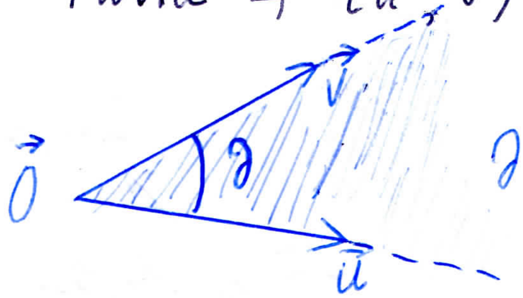
Ανάλυση ΙΙ - Μάθημα 03 - 28/02/2011

Γωνία δύο $(\neq \vec{0})$ διανυσμάτων, μέτρο της. Συνημίτονο, σχέση συνημιτόνου με το εσωτερικό γινόμενο, κάθετα διανύσματα, προβολή διανύσματος σε άλλο.

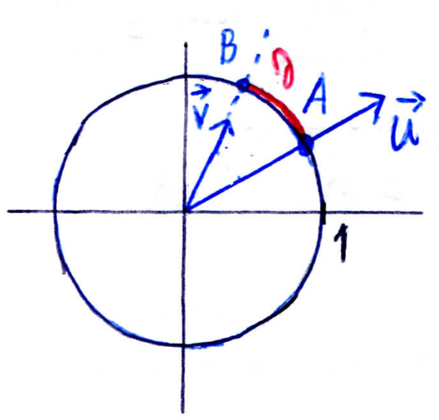
- Γωνία $\measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$, $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}\}$ $(n \geq 2)$



$\theta = \measuredangle(\vec{u}, \vec{v}) =: \{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} : \lambda, \mu \geq 0\}$

- Μέτρο της θ

Τα $\vec{u}, \vec{v}$ ορίζουν ένα επίπεδο E (γενικά), με κέντρο το $\vec{0}$ και ακτίνα $\underline{\underline{1}}$



Η θ τέμνει τον κύκλο σε τόξο $\widehat{AB}$. Το μήκος του $\widehat{AB}$ ορίζεται ως το μέτρο της θ (Ευκλείδης, Αρχιμήδης)

(28/02)

Συμβολίζουμε με 2π το μήκος του κύκλου.
Το μέτρο μιας γωνίας είναι μεταξύ του 0 και του π.
Εάν το $A = B$, τότε $\theta = 0$ // Το μέτρο της γωνίας συμβολίζεται με θ
Αν το $B = -A$, τότε $\theta = \pi$

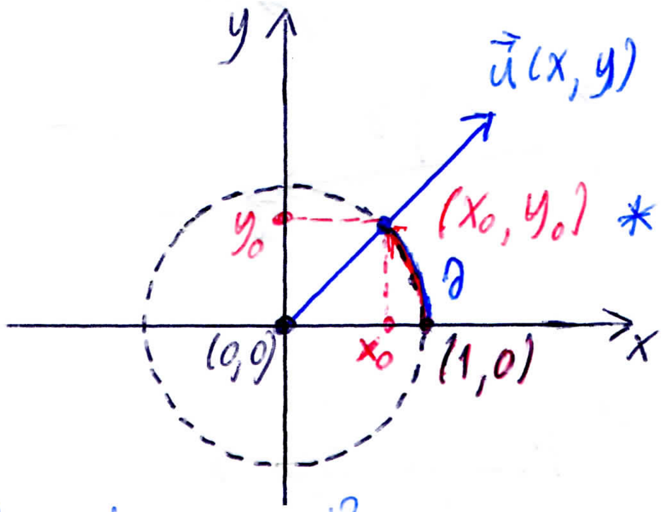
Συνάρτηση συνημιτόνου (Υπενθύμιση)

- Στον $\mathbb{R}^2$

$\vec{u} = (x, y) \neq (0, 0)$

$\theta = \measuredangle \big((1,0), (x,y)\big)$

- $(x_0, y_0) = \dfrac{(x, y)}{\|(x, y)\|}$



Εάν γνωρίζουμε την θ, τότε γνωρίζουμε το x_0 και αντίστροφα.

Δηλ. ορίζεται συν: $[0, \pi] \longrightarrow [-1, +1]$,

- (συν$\theta =: x_0$)

συνάρτηση "1-1" και "επί"

- (ημ$\theta =: y_0$)

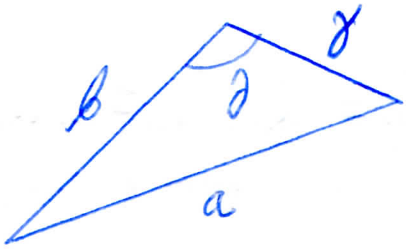
και επεκτείνεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$, συνx

* Βασικές τριγων. ταυτότητες (προκύπτουν από πυθ. θεώρ.)
βλ. Άλγεβρα Β' Λυκείου

- $\text{συν}^2\theta + \text{ημ}^2\theta = 1$
- $\text{ημ}(2\theta) = 2\,\text{ημ}\theta\,\text{συν}\theta$

- Σημείωση: Κινούμαστε σε πεδίο μελέτης της Τριγωνομετρίας (Τα συν, ημ ορίστηκαν από τον Aryabhata περί το 500 μΧ.)

