Εφαρμογές πολ. Taylor $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

(Β) Τοπικά Ακρότατα

$f: U (\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ $(n\geq 1)$, $\vec{z}_0 \in U$

i) Το $\vec{z}_0$ είναι σημείο τοπ. ελαχίστου της f

$\Longleftrightarrow \exists\, S(\vec{z}_0, \delta) : \vec{x} \in U \cap S(\vec{z}_0, \delta)$

(δηλ. $\vec{x}\in U$, $\|\vec{x}-\vec{z}_0\| < \delta$) έχουμε $f(\vec{x}) \geq f(\vec{z}_0)$

ii) Το $\vec{z}_0$ είναι σημείο Τοπικού Μεγίστου της f

$\Longleftrightarrow \exists\, S(\vec{z}_0, \delta) : \vec{x} \in U \cap S(\vec{z}_0, \delta')$ έχουμε

$f(\vec{x}) \leq f(\vec{z}_0)$ // Εάν $\vec{z}_0$ είναι σ. Τοπ Ελαχίστου ή Τοπικού Μεγίστου καλείται σημείο Τοπ. Ακρότατου της f.

iii) Το $\vec{z}_0$ είναι Σαγματικό Σημείο (ή σημείο Σέλλας) της $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ με $n\geq 2$

$\Longleftrightarrow \forall \delta>0,\ \exists \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in S(\vec{z}_0, \delta) : f(\vec{x}_1) < f(\vec{z}_0) < f(\vec{x}_2)$

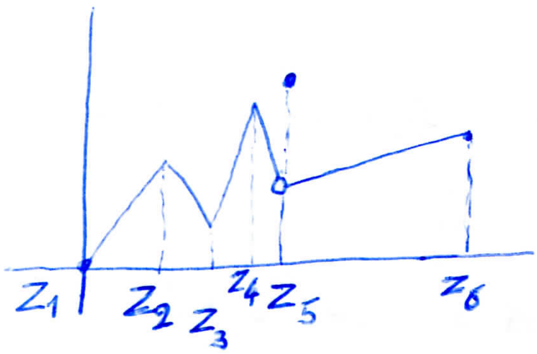
(n=1, παρόμοιο με Σημείο Καμπ

iv) Το $\vec{z}_0$ είναι σημείο <u>Ολικού Μεγίστου</u>

(Ολικού Ελαχίστου) $\Leftrightarrow f(\vec{z}_0) \geq f(\vec{x})$

$(f(\vec{z}_0) \leq f(\vec{x}))$ για <u>κάθε</u> $\vec{x} \in U$.

π.χ.



Τοπ. Ελ.: z_1, z_3

Ολ. Ελ.: z_1

Τοπ. Μεγ.: z_2, z_4, z_5, z_6

Ολικό Μεγ: z_5

Η εύρεση των Τοπ. Ακροτάτων είναι γενικά <u>μη</u> επιλύσιμο πρόβλημα: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Στην περίπτωση που έχουμε $f: U (\subseteq \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$

<u>U = ανοικτό</u> και η f είναι C^2

δηλ. έχει παραγώγους έως και 2ης τάξης, συνεχείς, τότε υπάρχουν περιπτώσεις όπου έχουμε αιθάνυση (ή αν f είναι κυρτή ή κοίλη)

(I) $f:(a,b)\to \mathbb{R}$, $z_0\in(a,b)$, C^2

<u>Πρόταση</u> (Αρχή Fermat)

Εάν το z_0 είναι σ. Τ. Ακροτάτου $\Rightarrow f'(z_0)=0$
$\not\Leftarrow$
(π.χ. $x^3, x^5, x^7, \dots$)

<u>Αποδ</u>

z_0 = Τοπ. Ελαχίστου

$f(x)\geq f(z_0)$, $x\in(z_0-\delta, z_0+\delta)\subseteq(a,b)$

$$\lim_{x\to z_0^+}\frac{f(x)-f(z_0)}{x-z_0}\geq 0,\quad f'_+(z_0)\geq 0$$

$$\lim_{x\to z_0^-}\frac{f(x)-f(z_0)}{x-z_0}\leq 0,\quad f'_-(z_0)\leq 0$$

$\Rightarrow f'(z_0)=0$

<u>Ορισμός</u> : Εάν $f'(z_0)=0$, το z_0 καλείται <u>κρίσιμο σημείο</u>

Ισχύει το εξής:

Έστω z_0 = κρίσιμο, $f''(z_0)\neq 0$

- $f''(z_0)>0$, z_0 = τοπ. Ελ.
- $f''(z_0)<0$, z_0 = Τοπ. Μεγ.

$$f(z_0+h) \cong f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1} h + \frac{f''(z_0)}{2} h^2$$

$$f(z_0+h) - f(z_0) \cong \frac{f''(z_0)}{2} h^2 \begin{cases} f''(z_0)>0, & f(z_0+h) \geq f(z_0) \\ f''(z_0)<0, & f(z_0+h) \leq f(z_0) \end{cases}$$

II $f : U \,(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$, <u>$U$ = ανοικτό</u>

$\underline{f \; C^2}$

<u>Πρόταση (Αρχή Fermat)</u>

Εάν το $\vec{z}_0$ είναι Τοπ. Ακρότατο τότε

$$\nabla f(\vec{z}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{z}_0), \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{z}_0) \right) = (0, 0)$$

$\cancel{\Leftarrow}$ π.χ. $f(x,y) = x^3$, $(0,0)$

<u>Απόδ.</u>

$g(t) = f(\vec{z}_0 + t\vec{e}_1)$, $g(t) \geq g(0)$, <u>$g : (-\delta, +\delta) (\subseteq \mathbb{R}) \to$</u>

$|t| < \delta \xRightarrow[\text{FERMA.}]{\text{ΑΡΧΗ}} g'(0) = 0$

$z_0 \,\} \; t=0 \qquad z_0 + t\vec{e}_1 \,\} \; t$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{z}_0) = 0$$

Όμοια $\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{z}_0) = 0$

Οι κωδοδείξεις ΜΟΝΟΝ για τους ενδιαφερόμενο

Έστω $\vec{z}_0=(x_0, y_0)$ $\underline{\underline{\nabla f(\vec{z}_0)=(0,0)}}$

$$f(x,y)\cong f(x_0,y_0)+\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,\,y-y_0)+\frac{1}{2}$$

$$\cdot\left[(x-x_0,\,y-y_0)\begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0)\\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}\right] \text{(Taylor}$$

$$=f(x_0,y_0)+\frac{1}{2}\Big[(x-x_0)^2\cdot f_{xx}(x_0,y_0)+2(x-x_0)(y-y_0)\cdot f_{xy}(x_0,y_0)+$$
$$+(y-y_0)^2\cdot f_{yy}(x_0,y_0)\Big]$$

Για να βρούμε το είδος του τοπ. ακροτάτου του Κρίσιμου Σημείου $\vec{z}_0(x_0, y_0)$ $(\nabla f(x_0,y_0)=(0,0))$ πρέπει να μελετήσουμε τη συμπεριφορά του Εσσιανού Πίνακα $H(x_0,y_0)=\begin{pmatrix} a=f_{xx}(x_0,y_0) & \gamma=f_{xy}(x_0,y_0)\\ \gamma=f_{xy}(x_0,y_0) & b=f_{yy}(x_0,y_0)\end{pmatrix}$

δηλ. του $H(x_0,y_0)=\begin{pmatrix} a & \gamma\\ \gamma & b\end{pmatrix}$ ("Δεύτερη Παράγωγος" στο (x_0,y_0))

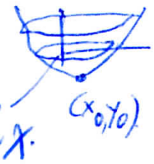
Έστω $P(x,y)=(x-x_0,\,y-y_0)\begin{pmatrix} a & \gamma\\ \gamma & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0\\ y-y_0\end{pmatrix}$ με $\begin{vmatrix} a & \gamma\\ \gamma & b\end{vmatrix}=ab-\gamma^2\neq 0$

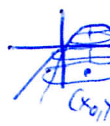
π.χ.

$\gamma = 0$, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $p(x,y) = a(x-x_0)^2 + b(y-y_0)^2$,

$a \cdot b \neq 0$, Παραβολοειδές

• $ab > 0$ $\begin{cases} a > 0 \ (b>0), \ p(x,y) \text{ Ελ. Παραβολοειδές με } (x_0, y_0) \text{ Τοπ. Ελάχ.} \\ a < 0 \ (b<0), \ldots \text{ με } (x_0, y_0) \text{ Τοπ. Μέγιστο} \end{cases}$





• $ab < 0$, $p(x,y)$ Υπερβ. παραβολοειδές με σημείο σαγματικό στο (x_0, y_0)

π.χ. $\begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}$ $\gamma \neq 0$, $p(x,y) = 2\gamma^2 (x-x_0)(y-y_0)$

Υπερβ. παραβολοειδές με σαγμ. σημ. στο (x_0, y_0)

Γενικά

$$p(x,y) = (x-x_0, y-y_0) \begin{pmatrix} a & \gamma \\ \gamma & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \text{ με } \Delta = \begin{vmatrix} a & \gamma \\ \gamma & b \end{vmatrix} \neq 0$$

$\Delta > 0$ και $a > 0$ το (x_0, y_0) Τοπ. Ελάχιστο

$\Delta > 0$ και $a < 0$ το (x_0, y_0) Τοπ. Μέγιστο

$\Delta < 0$ Το (x_0, y_0) Σαγματικό Σημείο.

Κριτήριο (μαθαίνουμε απ' έξω)

Έστω (x_0, y_0) κρίσιμο σημείο της f, $\nabla f(x_0,y_0)=(0,0)$

$$H(x_0,y_0)=\begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

i) Εάν η ορίζουσα $|H(x_0,y_0)| =$

$$= f_{xx}(x_0,y_0)\, f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0) > 0$$

Τότε
- $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$, (x_0,y_0) Τοπ. