Αναλυση ΙΙ - 28/03/2011 - μαθημα 14

Εφαρμογές Διαφόρισης

- Αλυσιδωτή Παραγώγιση
- Εφαπτόμενο Επίπεδο (στα εισηγ. αποκεφάλαια)
- Θεώρημα Taylor
- Θεώρημα Πεπλεγμένων Συναρτήσεων (τέλος του μαθ

- Σύνθεση πραγματικών συναρτήσεων

Έστω
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & \mathbb{R} \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$(g\circ f)(x) = g(f(x))$$

Από το Λύκειο γνωρίζουμε

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$$

Θέλουμε να γενικεύσουμε τον παραπάνω κανόνα για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Έχουμε λοιπόν

για συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\vec{f}(x_1, \dots, x_n) = \left(f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\right)$$

θα έχουμε τον ακόλουθο πίνακα διαφορικών.

$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι ο παραπάνω πίνακας είναι ένας **$m \times n$** πίνακας

Αν έχουμε την εξής σύνδεση

$$\begin{tikzcd} \underset{(t_1, \dots, t_n)}{\mathbb{R}^n} \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "h = f \circ g"'] & \underset{(x_1, \dots x_m)}{\mathbb{R}^m} \arrow[d, "f"] \\ & \underset{(y_1, \dots, y_\ell)}{\mathbb{R}^\ell} \end{tikzcd}$$

Ο πίνακας της παραγώγου της σύνδεσης θα είναι ένας $\ell \times n$ πίνακας.

Οπότε

$$J(f \circ g) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial t_1} & \frac{\partial h_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial h_2}{\partial t_1} & \frac{\partial h_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial h_2}{\partial t_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial h_\ell}{\partial t_1} & & \cdots & \frac{\partial h_\ell}{\partial t_n} \end{pmatrix}$$

Αντίστοιχα, οι πίνακες διαφορικού της f και της g θα είναι
για την f ένας $\ell \times m$ πίνακας
και για την g ένας $m \times n$ πίνακας.

$$J_{(g)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t_1} & \frac{\partial g_1}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial t_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial t_1} & \frac{\partial g_2}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial t_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial g_m}{\partial t_1} & \frac{\partial g_m}{\partial t_2} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial t_n} \end{pmatrix}_{t_0}$$

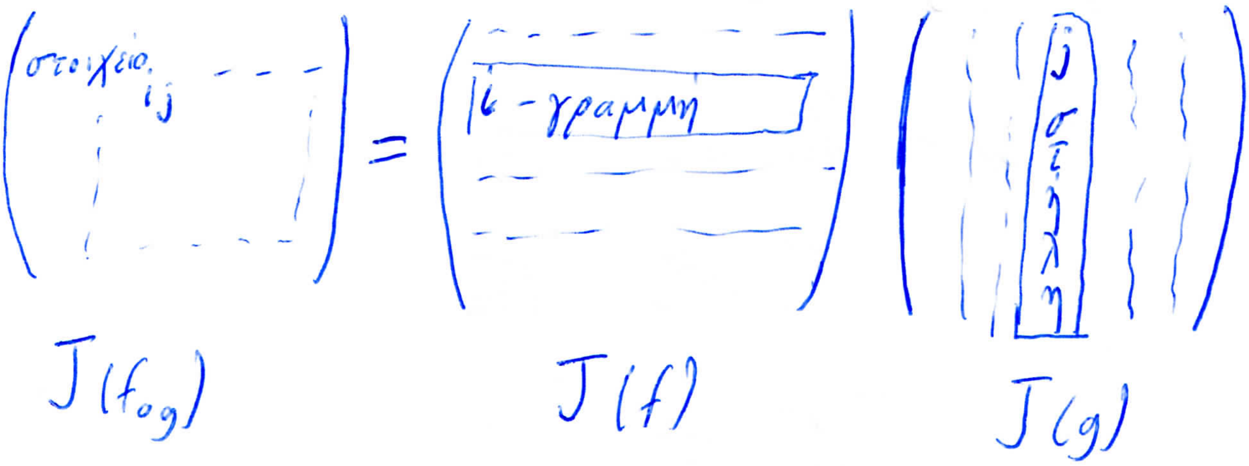
$$J(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_\ell}{\partial x_1} & \frac{\partial f_\ell}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_\ell}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{g(t_0)}$$

