Ανάλυση ΙΙ – 18/03/2011 – μάθημα 11

Ασκήσεις

1) Κινητό έχει διαν. θέσης

$\vec{r}(t) = 3\sigma\upsilon\nu t\,\vec{i} + 3\eta\mu t\,\vec{j} + (t^3-3t)\vec{k},\ t\in[0,+\infty)$

i) Σε ποια επιφάνεια κινείται;

ii) $\vec{r}\,',\ \vec{r}\,'',\ \|\vec{r}\,'\|,\ \|\vec{r}\,''\|$ ($\vec{r}\,'$= ταχύτητα, $\vec{r}\,''$= επιτάχυνση)

iii) Σε ποιες χρ. στιγμές το διάν. θέσης είναι κάθετο στο διάν. ταχύτητας;

Λύση

i) $\begin{cases} x(t) = 3\sigma\upsilon\nu t \\ y(t) = 3\eta\mu t \\ z(t) = t^3-3t \end{cases}$ $\Big|$ $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2=9,\ z\in\mathbb{R}\}$

Το κινητό είναι πάνω στον κύλινδρο

(Σχήμα: Μάθημα 01) → σελ.

Κινείται στην S κύλινδρος.

ii) $\vec{r}\,'(t) = (-3\eta\mu t,\ 3\sigma\upsilon\nu t,\ 3t^2-3)$,

$\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{9+9(t^2-1)^2}$

$\vec{r}\,''(t) = (-3\sigma\upsilon\nu t,\ -3\eta\mu t,\ 6t)$,

$\|\vec{r}\,''(t)\| = \sqrt{9+36t^2}$

iii) $\vec{r}(t)\cdot\vec{r}\,'(t) = 0 \Leftrightarrow (t^2-1)t(t^2-3)=0$

$\Leftrightarrow t_1=0,\ t_2=1,\ t_3=\sqrt{3}$

2) Κινητό έχει διάν. θέσης

$\vec{r}(t) = (e^t συνt,\ e^t ημt,\ e^t)$

i) Σε ποια επιφάνεια κινείται;

ii) Να βρεθεί το συνθ, $θ(t) = \measuredangle(\vec{r}(t), \vec{r}\,'(t))$

Τι παρατηρείτε;

Λύση

i) $x(t) = e^t συνt$
$y(t) = e^t ημt$
$z(t) = e^t$

$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2,\ z > 0\}$

Το κινητό είναι πάνω στον κώνο S

(Σχήμα: Μάθημα 01) → σελ. 12)

ii) $συνθ(t) = \dfrac{\vec{r}(t) \cdot \vec{r}\,'(t)}{\|\vec{r}(t)\|\ \|\vec{r}\,'(t)\|}$

$\vec{r}(t) = (e^t συνt,\ e^t ημt,\ e^t)$, $\|\vec{r}(t)\| =$
$= \sqrt{e^{2t} συν^2 t + e^{2t} ημ^2 t + e^{2t}} = e^t \sqrt{2}$

$\vec{r}\,'(t) = (-e^t ημt + e^t συνt,\ e^t συνt + e^t ημt,\ e^t)$

$\|\vec{r}\,'(t)\| = \sqrt{e^{2t} + e^{2t} + e^{2t}} = e^{-t}\sqrt{3}$

$\vec{r}(t) \cdot \vec{r}\,'(t) = -e^{2t} συνt\, ημt + e^{2t} συν^2 t + e^{2t} ημt\, συνt + ημ^2 t + e^{2t}$
$= 2e^{2t}$

$συνθ(t) = \dfrac{2e^{2t}}{e^{2t}\sqrt{6}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$

Άρα η $\measuredangle(\vec{r}(t), \vec{r}\,'(t))$ είναι σταθερή (ανεξάρτητη του χρόνου)

3) Κινητό έχει διάνυσμα θέσης
$\vec{r}(t) = (\eta\mu t, \eta\mu t, \sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu t)$, $t \in \mathbb{R}$

