

Διαφόριση : Διαφορικό / Γραμμικοποίηση

Γενικά

Εάν έχουμε συνάρτηση  
 $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  και θέλουμε να  
υπολογίσουμε την τιμή  $f(x)$  για  
κάποιο  $x_0 \in (a, b)$  αυτό γενικά είναι  
αδύνατον!

(π.χ.  $f(x) = \eta\mu. x$ ,  $\sigma\upsilon\upsilon\chi$ ,  $a^x$ ,  $\ell\eta(x), \dots$ )

Οι μόνες συναρτήσεις που μπορούν  
να βοηθήσουν είναι οι πολυωνυμικές

$$P_n(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \quad (a_i \in \mathbb{Q}, x \in \mathbb{Q})$$

Άρα για να προσεγγίσουμε  
το  $f(x_0)$  ( $f =$  συνάρτηση, τυχαία)  
πρέπει να "πλησιάσουμε" την  $f$   
με πολυώνυμο.

Εάν χρησιμοποιήσουμε πολ. 1ου βαθμού,  
ορίζουμε το διαφορικό της  $f$ .

Εάν χρησιμοποιήσουμε πολ.  $\geq 2$ ου βαθμού,  
ορίζουμε το πολυώνυμο του Taylor ( $f =$  "καλή" συνάρτηση)

• Πως προσεγγίζουμε την  $f$  στο  $x=x_0$   
με πολ. 1ου βαθμού.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

$$\iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{h} = 0$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} \exists u_{x_0}(h) = f'(x_0)h, h \in \mathbb{R} \text{ γραμμική} \\ \exists \eta \in \mathbb{R} \exists \nu \in \mathbb{R} \exists \mu \in \mathbb{R} \text{ μικρότερο} \\ q(h) = \begin{cases} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - u_{x_0}(h)}{|h|}, & h \neq 0 \\ 0, & h = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\mu \lim_{h \rightarrow 0} q(h) = 0 = q(0)$$

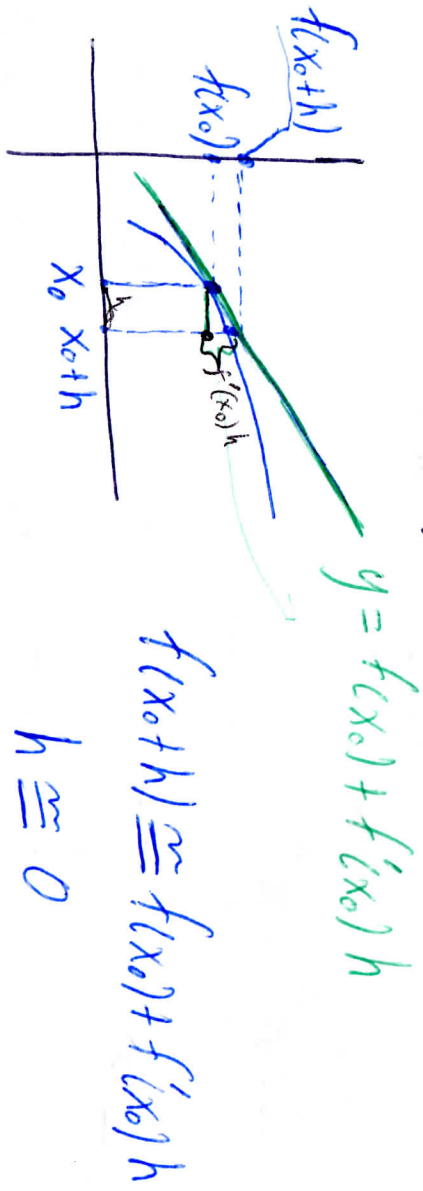
$$\iff \boxed{\begin{array}{l} f(x_0+h) = f(x_0) + u_{x_0}(h) + |h|q(h) \\ u_{x_0}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ γραμμική} \\ \text{και } \lim_{h \rightarrow 0} q(h) = 0 = q(0) \end{array}}$$

Την <sup>(συνάρτηση)</sup>  $u_{x_0}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  γραμμική ( $u_{x_0}(x) = f'(x_0)x, x \in \mathbb{R}$ )