Διατυπώνουμε τον κανόνα της αλυσίδας

$$\boxed{J(\vec{f}\circ\vec{g})_{\vec{t_0}} = J(\vec{f})_{\vec{g}(\vec{t_0})}\cdot J(\vec{g})_{\vec{t_0}}}$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας διαφορικού της σύνθεσης των συναρτήσεων g, f προκύπτει ως γινόμενο των επιμέρους πινάκων διαφορικού.

Έτσι, κάθε στοιχείο του πίνακα διαφορικού της $f\circ g$ προκύπτει ως εξής:



Δηλαδή, κάθε στοιχείο στη θέση ij (i γραμμή και j στήλη) του πίνακα διαφ. της $f\circ g$, προκύπτει ως γινόμενο της i-γραμμής του πίνακα διαφ. της f επί την j-στήλη του πίνακα διαφ. της g.

Πιο συγκεκριμένα

$$\frac{\partial h_i}{\partial t_j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial g_1}{\partial t_j} + \frac{\partial f_i}{\partial x_2}\frac{\partial g_2}{\partial t_j} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_m}\cdot\frac{\partial g_m}{\partial t_j}$$

$i = 1, \dots, l$ και $j = 1, \dots, n$

① Ειδικές περιπτώσεις

① Για $n = m = l = 1$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}_{t_1} \arrow[r, "g_1"] \arrow[dr, "h_1"'] & \mathbb{R}_{x_1} \arrow[d, "f_1"] \\ & \mathbb{R}_{y_1} \end{tikzcd}$$

$$\frac{dh_1}{dt_1} = \frac{df_1}{dx_1}\frac{dg_1}{dt_1}$$

②

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}_t \arrow[r, "\vec{r}"] \arrow[dr, "h = f\circ \vec{r}"'] & \mathbb{R}^3_{(x,y,z)} \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$\boxed{(f\circ\vec{r})'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{r}(t_0))\cdot x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{r}(t_0))\cdot y'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(\vec{r}(t_0))\cdot z'(t_0)}$$

$$\boxed{(f\circ\vec{r})'(t) = \nabla f(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)}$$

Εφαρμογή.

Θ. Μ. Τ.

(Θεώρημα μέσης τιμής για $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)

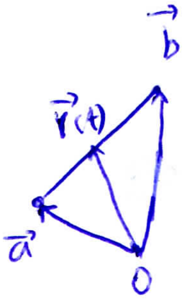
Έστω $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, διαφ/μη
και $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$

Τότε $f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{\xi}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$
για κάποιο $\vec{\xi}$ που ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα $\vec{a}, \vec{b}$

Η απόδειξη βασίζεται στο Θ.Μ.Τ., όπως το γνωρίζουμε για συναρτήσεις μίας μεταβλητής, με χρήση του κανόνα της αλυσίδας, όπως αυτός αναφέρθηκε προηγουμένως.

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα $\vec{a}, \vec{b}$ είνα

$\vec{r}(t) = (1-t)\vec{a} + t\vec{b}$, $0 \le t \le 1$.



Ορίζεται συνεπώς η σύνθεση $g = f \circ \vec{r} : [0,1]$
με τύπο $g(t) = f(\vec{r}(t)) = f((1-t)\vec{a} + t$
$0 \le t \le 1$. Από τον κανόνα της αλυσίδας,

$$g'(t) = \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \quad (1).$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το ΘΜΤ (μιας μεταβλη

$g(1) - g(0) = g'(\zeta)(1-0) \Rightarrow f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \nabla f(\vec{r}(\zeta$

και αρκεί να επιλέξουμε $\vec{\xi} = \vec{r}(\zeta)$.