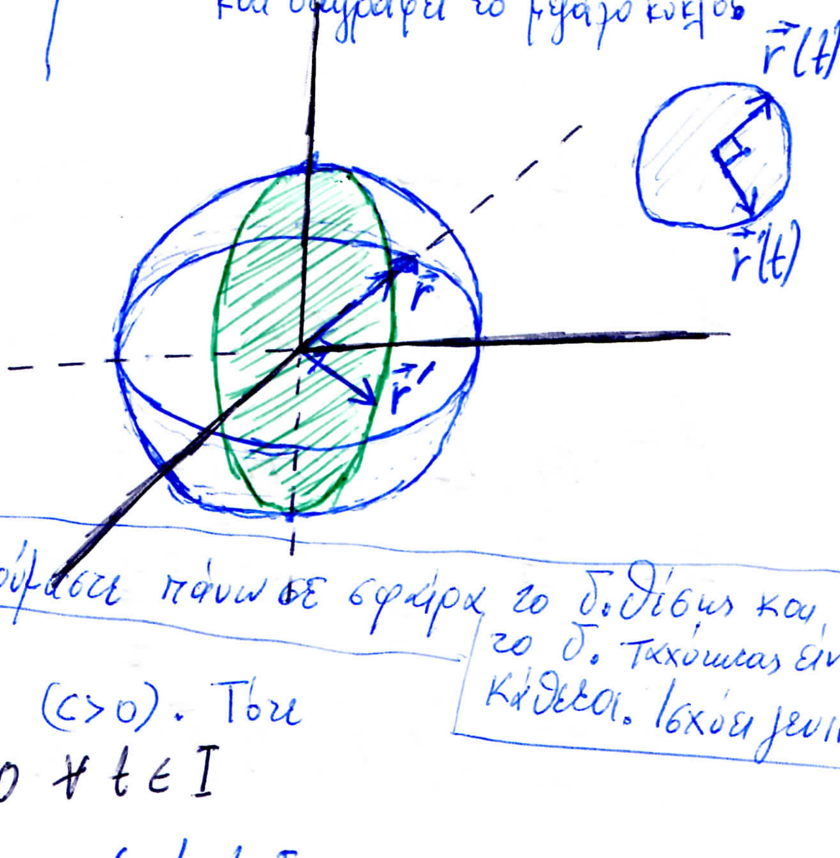
(i) Σε ποια επιφάνεια κινείται;

(ii) Να αποδειχθεί ότι $\vec{r}(t) \perp \vec{r}\,'(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Λύση

(i) $\begin{cases} x(t) = \eta\mu t \\ y(t) = \eta\mu t \\ z(t) = \sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu t \end{cases}$ $S = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$

Το κινητό είναι πάνω στην σφαίρα και διαγράφει το μεγάλο κύκλο.



(ii) $\vec{r}(t) \cdot \vec{r}\,'(t) = 0$
$\forall t \in \mathbb{R}$
(Πράξεις → στον αναγνώστη)

Παρατηρούμε ότι όταν κινούμαστε πάνω σε σφαίρα το δ. θέσης και το δ. ταχύτητας είν… κάθετα. Ισχύει γενι…

4) $\vec{r} : I \to \mathbb{R}^n$, $(c>0)$. Τότε
$\vec{r}(t) \cdot \vec{r}\,'(t) = 0 \ \forall t \in I$
$\iff \|\vec{r}(t)\| = c \ \forall t \in I$
(δηλ. κινούμαστε σε σφαίρα ακτίνας $c\ (>0)$ κέντρου $\vec{0} \in \mathbb{R}^n$)
αν και μόνον αν τα διαν. θέσης και ταχύτητας είναι κά…

Λύση (4)

$$\|\vec{r}(t)\| = c, \quad t \in I \iff \|\vec{r}(t)\|^2 = c^2 \quad t \in I$$

$$\iff \vec{r}(t)\cdot\vec{r}(t) = c^2, \quad t \in I$$

$$\iff (\vec{r}\cdot\vec{r})'(t) = 0, \quad t \in I$$

$$\iff \vec{r}\,'(t)\cdot\vec{r}(t) + \vec{r}(t)\cdot\vec{r}\,'(t) = 0, \quad t \in I$$

$$\iff 2\vec{r}(t)\cdot\vec{r}\,'(t) = 0 \quad t \in I$$

$$\iff \vec{r}(t)\cdot\vec{r}\,'(t) = 0 \quad t \in I$$

Μερικές παράγωγοι $f: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \boxed{\mathbb{R}}$

$f: A(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, A = ανοικτό στον $\mathbb{R}^n$

$\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in A$

Εάν $\exists \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(\vec{p}+t\vec{e}_i) - f(\vec{p})}{t}$ συμβολίζεται

$= \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{p})$ (ή $f_i(\vec{p})$ ή $f_{x_i}(\vec{p})$), $(1 \le i \le n)$

καλείται μερική παράγωγος της f στο $\vec{p}$ ως προς την μεταβλητή x_i (ή i-μερική παράγωγος)

Αναλυτικά:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n) =$$

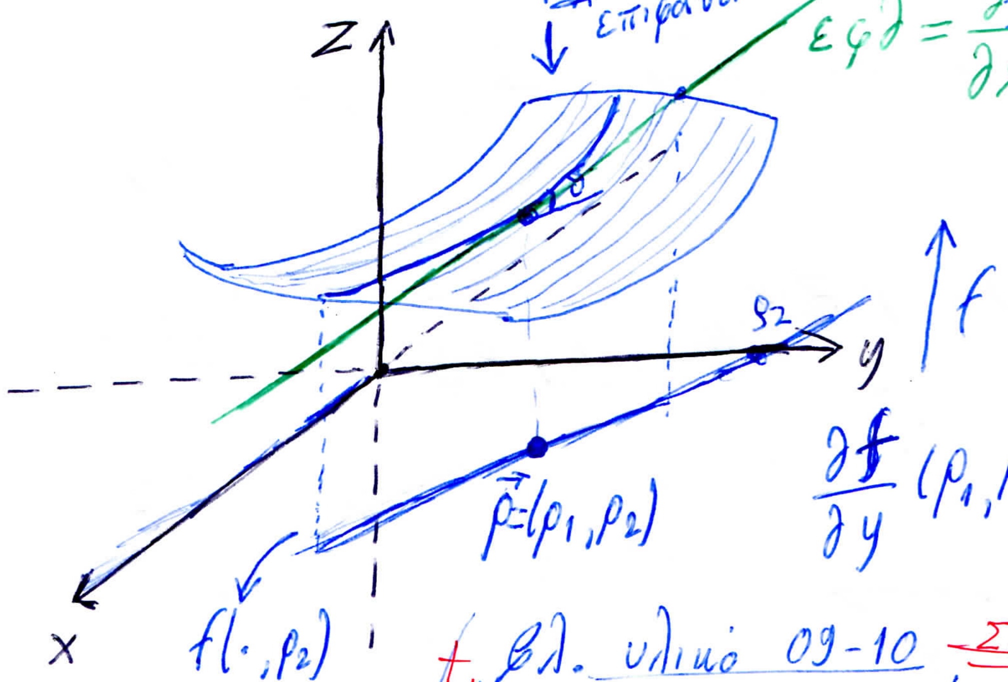
$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(\rho_1 + t, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_n) - f(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)}{t}$$

(Ανάλογα $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\rho_1, \dots, \rho_n)$) $\quad (t \in I)$

$i = 2, \dots, n.$

δηλ. σταθεροποιούμε τις μεταβλητές $x_2 = \rho_2, \dots x_n = \rho_n$ και παραγωγίζουμε ως προς την πρώτη στο ρ_1

Γεωμετρικά ή θεωρούμε την ευθεία $\vec{\ell}(t) = \vec{\rho} + t\vec{e}_1, (t \in \mathbb{R})$ περιορίζουμε την f πάνω στην ευθεία και παραγωγίζουμε.



(βλ. υλικό 09-10 ΣΧΗΜΑΤΑ
→ εργασία φοιτητή (Ναβίτ Κων/νου) 05)

Σχέση μερικής παραγώγισης και συνέχειας

• $f =$ συνεχής $\not\Rightarrow \exists \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{p})$

π.χ. $f(x,y) = |x|$ στο $(0,0)$

$\nexists$ παράγωγος ως προς x / $f =$ συνεχής.

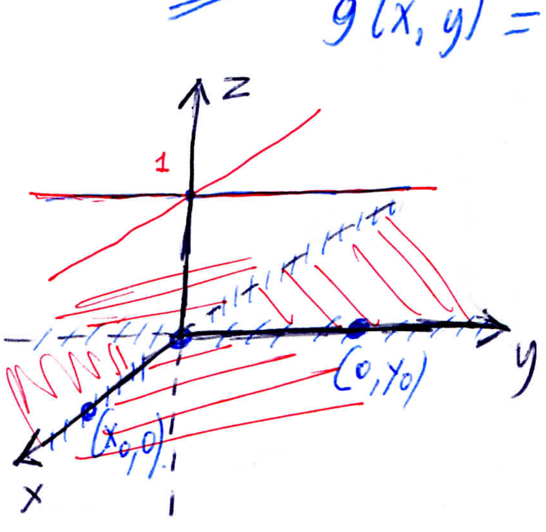
• Εάν $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{p})$, $i = 1, \dots, n$, $(n \geq 2)$

$\not\Rightarrow$ η f είναι συνεχής στο $\vec{p}$.

π.χ. $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Ασυνεχής στο $(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

π.χ. $$g(x,y) = \begin{cases} 1, & xy = 0 \\ 0, & xy \neq 0 \end{cases}$$ Ασυνεχής



$\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 0 = \dfrac{\partial g(0,0)}{\partial y}$

(Η g είναι ασυνεχής και στα $(0,y_0)$, y_0 και στα $(x_0,0)$, $x_0 \in \mathbb{R}$. $\dfrac{\partial g(0,y_0)}{\partial y} = 0$
$\dfrac{\partial g(x_0,0)}{\partial x} = 0$

1-1-4

Ασκήσεις

1) $f(x,y,z) = x^2y^2 + e^z συν(xy) +$

$+ xy^2z + τοξεφ(xy) + \log(x^4+1)$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ στο σημείο $(1, 2, 3)$

Έχουμε:

$f(x,2,3) = x^2\cdot 2^2 \cancel{\cdot 3} + e^3 συν(2x) + x\cdot 2^2\cdot 3 + τοξεφ(2x) + \log(x^4+1)$

και θέλουμε την παράγωγο για $x=1$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2,3) = 2\cdot 1\cdot 2^2 + e^3\cdot 2(-ημ2) + 1\cdot 2^2\cdot 3 + \frac{2}{1+2^2} + 4\cdot 1\,\frac{1}{1^4+1}$$

όμοια τα υπόλοιπα// (Να γίνουν στο σπίτι!)

2) $f(x,y) = x^5y^2 + e^{xy}συνy + \log(x^2+2y^2+1) +$

$+ τοξεφ\left(\frac{x}{y}\right)$

Να υπολογιστούν $\frac{\partial f}{\partial x}(2,5)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(2,5)$

... λύνουμε μόνοι μας σπίτι