Ανάλυση ΙΙ – Μάθημα 05 – 04/03/2011

Τοπολογία στον $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$

Ορισμοί

i) Έστω $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$.

Το $S(\vec{x}_0, r) =: \{x \in \mathbb{R} : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r\}$ καλείται **ανοιχτή σφαίρα** (μπάλα του $\mathbb{R}^n$)
κέντρου $\vec{x}_0$ και ακτίνας r

ii) Έστω $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $r \geq 0$

Το $\hat{S}(x_0, r) =: \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq \vec{r}\}$ καλείται **κλειστή σφαίρα**
κέντρου $\vec{x}_0$ και ακτίνας r.

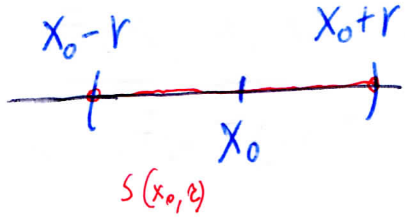
Παραδείγματα

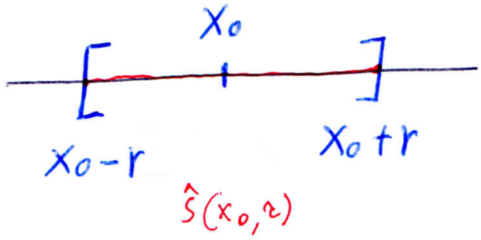
1. $n = 1$, $S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}$

$$= (x_0 - r, x_0 + r) \subseteq \mathbb{R}$$

$$\hat{S}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leq r\}$$

$$= [x_0 - r, x_0 + r]$$

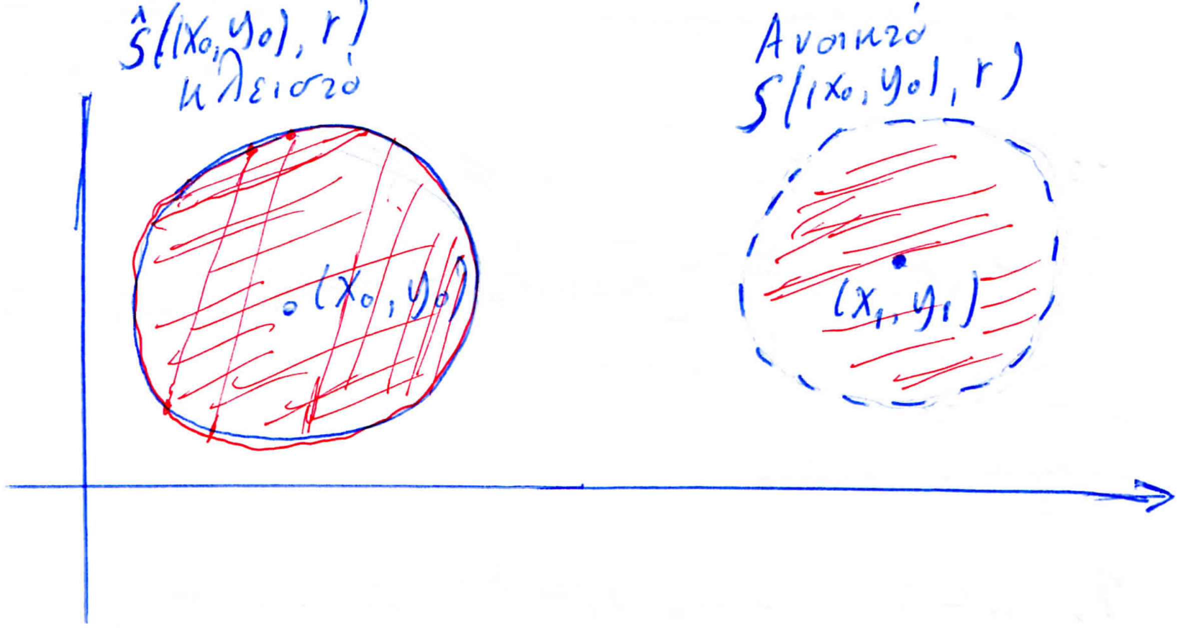




2. $n = 2$

$$S((x_0, y_0), r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y) - (x_0,y_0)\| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r\}$$