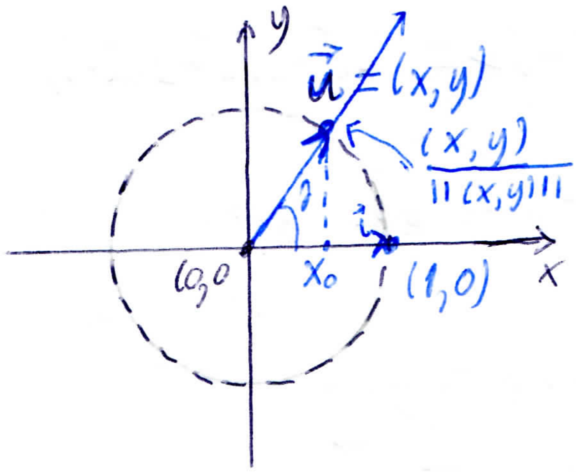
(28/02)



Ισχύει: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\sigma\upsilon\nu\theta$

(Νόμος συνημιτόνων)

(επέκταση του πυθ. θεωρ.)



$\frac{(x,y)}{\|(x,y)\|} = (x_0, y_0) = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$

$x_0 = \sigma\upsilon\nu\theta$

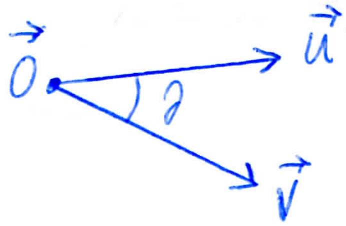
$\Rightarrow (x_0, y_0) \cdot (1,0) = \sigma\upsilon\nu\theta$, $\vec{i} = (1,0)$

$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{i} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{i}\|\,\sigma\upsilon\nu\theta$

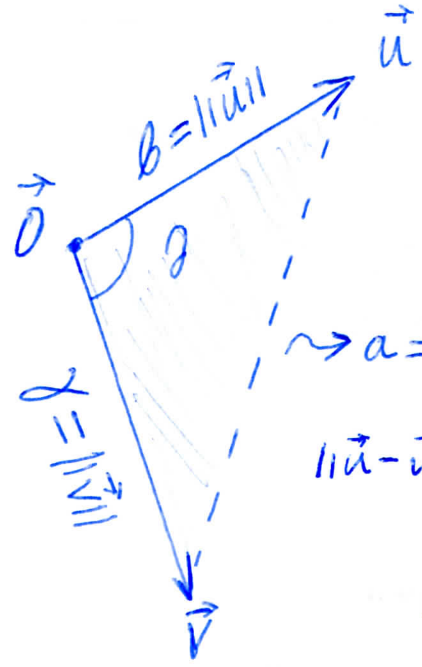
(*) • Ισχύει $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|\,\sigma\upsilon\nu\theta, \quad \theta = \measuredangle(\vec{u}, \vec{v})}$

$\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$

Ιδιαιτέρως αν $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$, τότε $\sigma\upsilon\nu\theta = \vec{u} \cdot \vec{v}$



(3ο μάθημα)



Αποδ

• $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot \text{συν}\theta$

(από ν. συνημ.)

$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \langle \vec{u}-\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}\rangle = \|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2(\vec{u}\cdot\vec{v})$

Άρα, $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\,\text{συν}\theta$.

Ορισμός : Κάθετα διανύσματα.

$\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^n$. $\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

Εάν $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, ισοδύναμα με $\text{συν}\theta=0$, δηλ: $\theta=\frac{\pi}{2}$

Ασκήσεις

1) $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$: $\vec{v}\perp\vec{u}\ \forall\ \vec{u}\in\mathbb{R}^n$

N.δ.ο. $\vec{v}=\vec{0}$

Λύση :

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0\quad\forall\vec{u}\in\mathbb{R}^n$

$\vec{u}=\vec{v}$, $\vec{v}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow \|\vec{v}\|=0 \Rightarrow \vec{v}=\vec{0}$

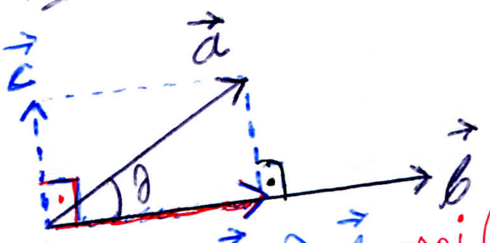
2) $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$. Τότε $\vec{a} \perp \vec{b} \overset{\text{ν.δ.ο.}}{\iff} \|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$

Λύση

$(*)$ $\|\vec{a}+\vec{b}\| = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2(\vec{a}\cdot\vec{b})$

$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \overset{(*)}{\iff} \|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$

(Προβολή του $\vec{a}$ στο $\vec{b}$) $proj_{\vec{b}}(\vec{a})$ ..., $\vec{b} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $a \in \mathbb{R}^n$



$\vec{\gamma} = \lambda \cdot \vec{b} = proj_{\vec{b}}(\vec{a})$

Τότε $\exists$ μοναδικά $\lambda \in \mathbb{R}$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$ τ.ω. $\vec{a} = \lambda\vec{b} + \vec{c}$ με $\vec{c} \perp \vec{b}$

- Αν $\vec{a} = \vec{0}$, τότε $\lambda = 0$, $\vec{c} = \vec{0}$

- Αν $\vec{a} \neq \vec{0}$

$\theta = \measuredangle(\vec{a}, \vec{b})$

$\|\vec{\gamma}\| = \|\vec{a}\| \cdot \text{συν}\theta = \|\vec{a}\| \cdot \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|}$

Ισχύει όμως ότι $\|\vec{\gamma}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{b}\|$

Άρα $\lambda = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}$

. $\vec{c} = \left(\vec{a} - \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \cdot \vec{b}\right) \perp \vec{b}$

Άρα $\vec{c} \perp \vec{b}$

$\boxed{\vec{\gamma} =: proj_{\vec{b}}(\vec{a})}$

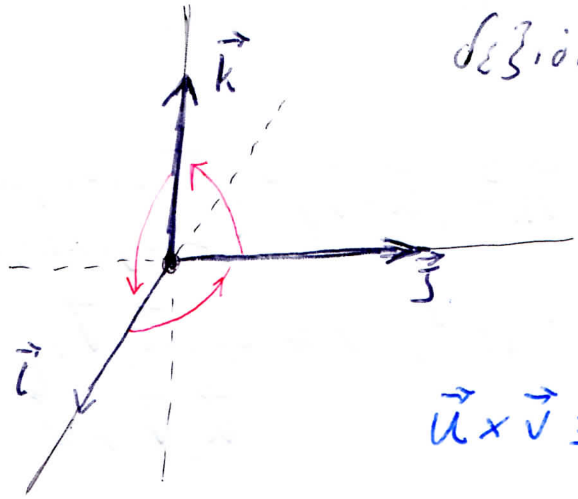
*Σημαντικά

Εξωτερικό, Μεικτό, γινόμενα στου $\mathbb{R}^3$

Γεωμετρική σημασία αυτών

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$

$\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$



δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων

$$\vec{u} \times \vec{v} \equiv \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$=: \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}\right)\vec{i} - \left(\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}\right)\vec{j} + \left(\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}\right)\vec{k} =$$

$$= (u_2 v_3 - v_2 u_3;\ v_1 u_3 - u_1 v_3,\ u_1 v_2 - v_1 u_2)$$

Ιδιότητες

1) $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$

2) $\vec{v} \times (\lambda \vec{u}) = \lambda (\vec{v} \times \vec{u})$, $\lambda \in \mathbb{R}$

3) $\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}}$

(28/02)

* 4) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$

Τριπλό γινόμενο

(Γενικά)

__Δεν__ ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα

Γεωμετρική ερμηνεία $\vec{u} \times \vec{v}$

i) $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}, \vec{v}$

ii) $\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|u\|^2 \, \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2$ (Ταυτότητα Lagrange)

iii) $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cdot \eta\mu\theta$, $\theta = \measuredangle(\vec{u}, \vec{v})$, $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$

__Απόδειξη (iii)__

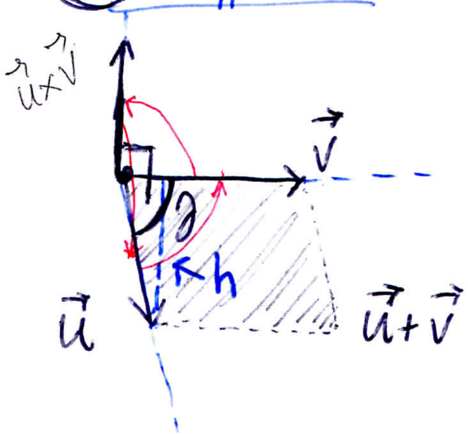
$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 \underset{(ii)}{=} \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 =$

$= \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 \sigma\upsilon\nu^2\theta =$

$= \|\vec{u}\|^2 \, \|\vec{v}\|^2 \eta\mu^2\theta$, $\theta \in [0, \pi]$

Άρα $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, \eta\mu\theta$.

* (__Σημαντικό__) iv) Έστω $\vec{u}, \vec{v} \; (\neq \vec{0})$, γρ. ανεξάρτητα.



Ε παραλληλόγραμμο με κορυφές $\vec{0}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}$

Το εμβαδόν το $E = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$

<u>Απόδειξη</u> $E\mu(E) = \|\vec{v}\| h = \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \eta\mu\theta \overset{(iii)}{=} \|\vec{u} \times \vec{v}\|$

<u>Σημείωση</u>: $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, γρ. ανεξάρτητα το $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$ ορίζουν δεξιόστροφο σύστημα.