχουν καμπύλες οι οποίες δεν μπορούν να απεικονιστούν τοπολογικά σε μία επίπεδη καμπύλη*. Το απλούστερο παράδειγμα τέτοιας καμπύλης είναι η καμπύλη η οποία αποτελείται από τις έξι ακμές ενός τετραέδρου και τις τέσσερις περιοχές που ενώνουν ένα σημείο του χώρου με τις κορυφές του τετραέδρου (Σχήμα 22). Όμως κάθε καμπύλη π.χ. του τετραδιάστατου χώρου μπορεί να απεικονισθεί τοπολογικά σε μια καμπύλη του τρισδιάστατου χώρου. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι η καμπύλη αυτή του τρισδιάστατου χώρου έχει όλες τις ιδιότητες της καμπύλης του τετραδιάστατου χώρου. Όλες εκείνες όμως οι ιδιότητες, που παραμένουν αμετάβλητες υπό μια τοπολογική απεικόνιση, είναι κοινές για τις δύο καμπύλες.

Η γενικότητα του ορισμού της καμπύλης θα μπορούσε φυσικά να οδηγήσει στο ερώτημα, αν η κλάση των αντικειμένων που ορίζουμε ως καμπύλες, δεν είναι πολύ ευρεία. Θα αναφέρουμε δύο ιδιότητες των καμπύλων, οι οποίες δείχνουν σε πιο βαθμό τα σύνολα που ονομάζουμε καμπύλες, αντιστοιχούν στην συνήθη εικόνα που έχουμε για τις καμπύλες, ειδικότερα για την ευθεία και τον κύκλο.



Σχήμα 22

Ένα ευθύγραμμο τμήμα μπορεί να παρασταθεί ως η ένωση πεπερασμένου πλήθους οσοδήποτε μικρών τμημάτων έτσι ώστε κάθε σημείο του τμήματος να μην ανήκει σε περισσότερα από δυο υποτμήματα. Μια ανάλογη ιδιότητα έχει και κάθε καμπύλη, και μάλιστα χαρακτηρίζεται από αυτή την ιδιότητα.

Ισχύει: *Ένα συνεχές C είναι ακριβώς τότε καμπύλη, όταν για κάθε θετικό ε, μπορεί να παρασταθεί ως η ένωση πεπερασμένου πλήθους κλειστών συνόλων, των οποίων η διάμετρος είναι μικρότερη του ε, έτσι ώστε κάθε σημείο του C να ανήκει σε δύο το πολύ από αυτά τα σύνολα.*

Η πρόταση αυτή έχει αποδειχθεί από τον P.S. Urysohn σε γενικότερη μορφή που λέει ειδικά ότι κάθε συνεχές, το οποίο δεν είναι καμπύλη δεν έχει την ιδιότητα αυτή. Αν πάρουμε για παράδειγμα, ένα τετράγωνο και το χωρίσουμε σε αρκετά μικρά κλειστά σύνολα, τότε μπορεί πάντα να βρεθεί ένα σημείο του τετραγώνου, το οποίο ανήκει σε τουλάχιστον τρία από αυτά τα κλειστά σύνολα. Παρόλο αυτά όμως, μπορεί πάντα να βρεθεί μία τυχαία διαμέριση του τετραγώνου σε κλειστά σύνολα, τα οποία έχουν την ιδιότητα ότι κάθε σημείο του τετραγώνου δεν ανήκει σε περισσότερα από τρία σύνολα (Σχήμα 23)

Επιστρέφοντας πάλι στις καμπύλες, διαπιστώνουμε ότι τα αναφερόμενα στο Θεώρημα κλειστά σύνολα της διαμέρισης δεν χρειάζεται να είναι συνεκτικά. Για να είναι συνεχή αρκεί και πρέπει η καμπύλη να είναι συνεχής εικόνα ευθυγράμμου τμήματος.

Μια άλλη ιδιότητα, με την οποία η έννοια της καμπύλης πλησιάζει την συνήθη εικόνα της καμπύλης, είναι ότι κάθε καμπύλη μέσω μιας τυχαίας μικρής μετάθεσης των σημείων της, μπορεί να μεταφερθεί σε μια τεθλασμένη γραμμή. Την διαπίστωση αυτή του P.S. Alexandroff (με πολύ γενικότερες προϋποθέσεις) μπορούμε να διατυπώσουμε ως εξής: *Ένα συμπαγές σύνολο C είναι ακριβώς τότε καμπύλη, όταν για τυχαίο θετικό ε μπορεί να απεικονιστεί σε μια τεθλασμένη γραμμή L, έτσι ώστε κάθε σημείο της L να απέχει από το αντίστοιχο σημείο του C λιγότερο από το ε.*