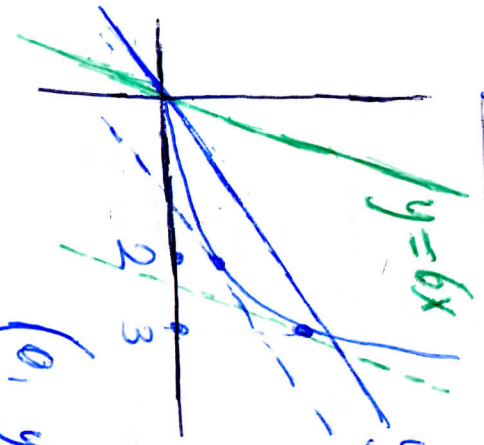
καλούμε διαφορικό της  $f$  στο  $x_0$ ,  $df(x_0): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $df(x_0) = f'(x_0)x, x \in \mathbb{R}$

# Παραδείγματα

1) Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f(x)$ .



2)  $f(x) = x^2$



$df(2), df(3);$

$df(2)(x) = 4x$   
 $df(3)(x) = 6x \quad x \in \mathbb{R}$

(0,  $y = 4x$ ,  $y = 6x$  είναι παραλλήλες με τις εστωμένες στα σημεία 2 και 3 αντίστοιχα)

Σημείωση: Το σφάλμα  $|h|q(h)$  να δώσει (ευρημένη) από τον τύπο του Taylor (αν  $\exists f''$ )

Σημ: Για να ορίσουμε τον συνάρτηση να διασπαστεί (να είναι πολλαπλάσια να παραγωγίσιμη τις σημειωτικές συνθήκες)

# Γραμμικές συνάρτησεις

(η ισοδ. γραμμικές απεικονίσεις)

Εστω  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

τοτε

$\vec{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  γραμμική

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}(x + y) = \vec{u}(x) + \vec{u}(y), & x, y \in \mathbb{R}^n \\ \vec{u}(\lambda x) = \lambda \vec{u}(x), & x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

• Λογικά: (1)  $\vec{u}$  γραμμική συνάρτηση

$$\Leftrightarrow u_1, u_2, \dots, u_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

είναι γραμμικές

$$(2) \vec{u}(\vec{0}) = \vec{0}$$

• Πως είναι οι [p. Συναρτήσεις

$$\vec{u} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (n, m \geq 1)$$

•  $n=1, m=1$  :

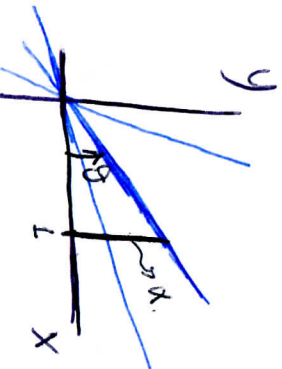
$u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  γραμμική

$$\Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} : u(x) = ax, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$u(1) = a \in \mathbb{R}$$

$$\underline{u(x)} = u(x \cdot 1) = x u(1) = ax$$

$$u(1) = a = u'(1)$$



$$(x = \varepsilon \rho^2)$$



•  $n \geq 2, m = 1$

$$u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ γραμμική} \iff \exists \vec{a} \in \mathbb{R}^n: u(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} (\Leftarrow) \quad u(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) &= \vec{a} \cdot (\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) = \\ &= \lambda \vec{a} \cdot \vec{x} + \mu \vec{a} \cdot \vec{y} = \lambda u(\vec{x}) + \mu u(\vec{y}), \quad \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \\ &\quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\Rightarrow) \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \vec{x} &= x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n, \\ \vec{e}_1 &= (1, 0, \dots, 0), \quad \vec{e}_i = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0), \\ &\quad \uparrow \\ &\quad \text{δισκ } i \\ \vec{e}_n &= (0, 0, \dots, 0, 1) \end{aligned}$$

Τότε  $\vec{u}(\vec{x}) = x_1 u(\vec{e}_1) + x_2 u(\vec{e}_2) + \dots + x_n u(\vec{e}_n)$ ,  
 Ορίζουμε  $\vec{a} = (u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n))$   
 $\vec{u}(\vec{x}) = \vec{a} \cdot \vec{x}$