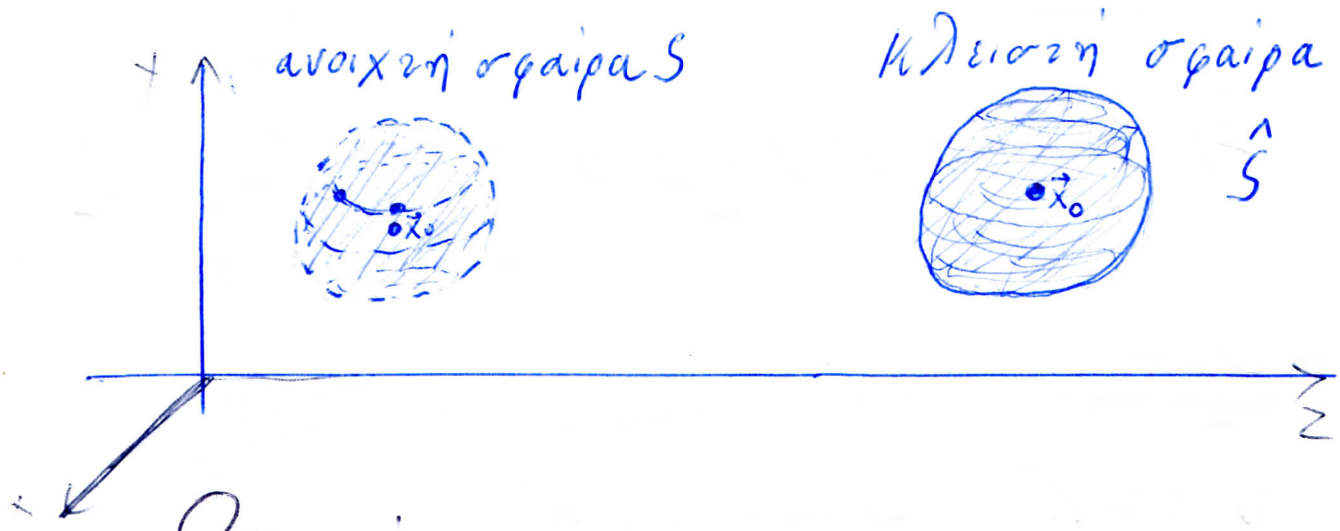
$$\hat{S}(\ldots) = \{ \text{- - - - - - - - - -} \leq r\}$$



3. $n = 3$

$$S((x_0, y_0, z_0), r) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \|(x,y,z) - (x_0, y_0, z_0)\| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} < r\}$$

$$\hat{S}(\ldots) = \{ \qquad \leq r\}$$



Ορισμοί

$$A \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$$

i) $\vec{x}_0$ σημείο συσσώρευσης του A

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \left(S(\vec{x}_0, \varepsilon) \setminus \{\vec{x}_0\}\right) \cap A \neq \emptyset$$

$$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \, \vec{a} \in A : 0 < \|\vec{x}_0 - \vec{a}\| < \varepsilon$$

ii) Εάν $\vec{x}_0 \in A$ και δεν είναι σ.σ. του A,

$\vec{x}_0$ Μεμονωμένο σημείο δηλ. $\exists \, \varepsilon_0 > 0$:

$$A \cap S(\vec{x}_0, \varepsilon_0) = \{\vec{x}_0\}$$

Το σύνολο των σ.σ. του A συμβολίζεται με A'

Παραδείγματα

1) $A = (0,1)$ ή $[0,1)$ ή $(0,1]$ ή $[0,+\infty)$...

$A' = [0,1]$ / $[0,+\infty)' = [0,+\infty)$

2) $B = (0,1) \cup \{2,3,\dots\}$, $B' = [0,1]$

τα 2, 3, ... είναι μεμ. σημεία του B

Ορισμοί

1) $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό στον $\mathbb{R}^n$

$\iff \forall \vec{x} \in A \ \exists \ S(\vec{x}, r) \subseteq A$

2) $B \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό

$\iff \mathbb{R}^n \setminus B$ είναι ανοικτό

$\iff B' \subseteq B$

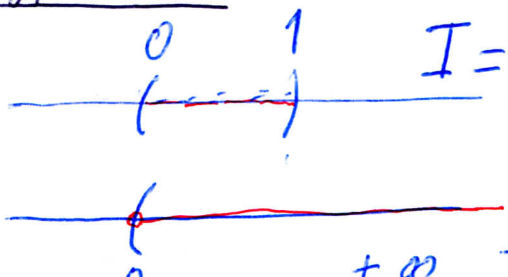
3) K φραγμένο $\iff \exists \ M \in \mathbb{R}$:

$\|\vec{x}\| \leq M \ \ \forall \ \vec{x} \in K \iff K \subseteq \hat{S}(0, M)$

4) K συμπαγές $\iff K =$ φραγμένο + κλειστό.

Παραδείγματα

1) $\mathbb{R}$



$I = (0,1)$

$I = (0, +\infty)$

Ανοικτά

$[0,1]$ κλειστό 

$[0,+\infty)$ κλειστό 

2) $\mathbb{N}$ κλειστό

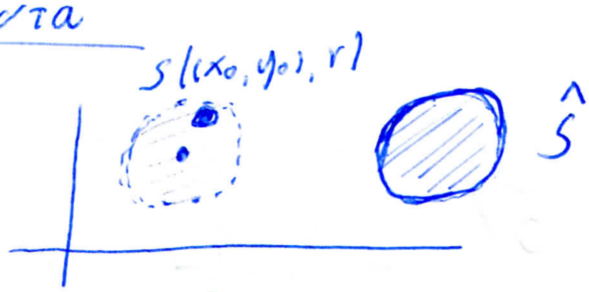
$\mathbb{Q}$ <u>δεν</u> είναι ανοικτό

<u>δεν</u> είναι κλειστό

ομοίως

$[0,1)$ <u>δεν</u> είναι ανοικτό ούτε κλειστό

$\mathbb{R}^n$, $\emptyset$ <u>Aν. + κλειστά</u>



3) $n=2$ / $\mathbb{R}^2$

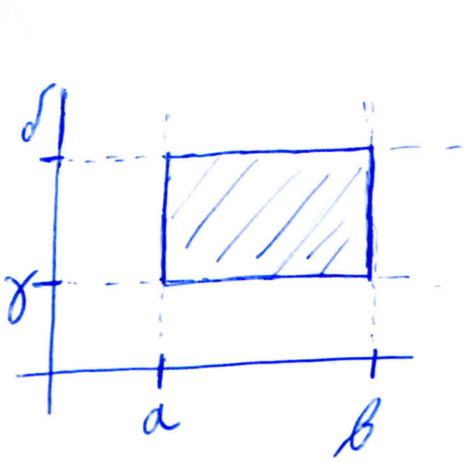
$S((x_0,y_0),r)$ ανοικτό σύνολο

$\hat{S}((x_0,y_0),r)$ κλειστό σύνολο

$B=[a,b]\times[\gamma,\delta]$

$=\{(x,y): a\le x\le b,\ \gamma\le y\le \delta\}$

<u>κλειστό</u> σύνολο



4) $n=3$ / $\mathbb{R}^3$

$S(\vec{x}_0, r)$ αν. σύνολο στον $\mathbb{R}^3$ $(\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3)$

$\hat{S}(\vec{x}_0, r)$ κλ. σύνολο (στον $\mathbb{R}^3$) $(\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^3)$

$B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$

(κλειστό) Ορθογώνιο

5) $[0, 1]$, $\mathbb{N}$, $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, $(0, 1]$

$[0,1]$ → Συμπαγές

$\mathbb{N}$ → (κλειστό, όχι φραγμ.) όχι Συμπαγές

$\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ → Συμπαγές

$(0,1]$ → Όχι συμπαγές (φραγμένο, όχι κλειστό)

(04/03)

Σύνορο συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\partial A \equiv bdA = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \forall \varepsilon > 0,\ S(\vec{x}, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$$
$$\text{και } S(\vec{x}, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset\}$$

Παραδείγματα

1) $A = [0, 1], \ldots, (0, 1), \quad (0, +\infty), \quad \mathbb{Q}$

$\partial A = \{0, 1\}$

$\partial((0, +\infty)) = \{0\}$

$\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$

→ Ισχύει A κλειστό $\Longleftrightarrow \partial A \subseteq A$

2) $\partial S(\vec{x}_0, r) = \partial \hat{S}(\vec{x}_0, r) =$

$= \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| = r\}$ (= επιφάνεια της σφαίρας)

Καμπύλες, Επιφάνειες. Ευθείες, Επίπεδα (Γενικά)

(μη αυστηρός ορισμός)

Καμπύλη είναι ένας δρόμος/τροχιά που περνάμε από κάθε σημείο του με συνεχή τρόπο.

· Ακριβής ορισμός: Uryshon 1921, Menger 1932

Ορισμός (Παραμετρικοποιημένη Καμπύλη, Καμπύλη)

$\vec{r} : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $I =$ διάστημα του $\mathbb{R}$

$\Gamma : \vec{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, $t \in I$. με $x_1, \dots x_n$ = συνεχείς

$\Gamma = \vec{r}(I)$ ίχνος της καμπύλης ή καμπύλη.

Πως περιγράφεται μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$

Αναλυτική εξίσωση

$\Gamma = \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$, $f : A (\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$

Καρτεσιανή εξίσωση

$\Gamma = \{(x,y) : y = f(x) , x \in I\}$

(όταν λύνεται η $f(x,y) = 0$ ως προς x ή y)

Παραμετρικές εξισώσεις

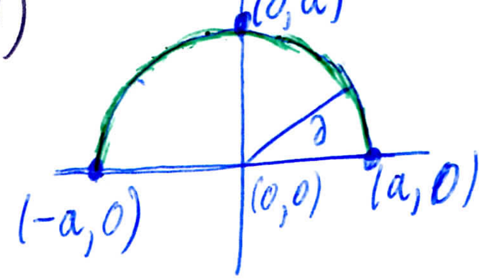
$$\Gamma = \{\vec{r}(t) = (x(t), y(t)),\ t \in I\}$$

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

Παραδείγματα

Να περιγραφεί ο πράσινος δρόμος

1)



Αναλ. εξίσωση

$$\Gamma = \{(x,y) : x^2+y^2=a^2,\ y \geq 0\}$$

Καρτ. εξίσωση

$$\Gamma = \{(x,y) : y = \sqrt{a^2-x^2},\ x \in [-a, a]\}$$

Παρ. εξισώσεις

$$\Gamma = \{\vec{r}(\theta) = (a\,\sigma\upsilon\nu\theta,\ a\,\eta\mu\theta) \quad \theta \in [0, \pi]\}$$

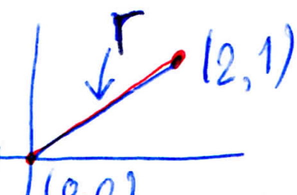
$$\left.\begin{array}{l} x(\theta) = a\,\sigma\upsilon\nu\theta \\ y(\theta) = a\,\eta\mu\theta \end{array}\right| \ \theta \in [0, \pi] \Big\}$$

Οι παρ. <u>δεν</u> είναι μοναδικές

π.χ. $r_1(x) = (x, \sqrt{a^2-x^2}),\ x \in [-a, +a]$

$r_2(t) = (a\,\sigma\upsilon\nu(100\theta),\ a\,\eta\mu(100\theta))\ \ \theta \in [0, \frac{\pi}{100}]$

Μόνοι μας: 2



Να περιγραφεί ο κόκκινος δρόμος

Βλ. Μάθημα 06