Επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$

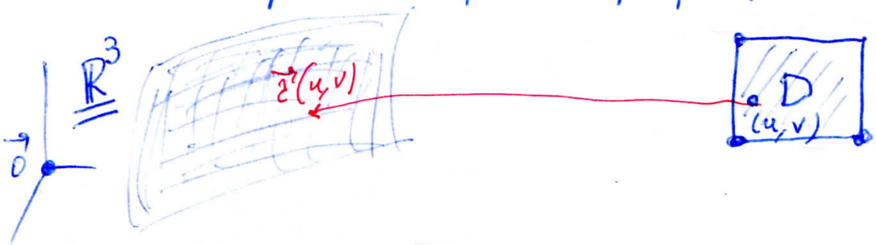
Ο ακριβής μαθηματικός ορισμός είναι ευγενής και χρειάζεται πολλές γνώσεις (παρόμοιας δυσκολίας με τον ορισμό της καμπύλης)

$$S = \{\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)),\ (u,v) \in D\}$$
$(\vec{r} = \text{συνεχής})$

π.χ. Καρτεσιανό γινόμενο ~~ε~~ διαστημάτων $\left(D \subseteq \mathbb{R}^2,\ D = I \times J \text{ όπου } I, J \subseteq \mathbb{R}\ \ I, J = \text{διαστήματα} \right.$ / D κυκλ. δίσκος κ.άλλα /

$D = I \times J \subseteq \mathbb{R}^2$ (διαστήματα $I, J \subseteq \mathbb{R}$)

S επιφάνεια με παραμέτρηση $\vec{r}: D \to \mathbb{R}^3$



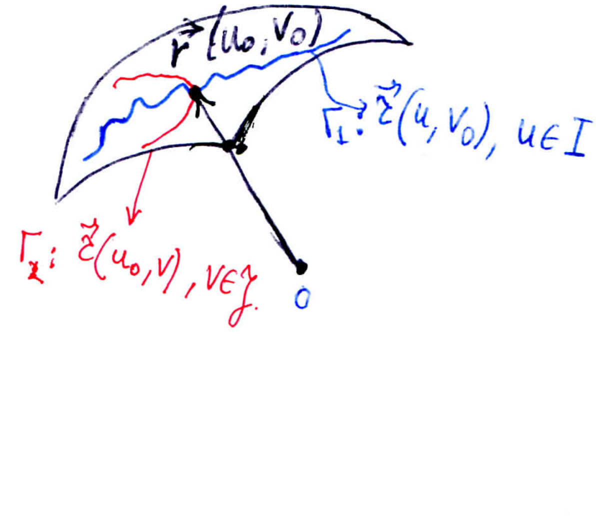
$D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Σημείωση: $\vec{r}: I \times J \to \mathbb{R}^3,\ (u_0, v_0) \in I \times J$

$\vec{r}(\cdot, v_0): I \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη

$\vec{r}(u_0, \cdot): J \to \mathbb{R}^3$ —//—

σταθεροποιούμε την v_0



Πως περιγράφεται μια επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$

• Αναλυτική εξίσωση

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : F(x,y,z)=0\}$$

$$F: A(\subseteq\mathbb{R}^3)\to\mathbb{R}$$

• Καρτεσιανή εξίσωση

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : z=f(x,y),\ (x,y)\in B\}$$

αν η $F(x,y,z)=0$ λύνεται ως προς z

ή $y=g(x,z)$ αν η $F(x,y,z)=0$ λύνεται ως προς y

ή $x=h(y,z)$ αν η $F(x,y,z)=0$ λύνεται ως προς

• Παραμ. εξισώσεις

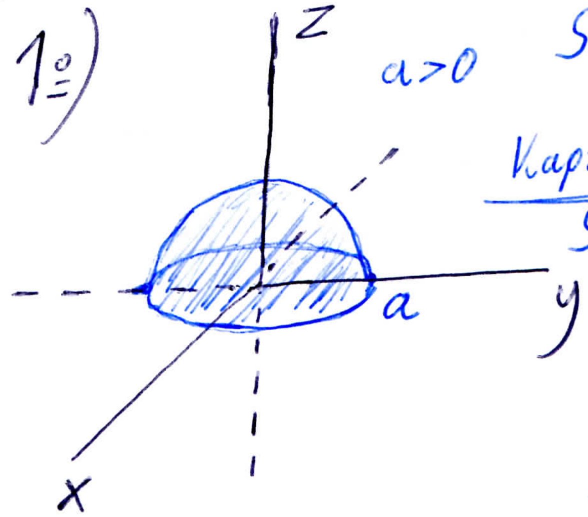
$$S=\{\vec{r}(u,v)=(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)),\ (u,v)\in D\}$$

τότε

$$\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \\ z=z(u,v) \end{cases} \qquad (u,v)\in D$$

Παραδείγματα

1ο)



$a>0$

Αναλυτική μορφή

$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2=a^2,\ z\geq 0\}$

Καρτεσ. μορφή

$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R} : z=\sqrt{a^2-x^2-y^2},\ (x,y)\in B\}$

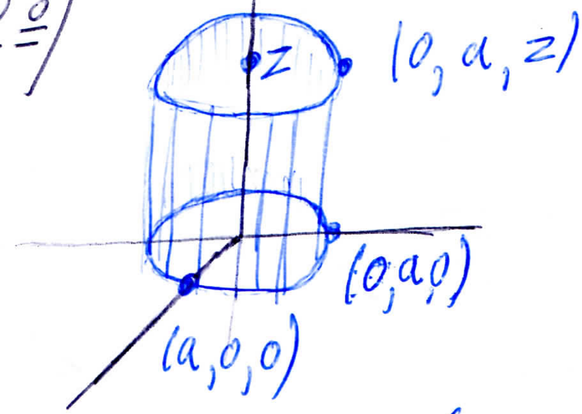
$B=\{(x,y) : x^2+y^2\leq a^2\}$

Παραμετρικοποίηση

$S=\{\vec{r}(x,y)=(x\ ,y\ ,\sqrt{a^2-x^2-y^2}),\ (x,y)\in B\}$

Χρειαζόμαστε "καλύτερη" παραμετρικοποίηση της S / Δεν μπορούμε να βρούμε ισοδύναμ. Ολικώ

2ο)



$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2=a^2,\ z\in[0,2]\}$

$F(x,y,z)=x^2+y^2-a^2=0$

$(x,y,z)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times[0,2]$

$S=\{\vec{r}(\theta,z)=(a\,\sigma\upsilon\nu\theta,\ a\,\eta\mu\theta,\ z),\ \theta\in[0,2\pi],\ z\in[0,2]\}$

(Δεν υπάρχει καρτεσιανή εξίσωση)

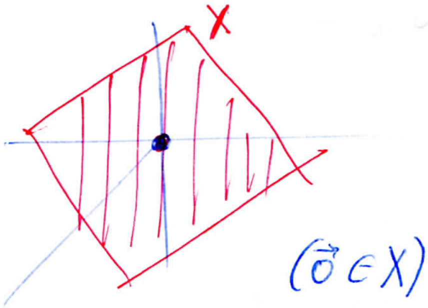
Ειδικές επιφάνειες

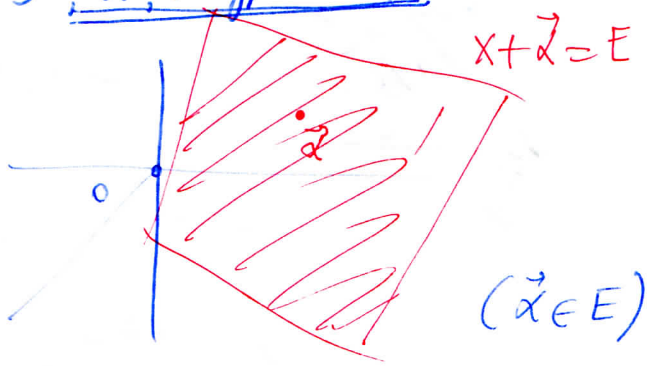
(A) Επίπεδα στον $\mathbb{R}^3$

Τα επίπεδα είναι μεταφορές διανυσματικών χώρων.

Έστω X ένας 2-διάστατος γρ. υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$

$X = \{\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$, $\vec{u}, \vec{v}$ γρ. ανεξ.





$\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{a} = (x_0, y_0, z_0)$

$E = \vec{a} + X = \{\vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

Επίπεδο που περνά από το $\vec{a}$, $\parallel \vec{u}, \vec{v}$

Παρ. εξισώσεις

$\vec{r}(\lambda, \mu) = (x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1, y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2, z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3)$

λύνουμε ως προς λ και μ

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$$

Αν $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0$, $z = ax + by + c$

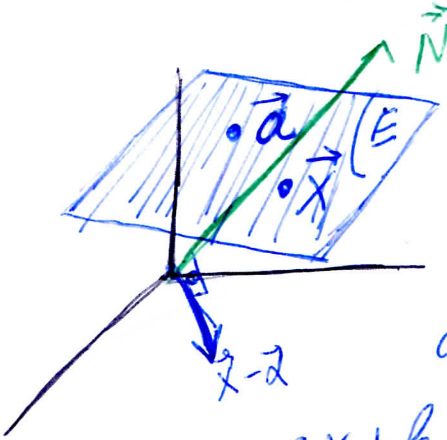
Αν $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \neq 0$, $y = a'x + b'z + c'$

Αν $\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} \neq 0$, $x = a''y + b''z + c''$

Πάντοτε υπάρχει μια ορίζουσα $\neq 0$, επειδή τα $\vec{u}, \vec{v}$ είναι ΓΡ. ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ

Ασκήσεις

1η) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που περνά από το $\vec{a}=(x_0, y_0, z_0)$ και $\perp \vec{N}=(a, b, \gamma)\neq(0,0,0)$



$$E:(\vec{x}-\vec{a})\bullet\vec{N}=0 \iff$$

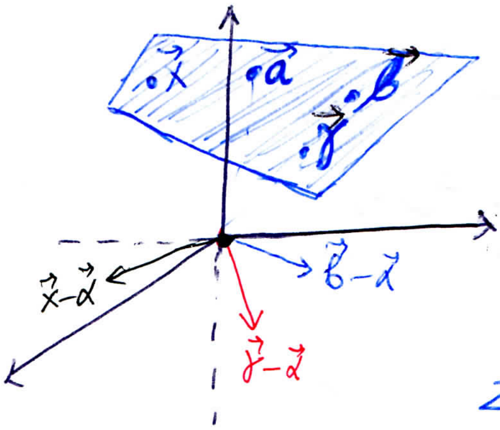
$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+\gamma(z-z_0)=0 \iff$$

$$ax+by+\gamma z=c, \quad c=ax_0+by_0+\gamma z_0$$

Άρα αν έχουμε κάποιο επίπεδο με εξίσωση $Ax+By+\Gamma z=\Delta$ τότε το $(A, B, \Gamma)\perp$ επίπεδο

2η) Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου E που περνά από 3 σημεία $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{\gamma}=(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ με $\vec{b}-\vec{a}$, $\vec{\gamma}-\vec{a}$ γραμμ. ανεξάρτητα.

Λύση (2η ασκ.)



$$\vec{r}(\lambda,\mu) = \vec{a}+\lambda(\vec{\beta}-\vec{a})+\mu(\vec{\gamma}-\vec{a}), \quad \lambda,\mu \in \mathbb{R}$$

Άρα
$$x = a_1+\lambda(\beta_1-a_1)+\mu(\gamma_1-a_1)$$
$$y = a_2+\lambda(\beta_2-a_2)+\mu(\gamma_2-a_2)$$
$$z = a_3+\lambda(\beta_3-a_3)+\mu(\gamma_3-a_3)$$

Λύνουμε ως προς λ, μ (2 εξισώσεις) και αντικαθιστούμε στην 3η εξίσωση.

Βρίσκουμε:
$$\underbrace{\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ \beta-a_1 & \beta_2-a_2 & \beta_3-a_3 \\ \gamma_1-a_1 & \gamma_2-a_2 & \gamma_3-a_3 \end{vmatrix}}_{\text{μεικτό γινόμενο}} = 0$$

δηλ. $(\vec{x}-\vec{a})\cdot((\vec{\beta}-\vec{a})\times(\vec{\gamma}-\vec{a})) = 0$

(εξηγείστε τι σημαίνει αυτό!)

B) Ειδικές επιφάνειες : Κυλινδρικές

$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : F(x,y,z) = \varphi(x,y) = 0\}$

ή $F(x,y,z) = \psi(x,z) = 0$ ή $F(x,y,z) = w(y,z) = 0$

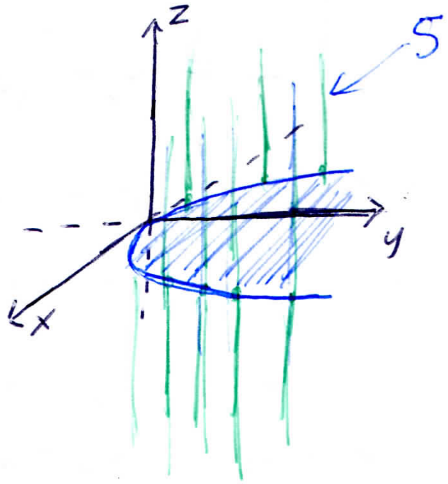
ή $F(x,y,z) = f(x) = 0$ ή $F(x,y,z) = g(y) = 0$

ή $F(x,y,z) = h(z) = 0$

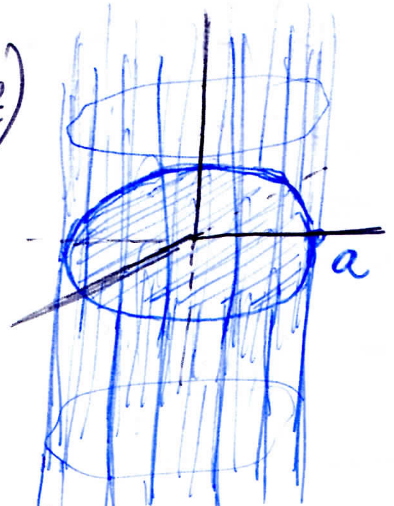
Παραδείγματα

1º) Αναλυτική εξίσωση

$y - x^2 = 0$



2º)



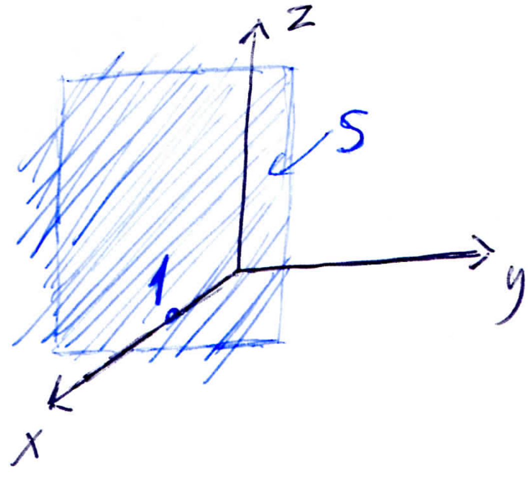
$S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 = a^2, z \in \mathbb{R}\}$

3º) $x = 1$, επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$

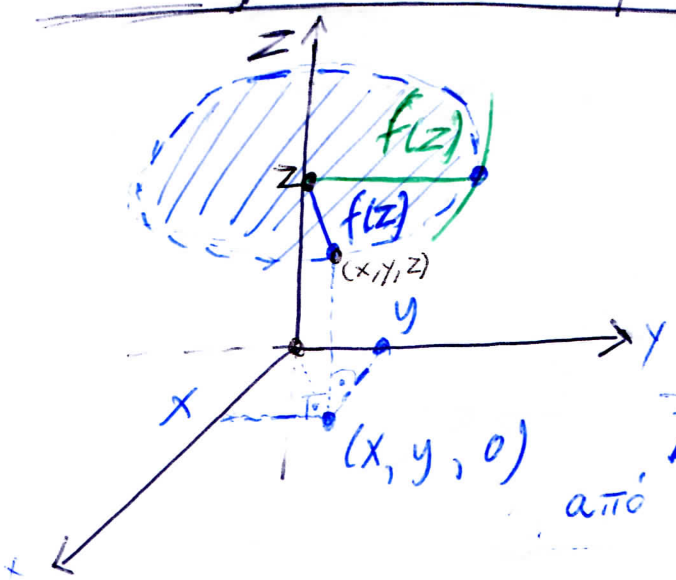
$1x + 0y + 0z = 1$

κάθετο

$\vec{N} = (1,0,0)$



Γ Επιφάνειες εκ περιστροφής



Έστω μια συνάρτηση

$z \to f(z)\ (=y)$

που βρίσκεται στο επίπεδο Oyz.

Περιστρέφουμε γύρω από τον άξονα των z. Τότε

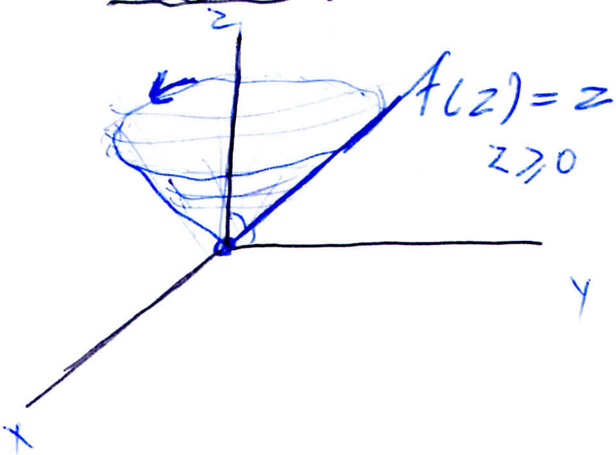
$$\boxed{(f(z))^2 = x^2 + y^2}$$

Άρα οι συντελεστές $ax^2 + by^2$ είναι $a = b$

τότε έχουμε επιφ. εκ περιστροφής ως προς άξονα z.

$(g(x))^2 = y^2 + z^2$, περ. x, $(h(y))^2 = x^2 + z^2$ περ. y

Παράδειγμα



$z^2 = x^2 + y^2$

Κώνος

Δ** Επιφάνειες 2ου βαθμού στον $\mathbb{R}^3$
(τετραγωνικές)

Υπάρχουν στο Β) του

Μαθήματος 7

Εξισώσεις – Σχήματα :

Μαθαίνουμε ΤΕΛΕΙΑ για

Ελλειψοειδές

Ελ. Παραβολοειδές

Υπερβολικό Παραβολοειδές

Ελ. Κώνο

Απαραίτητα στα: Τριπλά ολοκληρώματα
Επιφανειακά ολοκληρώματα
Μέγιστα, Ελάχιστα Συναρτήσεων
Τύπος Taylor, Θ. Stokes, Θ. Gauss.