•  $n \geq 2, m \geq 2$

$$\begin{aligned} \vec{u}(\vec{x}) &= (u_1(\vec{x}), u_2(\vec{x}), \dots, u_m(\vec{x})) \quad (u_i = \text{γραμμή } \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}) \\ &\stackrel{\oplus}{=} (\vec{a}_1 \cdot \vec{x}, \vec{a}_2 \cdot \vec{x}, \dots, \vec{a}_m \cdot \vec{x}) \\ &= (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \dots + a_{n1}x_n, \dots \\ &\quad \dots, a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \dots + a_{nm}x_n) \end{aligned}$$

$$\vec{a}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})$$

$$\vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

δηλαδή

$$\vec{u}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} u_1(\vec{e}_1) & u_1(\vec{e}_2) & \dots & u_1(\vec{e}_n) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ u_m(\vec{e}_1) & u_m(\vec{e}_2) & \dots & u_m(\vec{e}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Α  $\vec{u}$  = γραμμική, αντίστοιχεί ένας πίνακας και αντιστοίχα.

$$(n \geq 2, m=1, u_j(\vec{x}) = \vec{a}_j \cdot \vec{x}, u_j(\vec{e}_i) = a_{ij} \quad *)$$

- Π.χ. • Εα'  $\vec{u}(x,y,z) = (x+y, 2x+5z, 9x+10y+11z)$  (γραμμική)
- ο Πίνακας που αντιστοιχεί είναι 0
  - Εα'  $\vec{u}(x,y) = (14x, 18x+y, Bx)$
  - ο Πίνακας που αντιστοιχεί είναι 0

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 14 & 0 \\ 18 & 1 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$$

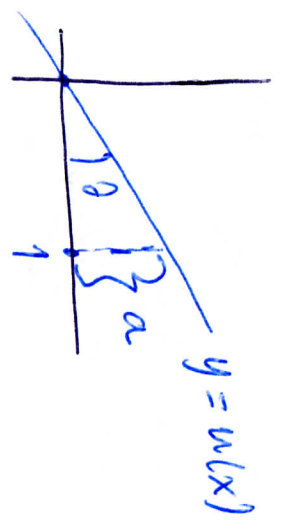
ΠΡΟΣΟΧΗ: Στα βραχίδια του άξονα φαίνεται ότι εκ. είναι ΑΡΙΘΜΟΙ

Παραδείγματα

$u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  γραμμική

$u(x) = ax$

$u(1) = a = u'(x) (= \epsilon \rho \theta)$

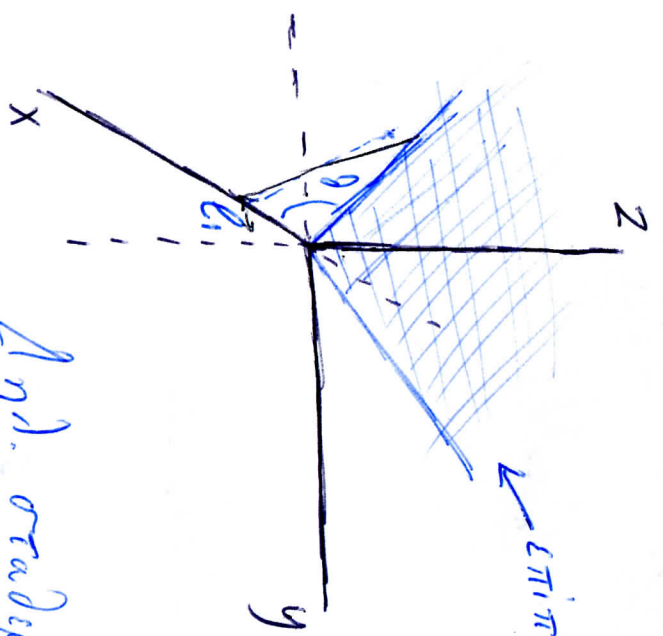


Πίνακας που αντ.