Για την κυκλική γραμμή είναι ευκολότερο να πραγματοποιηθεί μία τέτοια απεικόνιση. Εγγράφουμε στον κύκλο ένα κανονικό πολύγωνο με αρκετά μεγάλο πλήθος πλευρών και προβάλλουμε κάθε κυκλικό τόξο κάθετα στην αντίστοιχη πλευρά του πολυγώνου. Ανάλογα μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα στην γενική περίπτωση. Βάσει του παραπάνω Θεωρήματος, κάθε καμπύλη μπορεί να διαμεριστεί σε πεπερασμένο πλήθος μικρών κομματιών κατά τέτοιο τρόπο ώστε κανένα, σημείο του να μην ανήκει σε περισσότερα από δύο κομμάτια. Από καθένα κομμάτι επιλέγουμε ένα σημείο. Τα σημεία αυτά, ανά δύο, τα ενώνουμε με ένα ευθύγραμμο τμήμα, όταν τα κομμάτια στα οποία ανήκουν έχουν κοινά σημεία. Έτσι παίρνουμε μια τεθλασμένη γραμμή. Σ' αυτήν την τεθλασμένη γραμμή απεικονίζεται η καμπύλη μας. Αν η διαμέριση είναι αρκετά λεπτή, επιτυγχάνουμε με μια μικρή μεταφορά την μετάθεση των σημείων της καμπύλης στα σημεία της τεθλασμένης γραμμής.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ

Μία καμπύλη διαφέρει από μια επιφάνεια, από ένα στερεό ή ένα τυχαίο συνεχές στο ότι είναι μονοδιάστατο συνεχές, ή όπως ακόμη λέμε έχει διάσταση 1. Έχουμε εξηγήσει το νόημα του όρου αυτού για τα συνεχή. Στο παράρτημα αυτό θα ορίσουμε την διάσταση για τυχαία σύνολα, και θα την εξηγήσουμε μέσα από μια σειρά παραδειγμάτων. Ο γενικός αυτός ορισμός προέρχεται από τον Urysohn[1], και θα το εξηγήσουμε με μια σειρά παραδειγμάτων.

Υποθέτουμε ότι το σύνολο R περιέχεται στην ευθεία, στο επίπεδο ή στον χώρο (ή μάλιστα σε έναν τυχαίο n-διάστατο χώρο[2]). Δεν αποκλείουμε και την περίπτωση, το R να ταυτίζεται με ολόκληρο τον χώρο, αφού ο ορισμός της διάστασης έχει νόημα όχι μονό για υποσύνολα του χώρου αλλά και για όλο τον χώρο. Η διάσταση θα ορισθεί επαγωγικά.

Για καλλίτερη κατανόηση, θα θεωρήσουμε χωριστά τις ειδικές περιπτώσεις 0 και 1 και θα διατυπώσουμε τον γενικό ορισμό μετά από αυτό. Λέμε, ένα σύνολο R *έχει στο σημείο x διάσταση 0*, όταν για κάθε θετικό ε, υπάρχει ανοικτό σύνολο G που περιέχει το x, έχει διάμετρο μικρότερη του ε και το σύνορο του δεν περιέχει κανένα σημείο (δηλ. είναι το κενό σύνολο).

Αν ένα σύνολο R έχει σε κάθε σημείο του διάσταση 0, τότε λέμε ότι το R *έχει διάσταση 0*. Με άλλα λόγια ένα σύνολο R έχει διάσταση 0, όταν κάθε σημείο του ανήκει σε ένα ανοικτό σύνολο οσοδήποτε μικρής διαμέτρου, του οποίου το σύνορο δεν περιέχει κανένα σημείο. Ας θυμηθούμε ότι το σύνορο ενός ανοικτού συνόλου είναι το σύνολο εκείνων των σημείων συσσώρευσης που δεν ανήκουν στο ίδιο το σύνολο. Μπορούμε ακόμη να πούμε ότι το R έχει διάσταση 0, όταν κάθε σημείο του R ανήκει σε τυχαίο ανοικτό σύνολο το οποίο είναι συγχρόνως και κλειστό.

Θα αναφέρουμε μερικά παραδείγματα. Ένα σύνολο R που αποτελείται από ένα ή πεπερασμένο πλήθος σημείων έχει διάσταση 0, αφού στην περίπτωση αυτή κάθε σημείο του είναι συγχρόνως ανοικτό και κλειστό (και έχει διάσταση 0).

