Ανάλυση II μάθημα 04 - (02/03)

Υπενθύμιση

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ στον $\mathbb{R}^3$

$\vec{a}\cdot\vec{\beta}:=a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3 \in \mathbb{R}$

$$\vec{a}\times\vec{\beta} \equiv \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} =:$$

$$=:(a_2\beta_3-\beta_2a_3)\vec{i}-(a_1\beta_3-\beta_1a_3)\vec{j}+(a_1\beta_2-\beta_1a_2)\vec{k} \quad \perp \vec{a},\vec{\beta}$$

Μεικτό Γινόμενο

$\vec{a},\vec{\beta},\vec{\gamma}\in\mathbb{R}^3$

Μεικτό γινόμενο των $\vec{a},\vec{\beta},\vec{\gamma}$: $\vec{a}\cdot(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})$ ή $\vec{a}\cdot\vec{\beta}\times\vec{\gamma}$

$$\vec{a}\cdot(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\cdot\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} =$$

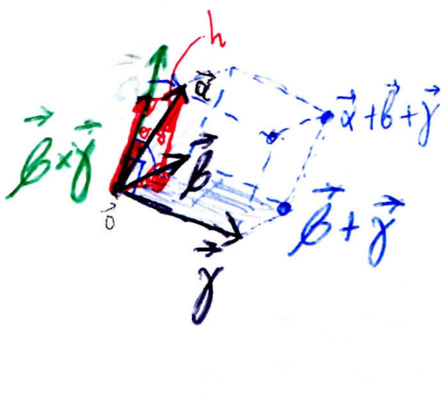
$$=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\cdot((\beta_2\gamma_3-\gamma_2\beta_3)\vec{i}-(\beta_1\gamma_3-\gamma_1\beta_3)\vec{j}+(\beta_1\gamma_2-\gamma_1\beta_2)\vec{k} =$$

$$= a_1(b_2\gamma_3-\gamma_2 b_3)-a_2(b_1\gamma_3-\gamma_1 b_3)$$
$$+a_3(b_1\gamma_2-\gamma_1 b_2)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = -\vec{a}\cdot(\vec{\gamma}\times\vec{b}) = -\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{\gamma}) = \ldots$$
$$= \vec{\gamma}\cdot(\vec{b}\times\vec{\alpha}) = -\vec{\gamma}\cdot(\vec{\alpha}\times\vec{b})$$
(Ιδιότητες οριζουσών

Όγκος παραλληλεπιπέδου στον $\mathbb{R}^3$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ Δημιουργούμε // επίπεδο τυχαία διανύσματα. (με $\vec{b}\times\vec{\gamma}\neq\vec{0}$ δηλ. $\vec{b}\neq\lambda\vec{\gamma}$ (παράλληλη) για $\forall\, \lambda\in\mathbb{R}$)



$$V = |\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{\gamma})| =$$

$$= \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \right|^{(\text{απόλ})}$$

Απόδειξη

$$V = \varepsilon\mu(\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma)\cdot h = \|\vec{b}\times\vec{\gamma}\|\cdot h$$

$$h = \|\vec{a}\|\,|\sigma\upsilon\nu\,\theta| = \|\vec{a}\|\left|\frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{\gamma})}{\|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\times\vec{\gamma}\|}\right| = \frac{|\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{\gamma})|}{\|\vec{b}\times\vec{\gamma}\|}$$

$$V = |\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{\gamma})|$$

<u>Σημείωση</u> Εάν $\vec{\alpha}_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}) \in \mathbb{R}^n$ $(n\geq 3)$ τότε το παραλληλεπίπεδο που φτιάχνουν τα $\vec{\alpha}_1, \ldots \vec{\alpha}_n$ έχει όγκο $V = \left|\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn}\end{vmatrix}\right|$