Ασκήσεις

1) $w(x,y) = x\cdot y$, $\vec{r}(t) = (\text{συν}\,t, \text{ημ}\,t)$

Ποιο είναι το $\frac{d}{dt}(w \circ \vec{r}) = ;$

Λύση

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}_t \arrow[r, "\vec{r}"] \arrow[dr, "h = w \circ \vec{r}"'] & \mathbb{R}^2_{(x,y)} \arrow[d, "w"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$J(w \circ \vec{r})_{t_0} = J(w)_{\vec{r}(t_0)} \cdot J(\vec{r})_{t_0}$$

$$\left.\begin{aligned} \nabla_w &= \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} \\ \vec{r}'(t) &= \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow (w \circ \vec{r})'(t_0) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial w}{\partial x}(\vec{r}(t_0)) & \frac{\partial w}{\partial y}(\vec{r}(t_0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \text{ημ}\,t_0 & \text{συν}\,t_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\text{ημ}\,t_0 \\ \text{συν}\,t_0 \end{pmatrix} = -\text{ημ}^2 t_0 + \text{συν}^2 t_0$$

Επαλήθευση

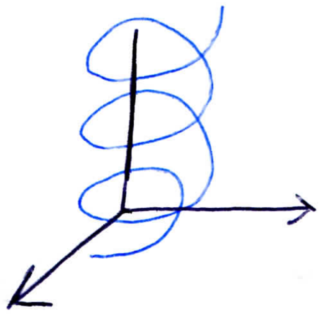
$$(w \circ \vec{r})(t) = w(\text{συν}\,t, \text{ημ}\,t) = \text{συν}\,t \cdot \text{ημ}\,t$$

$$\frac{d}{dt}(w \circ \vec{r})(t) = \frac{d}{dt}(\text{συν}\,t\,\text{ημ}\,t) = -\text{ημ}^2 t + \text{συν}^2 t.$$

2) $T(x,y,z) = xy+z$

Έστω έλικα $\vec{r}(t)$

Να βρεθεί η μεταβολή της θερμοκρασίας T επί της $\vec{r}$



$\vec{r}(t) = (\text{συν}t,\ \text{ημ}t,\ t)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}_t \arrow[r, "\vec{r}"] \arrow[dr, "T\circ\vec{r}"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "T"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$\frac{d}{dt}(T\circ\vec{r}) = ;$$

Οι πίνακες των διαφορικών είναι

$$\nabla T(x,y,z) = \left(\frac{\partial T}{\partial x}(x,y,z),\ \frac{\partial T}{\partial y}(x,y,z),\ \frac{\partial T}{\partial z}(x,y,z)\right)$$

$$\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$

Οπότε από τον κανόνα της αλυσίδας για την $T\circ\vec{r} : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ έχουμε

$$\frac{d}{dt}(T\circ\vec{r})(t_0) = \nabla T(\vec{r}(t_0))\cdot\vec{r}\,'(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} & \frac{\partial T}{\partial y} & \frac{\partial T}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\partial T}{\partial x}(\vec{r}(t_0))\, x'(t_0) + \frac{\partial T}{\partial y}(\vec{r}(t_0))\, y'(t_0) + \frac{\partial T}{\partial z}(\vec{r}(t_0))\, z'(t_0)$$

$$= (-\eta\mu t)\eta\mu t + \sigma\upsilon\nu t\, \sigma\upsilon\nu t + 1\cdot 1 = \sigma\upsilon\nu^2 t - \eta\mu^2 t + 1$$

π.χ. για $t=0$: $\frac{d}{dt}(T\circ\vec{r})(0) = 2$

<u>Επαλήθευση</u>: $(T\circ\vec{r})(t) = T(\vec{r}(t)) =$

$= x(t)y(t) + z(t) = \sigma\upsilon\nu t\cdot\eta\mu t + t,$

οπότε

$$\frac{d}{dt}(T\circ\vec{r})(t) = \frac{d}{dt}(\sigma\upsilon\nu t\cdot\eta\mu t + t)$$

$$= \sigma\upsilon\nu^2 t - \eta\mu^2 t + 1.$$