Κάθε αριθμήσιμο σύνολο σημείων R έχει διάσταση 0. Πράγματι, έστω x τυχαίο σημείο του R και ε τυχαίος θετικός αριθμός. Έστω r θετικός αριθμός μικρότερος του

[1] Και συγχρόνως από τον K. Menger.

[2] Στις διατυπώσεις των γενικών ορισμών και προτάσεων χρησιμοποιούμε κατά βάση μόνο ότι ο R είναι μετρικός χώρος.

ε/2 και διαφορετικός από όλες τις αποστάσεις μεταξύ του x και των υπολοίπων σημείων του R. Τέτοιος αριθμός r υπάρχει, αφού το R είναι αριθμήσιμο ενώ το διάστημα (0,ε/2) έχει το πλήθος του συνεχούς. Το σύνολο όλων των σημείων του συνόλου R, τα οποία απέχουν από το x λιγότερο από r είναι ένα ανοικτό σύνολο διαμέτρου μικρότερης του ε, στο οποίο ανήκει το x και το σύνορο του δεν περιέχει σημεία του R, διότι όλα τα συνοριακά σημεία έχουν από το x απόσταση r. Όμως τέτοια σημεία δεν υπάρχουν στο R. Συνεπάγεται ότι το σύνολο των σημείων κάθε n-διάστατου ευκλείδειου χώρου, του οποίου όλες οι συντεταγμένες είναι ρητές, έχει διάσταση μηδέν, αφού είναι αριθμήσιμο.

Ειδικότερα, το σύνολο όλων των ρητών σημείων της ευθείας έχει διάσταση 0. Επίσης, το σύνολο όλων των άρρητων σημείων μιας ευθείας έχει διάσταση 0. Πραγματικά, για κάθε άρρητο σημείο x και για κάθε θετικό ε υπάρχουν δύο ρητά σημεία α και b τέτοια ώστε ισχύουν οι ανισότητες:

$$x-\varepsilon/2 < \alpha < x < b < x+\varepsilon/2$$

Το σύνολο G των άρρητων σημείων, που περιέχονται μεταξύ του α και b είναι ανοικτό στο R. Το σύνορο δεν περιέχει κανένα σημείο, διότι κανένα άρρητο σημείο το οποίο δεν ανήκει στο G, δεν μπορεί να είναι σημείο συσσώρευσης του G. Η διάμετρος του G είναι μικρότερη του ε.

Από τα Θεωρήματα που αναφέρονται στα σύνολα διάστασης 0, διατυπώνουμε το παρακάτω που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια:

Ένα συμπαγές σύνολο έχει διάσταση 0 τότε και μόνο τότε, όταν δεν περιέχει κανένα συνεχές έκτος από μονοσύνολα.

Για τον ορισμό ενός συνόλου διάστασης 1 θα εκμεταλλευτούμε τον παραπάνω ορισμό του συνόλου διάστασης 0. Εδώ ακριβώς, θα φανεί ο επαγωγικός χαρακτήρας του ορισμού της διάστασης. Λέμε ότι, ένα σύνολο *R έχει σε ένα σημείο του x διάσταση 1* όταν ικανοποιεί τις ακόλουθες δύο συνθήκες:

1^{o}. Για κάθε θετικό αριθμό ε υπάρχει ένα ανοικτό σύνολο G διαμέτρου μικρότερης του ε, το οποίο περιέχει το x και το σύνορο του είτε είναι κενό είτε έχει διάσταση 0.

2^{o}. Υπάρχει ένας αριθμός $\delta > 0$ έτσι ώστε το σύνορο κάθε ανοικτού συνόλου που περιέχει το x και έχει διάμετρο μικρότερη του δ, να έχει τουλάχιστον ένα σημείο (δηλ. δεν είναι κενό).

Αν περιοριστούμε στο 1^o, θα πάρουμε τα σύνολα διάστασης 0, καθώς και τα σύνολα διάστασης 1. Η συνθήκη 2^o σημαίνει ότι η διάσταση του R στο σημείο x είναι διάφορη του 0. Λέμε, ένα σύνολο R *έχει διάσταση 1*, αν η διάσταση σε κάθε σημείο είναι το πολύ 1 και τουλάχιστον σε ένα σημείο του ίση με 1.