$(a)$

$u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$u(x, y) = (a, b) \cdot (x, y) = ax + by$



← επίπεδο που περιβάλλει το  $(0, 0, 0)$

"Βρίσκουμε την κλίση του επιπέδου" (και κλίση ως προς τον κάθε άξονα  $x, y$  χωριστά.)

Αντ. σταθετοποιούμε μία το  $x$  και μία το  $y$

$u(1, 0) = a = u_x(x_0, 0) \quad (u(x, 0): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$

$u(0, 1) = b = u_y(0, y_0) \quad (u(0, y): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$

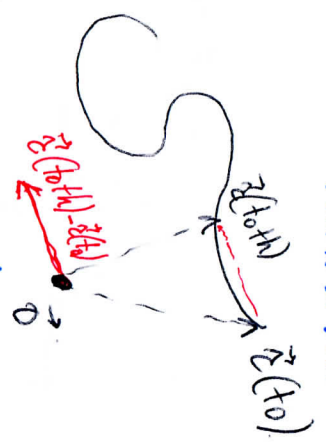
$u(x, y) = u_x(x_0, 0)x + u_y(0, y_0)y$

→

Παράγωγος  $\vec{r}: I (\subseteq \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n, I = \text{διαστήμα}$ .

Εάν  $\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t_0+h) - \vec{r}(t_0)}{h}$  καλιστα

$\vec{r}'(t_0), \frac{d\vec{r}}{dt}(t_0)$



λογισμός: 1)  $\vec{r}(t) = (r_1(t), \dots, r_n(t)), t_0 \in I$

Τα  $E_{\mathbb{R}^n}$  είναι λογισμοί: (α)  $\exists \vec{r}'(t_0)$

(β)  $\exists r_i'(t_0), i = 1, \dots, n$

Τότε  $\vec{r}'(t_0) = (r_1'(t_0), \dots, r_n'(t_0))$

$\vec{r}' = \text{ταχύτητα } (v^{\vec{r}})$

$\vec{r}'' = \text{επιταχυνση } (a^{\vec{r}})$

2)  $(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)'(t_0) = \vec{r}_1'(t_0) + \vec{r}_2'(t_0)$

3)  $(\lambda \vec{r})'(t_0) = \lambda \vec{r}'(t_0), \lambda \in \mathbb{R}$

4)  $(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)'(t_0) = \vec{r}_1'(t_0) \cdot \vec{r}_2(t_0) + \vec{r}_1(t_0) \cdot \vec{r}_2'(t_0)$



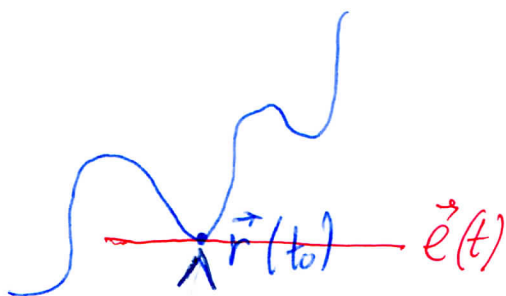
$$5) (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)'(t_0) = \vec{r}_1'(t_0) \times \vec{r}_2(t_0) + \vec{r}_1(t_0) \times \vec{r}_2'(t_0)$$

(προσοχή δεν μπορούμε να αλλάξουμε την σειρά)

Σημείωση : Εάν  $\exists \vec{r}'(t_0) \Rightarrow \vec{r} = \text{συνεχής στο } t_0$

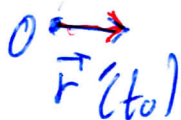
$$(\vec{r}(t) = (|t|, 1), \nexists \text{ παρ. } t_0 = 0 \} \vec{e} = \text{συνεχής})$$

Εγ. ευθεία της  $\vec{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  στο  $t_0$  (in  $\vec{r}(t_0)$ )  
ή γραμμικοποίηση της  $\vec{r}$  στο  $t_0$



$$\vec{e}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{r}'(t_0)t,$$

$$t \in \mathbb{R} (\text{αν } \vec{r}'(t_0) \neq \vec{0})$$



(Ευθεία που περνά από το  $\vec{e}(t_0)$  και είναι  $\parallel \vec{e}'(t_0) \neq \vec{0}$ )