Μια ευθεία έχει σε κάθε σημείο της διάσταση 1. Πράγματι, αν x τυχαίο σημείο της ευθείας και ε τυχαίος θετικός αριθμός, τότε κάθε διάστημα μήκους $\frac{1}{2}$ε, το οποίο περιέχει το x, είναι ένα ανοικτό σύνολο, που ικανοποιεί την συνθήκη 1^o. Το σύνορο του που αποτελείται από δύο σημεία (τα τελικά σημεία του διαστήματος), άρα έχει διάσταση 0. Από την άλλη, κάθε ανοικτό σύνολο της ευθείας αποτελείται από ένα ή περισσότερα διαστήματα[3]. Άρα, το σύνορο αποτελείται από τουλάχιστον δύο σημεία, δηλ. το R δεν είναι σύνολο διάστασης 0. Συνεπώς, ικανοποιείται και η συνθήκη 2^o. Έτσι, η ευθεία έχει σε κάθε σημείο της διάσταση 1. Με ανάλογο τρόπο, αποδεικνύουμε ότι και η περιφέρεια κύκλου έχει σε κάθε σημείο της διάσταση 1. Έστω x τυχαίο σημείο της περιφέρειας κύκλου και ε τυχαίος θετικός αριθμός. Ένα τόξο του κύκλου, το οποίο περιέχει το x και η αντίστοιχη χορδή του έχει μήκος μικρότερο του ε, είναι ανοικτό σύνολο της περιφέρειας κύκλου, περιέχει το x και έχει διάμετρο μικρότερη του ε: το σύνορο αποτελείται από δύο σημεία, (τα τελικά σημεία του τόξου), άρα έχει διάσταση 0.

Επιπλέον, κάθε ανοικτό σύνολο της κυκλικής περιφέρειας αποτελείται από ένα ή περισσότερο τόξα (χωρίς τελικά σημεία). Έτσι το σύνορο ενός τυχαίου ανοικτού συνόλου της κυκλικής περιφερείας έχει τουλάχιστον δύο σημεία. Από το σκεπτικό αυτό προκύπτει ότι η κυκλική γραμμή έχει στο σημείο x διάσταση 1.

Λόγω του παραπάνω Θεωρήματος που λέει, ότι ένα συμπαγές σύνολο έχει διάσταση 0 αν και μόνο αν δεν περιέχει συνεχές, διαφορετικό από μονοσύνολο μπορούμε να πούμε ότι, καμπύλες είναι εκείνα τα συνεχή, τα οποία με την έννοια του ορισμού μας είναι μονοδιάστατα.

Θα περάσουμε στον γενικό ορισμό της διάστασης.

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι η διάσταση ορίζεται επαγωγικά. Είναι βολικό η επαγωγή να ξεκινήσει εδώ από τον αριθμό -1. Αναφέρουμε εδώ την διάσταση -1 μόνο χάριν απλότητας: διάσταση -1 έχει το κενό σύνολο.

[3] Το σύνολο των διαστημάτων, εκ των οποίων αποτελείται ένα ανοικτό σύνολο της ευθείας, μπορεί να είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο.

Υποθέτουμε, όπως συμβαίνει στην περίπτωση των επαγωγικών ορισμών, ότι ήδη γνωρίζουμε ποια σύνολα έχουν διάσταση -1, 0, 1, 2, ..., n-1 και το χρησιμοποιούμε για να πούμε ποια σύνολα έχουν διάσταση n.

Λέμε ότι ένα σύνολο R στο σημείο x έχει διάσταση n όταν:

1^o. Για κάθε ε > 0 υπάρχει ανοικτό σύνολο διαμέτρου μικρότερης του ε, του οποίου το σύνορο είναι είτε σύνολο διάστασης -1 ή διάστασης 0 κλπ ή τελικά έχει διάσταση n-1,

2^o. Υπάρχει δ > 0 τέτοιο ώστε το σύνορο κάθε ανοικτού συνόλου που περιέχει το x και έχει διάμετρο μικρότερη του δ, δεν είναι σύνολο διάστασης -1, ούτε σύνολο διάστασης 0, κλπ ούτε σύνολο διάστασης[4] n-2.

Η συνθήκη 1^o σημαίνει ότι το σύνολο R στο σημείο x έχει είτε διάσταση 0, είτε διάσταση 1, κλπ ή τελικώς διάσταση n, δηλαδή ότι το σύνολο R έχει στο σημείο x διάσταση το πολύ n.

Η συνθήκη 2^o λέει ότι η διάσταση του R στο σημείο x δεν είναι ίση με κανένα από τους αριθμούς 0, 1, ..., n-1.

Λέμε, το σύνολο R *έχει διάσταση n*, όταν σε κάθε σημείο του έχει διάσταση το πολύ n και σε ένα τουλάχιστον σημείο διάσταση ίση με n.

Εφαρμόζουμε ορισμό αυτό στη περίπτωση διάστασης 1. Η συνθήκη 1^o σημαίνει εδώ ότι για κάθε ε > 0 υπάρχει ανοικτό σύνολο το οποίο περιέχει το x, έχει διάμετρο μικρότερη του ε και το σύνορο του έχει διάσταση -1 ή 0. Η συνθήκη 2^o λέει εδώ ότι για αρκετά μικρό δ > 0, το σύνορο κάθε ανοικτού συνόλου που περιέχει το x και είναι διαμέτρου μικρότερης του δ, δεν έχει τη διάσταση -1, δηλ. δεν είναι κενό.

Στην περίπτωση της διάστασης 2, πρέπει κάθε σημείο του συνόλου να ανήκει σε ανοικτό σύνολο διαμέτρου μικρότερης του ε (για τυχαίο ε), του οποίου το σύνορο έχει διάσταση -1, 0 ή 1. Επιπλέον, υπάρχει δ > 0 τέτοιο ώστε το σύνορο κάθε ανοικτού συνόλου, διαμέτρου μικρότερης του δ που περιέχει το x, δεν είναι σύνολο διάστασης -1 ούτε διάστασης 0.

Ας πάρουμε για παράδειγμα το επίπεδο. Εφόσον όλα τα σημεία του είναι κεντρικά σημεία ενός κύκλου οσοδήποτε μικρής διαμέτρου, μπορούμε να πούμε ότι, κάθε σημείο του επιπέδου ανήκει σε οποιοδήποτε ανοικτό σύνολο, του οποίου το σύνορο έχει διάσταση 1. Συνεπώς το επίπεδο έχει σε κάθε σημείο του διάσταση το πολύ 2. Για να δείξουμε ότι η διάσταση του επιπέδου σε κάθε σημείο του είναι ίση με 2, αρκεί να δείξουμε ότι το σύνορο κάθε ανοικτού φραγμένου συνόλου στο επίπεδο, δεν είναι διάστασης -1, ούτε 0.

[4] Από εδώ ακόμα, δεν συνεπάγεται ότι το σύνορο κάθε ανοικτού συνόλου που περιέχει το x και είναι διαμέτρου μικρότερης του δ, θα έχει οπωσδήποτε διάσταση n-1.

Αν το σύνορο ενός ανοικτού συνόλου του επιπέδου ήταν κενό, τότε αυτό θα σήμαινε ότι το ανοικτό σύνολο είναι ταυτόχρονα και κλειστό. Το συμπλήρωμά του θα ήταν επίσης και ανοικτό και κλειστό σύνολο. Όλο το επίπεδο θα χωρίζονταν σε δύο κλειστά σύνολα χωρίς κοινά σημεία. Αυτό όμως είναι αδύνατο, διότι το επίπεδο είναι συνεκτικό.

Το σύνορο ενός ανοικτού φραγμένου συνόλου του επιπέδου δεν μπορεί να είναι ένα μηδενοδιάστατο σύνολο. Πραγματικά, το σύνορο κάθε ανοικτού φραγμένου συνόλου στο επίπεδο είναι κλειστό και φραγμένο, δηλ. συμπαγές. Αν είχε διάσταση 0, τότε βάσει παραπάνω Θεωρήματος για μηδενοδιάστατα σύνολα, δεν θα μπορούσε να περιέχει συνεχές εκτός από μονοσύνολα.. Έχουμε όμως δει ότι κανένα συμπαγές σύνολο του επιπέδου, που δεν περιέχει άλλα συνεχή εκτός από μονοσύνολα, δεν διαμερίζει το επίπεδο. Όμως το σύνορο Fr(G) κάθε ανοικτού συνόλου G του επίπεδου διαμερίζει το επίπεδο R σε δυο ανοικτά, ξένα σύνολα, το G και R-$\overline{G}$:

$$R - Fr(G) = G \cup (R - \overline{G}), \qquad G \cap (R - \overline{G}) = \varnothing.$$

Συνεπώς, δεν μπορεί το σύνορο ενός ανοικτού, φραγμένου συνόλου του επιπέδου να είναι διάστασης 0. Άρα σε κάθε σημείο το επίπεδο έχει διάσταση 2.

Είναι πιο δύσκολο να αποδείξει κανείς ότι ο χώρος έχει σε κάθε σημείο του διάσταση 3. Εδώ διαπιστώνεται ότι δεν υπάρχουν ουσιαστικές διαφορές μεταξύ της περίπτωσης του τρισδιάστατου χώρου και εκείνης του n-διάστατου χώρου όπου n>3. Έτσι, θα αναφερθούμε αμέσως στην περίπτωση[5] διάστασης n.

Δεν είμαστε σε θέση να αποδείξουμε εδώ το Θεώρημα, ότι ο n-διάστατος Ευκλείδειος χώρος έχει διάσταση Urysohn n. Θα αναφέρουμε μόνο τα Θεωρήματα της θεωρίας τοπολογικής διάστασης που μας οδηγούν στο αποτέλεσμα αυτό.

Παρεμπιπτόντως, θα αναφέρουμε τις κύριες γνώσεις του κλάδου αυτού της τοπολογίας. Πολύ εύκολα αποδεικνύονται τα ακόλουθα δύο Θεωρήματα:

Θεώρημα 1. *Αν η διάσταση του συνόλου R είναι ίση με n, τότε κάθε υποσύνολό του R΄ είναι διάστασης το πολύ n.*

Θεώρημα 2. *Δύο ομοιομορφικά μεταξύ τους σύνολα έχουν την ίδια διάσταση.*

[5] Λέγοντας ότι ο Ευκλείδειος χώρος είναι n-διάστατος, εννούμε την λεγόμενη γεωμετρική διάσταση (βλ. Παρατήρηση **§.** 2, Κεφ. II). Πρέπει να την ξεχωρίσουμε από την γενική έννοια τοπολογικής διάστασης (που λέγεται διάσταση των Menger – Urysohn ή επαγωγική διάσταση), που ορίσαμε πιο πάνω. Η θεωρία της τοπολογικής διάστασης είναι ένας από τους κύριους, πλούσιους κλάδους της Τοπολογίας. Ένα σημαντικό της Θεώρημα είναι το γεγονός ότι για τους Ευκλείδειους χώρους, οι έννοιες της γεωμετρικής και της τοπολογικής διάστασης ταυτίζονται.

Ειδικότερα, ένα σύνολο S στο σημείο y έχει την ίδια διάσταση με ένα σύνολο R στο σημείο x, όταν το S είναι ομοιομορφικό στο R και το y αντιστοιχεί στο σημείο x.

Τα Θεωρήματα 1 και 2 αποδεικνύονται επαγωγικά. Από αυτά εύκολα προκύπτει ακόλουθο

Θεώρημα 3. *Ο n-διαστατός Ευκλείδειος χώρος n έχει σε κάθε σημείο του διάσταση Urysohn το πολύ n.*

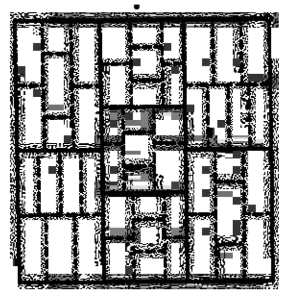
Η όλη δυσκολία είναι να αποδειχτεί ότι η διάσταση Urysohn του n- διάστατου Ευκλείδειου χώρου είναι ακριβώς ίση με n. Υπάρχουν διάφοροι τρόποι απόδειξης αυτού του ισχυρισμού. Θα υποδείξουμε έναν από αυτούς.

Καταρχήν, για την διάσταση Urysohn ισχύει το γενικό:

Θεώρημα 4. *Αν ένα συμπαγές σύνολο R έχει σε κάθε σημείο του διάσταση το πολύ n, τότε για τυχαίο θετικό ε μπορούμε να το καλύψουμε με ένα πεπερασμένο πλήθος κλειστών συνόλων, των οποίων η διάμετρος είναι μικρότερη του ε, έτσι ώστε κάθε σημείο του συνόλου να ανήκει σε το πολύ n+1 σύνολα από αυτά τα σύνολα.*

Δεν θα αποδείξουμε την πρόταση αυτή, αλλά θα αναφέρουμε μερικά παραδείγματα για να την καταλάβουμε καλύτερα. Καταρχήν, παίρνουμε ως σύνολο R ένα τμήμα της ευθείας. Αυτό σε κάθε σημείο του έχει διάσταση 1. Το χωρίζουμε σε τόσα ίσα σημεία ώστε το μήκος κάθε τμήματος να είναι μικρότερο από τον αναφερόμενο θετικό αριθμό ε. Τότε κάθε σημείο του τμήματος είναι είτε εσωτερικό σημείο ενός των αντιστοίχων μικρών τμημάτων είτε κοινό σημείο δύο τέτοιων τμημάτων.

Ας πάρουμε τώρα το τετράγωνο. Αυτό έχει - όπως και όλο το επίπεδο- σε κάθε σημείο του διάσταση 2. Για τυχαίο $\varepsilon > 0$ μπορούμε να το χωρίσουμε σε ορθογώνια, των οποίων οι πλευρές είναι παράλληλες στις πλευρές του τετραγώνου και οι διαγώνιοι έχουν μήκος μικρότερο του ε, έτσι ώστε κανένα από τα σημεία να μην ανήκει σε περισσότερα από τρία ορθογώνια (βλ. Σχήμα 23).



Σχήμα 23.

Αν για το σύνολο R πάρουμε έναν κύβο, τότε μπορούμε να το χωρίσουμε σε ορθογώνια παραλληλεπίπεδα, των οποίων οι έδρες είναι παράλληλες στις έδρες του κύβου και οι διαγώνιες του είναι μικρότερες του ε, έτσι ώστε κάθε σημείο του να μην ανήκει σε περισσότερα από τέσσερα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα.
Ισχύει και το αντίστροφο του Θεωρήματος 4.

Θεώρημα 5. *Αν ένα συμπαγές σύνολο R διαχωρίζεται, για τυχαίο θετικό ε, σε κλειστά σύνολα διαμέτρου μικρότερης του ε, έτσι ώστε κάθε σημείο του R να ανήκει στο πολύ n+1 από αυτά τα σύνολα τότε το σύνολο R έχει το πολύ την διάσταση n.*

Το Θεώρημα 4 και το αντίστροφο του μας δίνουν:

Θεώρημα 6 . *Ένα συμπαγές σύνολο R έχει ακριβώς τότε διάσταση Urysohn n, όταν για κάθε θετικό ε μπορεί να καλυφθεί από ένα σύστημα κλειστών συνόλων διαμέτρου μικρότερης του ε, ώστε κάθε σημείο του R να μην ανήκει σε περισσότερα από n+1 σύνολα αυτού του συστήματος και να υπάρχει θετικό δ έτσι ώστε, για κάθε κάλυψη του R από κλειστά σύνολα διαμέτρου μικρότερης του δ, n+1 απ' αυτά τα σύνολα να έχουν κοινό σημείο.*

Η ιδιότητα αυτή έχει για τη θεωρία της διάστασης πολύ μεγάλη σημασία και γι' αυτό συχνά χρησιμοποιείται ως ορισμός της διάστασης για συμπαγή σύνολα : Λέμε δηλαδή ότι *ένα συμπαγές σύνολο R έχει διάσταση n, όταν για κάθε θετικό ε, μπορεί να καλυφθεί από ένα σύμπλοκο κλειστών συνόλων διαμέτρου μικρότερης του ε, έτσι ώστε κάθε σημείο του R να ανήκει το πολύ σε n+1 σύνολα αυτού του συστήματος, και συγχρόνως για αρκετά μικρό θετικό* *αριθμό ε, σε κάθε αυτού του είδους ε-κάλυψη, υπάρχει σημείο του R που ανήκει σε n+1 σύνολα του.*

Αφού αποδειχθεί η ιδιότητα αυτή για τα σύνολα διάστασης n, αποδεικνύεται ότι ισχύει για κάθε n-διάστατο[6] σύμπλοκο (simplex). Πολύ εύκολα αποδεικνύεται ότι για κάθε ε > 0 ένα τέτοιο σύμπλοκο μπορεί να διαχωριστεί σε πεπερασμένο το πλήθος κλειστά σύνολα διαμέτρου μικρότερης του ε, ώστε κάθε σημείο του να ανήκει το πολύ σε n+1 σύνολα της διαμέρισης.

Εδώ, αρκεί να περικλείσουμε το σύμπλοκο σε ένα n-διάστατο κύβο, και να διαχωρίσουμε τον κύβο σε ορθογώνια παραλληλεπίπεδα διαγωνίου μικρότερης του ε, ώστε κάθε n+2 ορθογώνια παραλληλεπίπεδα να μην έχουν κοινά σημεία. Ως στοιχεία της διαμέρισης του συμπλόκου παίρνουμε τις τομές αυτών των ορθογωνίων με το σύμπλοκο. Το δυσκολότερο τμήμα είναι η απόδειξη του γεγονότος ότι υπάρχει ένα δ > 0 με την ακόλουθη ιδιότητα: Αν οι διάμετροι των κλειστών συνόλων, στα οποία διαχωρίζεται το σύμπλοκο είναι μικρότεροι του δ, τότε υπάρχουν μεταξύ τους n+1 σύνολα τα οποία έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο.

Επειδή ένα σύμπλοκο είναι συμπαγές σύνολο, συνεπάγεται από το παραπάνω και από το Θεώρημα 6 ότι σε ένα n- διάστατο σύμπλοκο τουλάχιστον ένα σημείο του έχει την διάσταση Urysohn n. Έστω ότι αυτό είναι το σημείο x. Τότε όχι μόνο το σύμπλοκο αλλά και όλος ο χώρος ο Ευκλείδειος στο σημείο x έχει διάσταση n.

Πράγματι, όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει, η διάσταση του n - διάστατου Ευκλείδειου χώρου, σε κάθε σημείο του είναι το πολύ n (Θεώρημα 3). Η διάσταση Urysohn του R στο σημείο x δεν μπορεί να είναι μικρότερη από το n, διότι το σύμπλοκο έχει στο σημείο x διάσταση n. Έτσι, συνάγουμε ότι η διάσταση του χώρου στο σημείο x είναι ακριβώς ίση με n (βλέπε Θεώρημα 1).

Άλλωστε ένας n-διάστατος χώρος είναι, ομοιογενής με την έννοια ότι κάθε σημείο του x μπορεί μέσω μιας ομοιομορφικής απεικόνισης του χώρου στον εαυτό του να μεταφερθεί στο σημείο y. Αρκεί να θεωρήσουμε την παράλληλη μεταφορά, η οποία μεταφέρει το σημείο x στο σημείο y. Όμως στο σημείο x ο χώρος έχει διάσταση n,

[6] Ένα μηδενοδιάστατο σύμπλοκο είναι ένα σημείο, μονοδιάστατο ένα ευθύγραμμο τμήμα, δισδιάστατο ένα τρίγωνο και τρισδιάστατο ένα τετράεδρο. Ένα n- διάστατο σύμπλοκο μπορεί να ορισθεί ως το σύνολο των σημείων του n-διάστατου χώρου, του οποίου οι συντεταγμένες ικανοποιούν το σύστημα ανισοτήτων:

$$x_1 \geq 0 , x_2 \geq 0, \dots , x_n \geq 0 \quad \text{και } x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1$$

συνεπώς βάσει Θεωρήματος 2, έχει και στο y διάσταση n. Επειδή το y είναι τυχαίο σημείο, συνεπάγεται ότι ένας n- διάστατος Ευκλείδειος χώρος έχει σε κάθε σημείο του διάσταση n κατά Urysohn.

Αυτός ήταν ένας τρόπος απόδειξης, ότι ο n-διαστατός Ευκλείδειος χώρος σε κάθε σημείο του έχει διάσταση n κατά τον Urysohn. Υπάρχουν και άλλοι τρόποι, όμως όλοι, όπως και αυτός που υποδείξαμε, έχουν τις δυσκολίες τους. Θα αναρωτηθεί κανείς αν αξίζει γενικά ο ορισμός της διάστασης, όταν για την απόδειξη του ισχυρισμού, ότι ο χώρος έχει διάσταση 3 (και η περίπτωση αυτή δεν είναι πιο απλή από την περίπτωση του χώρου διάστασης n) απαιτείται η κατασκευή μιας ολόκληρης θεωρίας.

Ο ορισμός αυτός δικαιώνεται, πρώτον διότι με την βοήθεια του χαρακτηρίζονται βάσει της θεωρίας της διάστασης τυχαία σύνολα ενός n -διάστατου χώρου (είδαμε ένα παράδειγμα στις καμπύλες) και δεύτερον, το οποίο δεν είναι δευτερεύουσας σημασίας, με την χρήση του ορισμού αυτού μπορεί να αποδειχθεί, ότι δύο χώροι διαφορετικών διαστάσεων είναι αδύνατον να μετασχηματίζουν ο ένας τον άλλον μέσω ενός ομοιομορφισμού[7]. Τώρα συνάγεται εύκολα, από το ότι ο n-διάστατος χώρος έχει διάσταση n με την έννοια του Urysohn και δύο ομοιομορφικά μεταξύ τους σύνολα έχουν την ίδια διάσταση. Ο ορισμός μας είναι απαραίτητος ειδικά για να δειχθεί ότι κάθε σημείο του χώρου πρέπει να περιγραφεί από τρεις συντεταγμένες, αν θέλουμε η εξάρτηση των συντεταγμένων από το σημείο και του σημείου από τις συντεταγμένες να είναι συνεχείς.

[7] Η πρόταση αυτή είναι γνωστή ως θεώρημα του αναλλοίωτου της διάστασης και έχει μεγάλη σημασία στα Μαθηματικά.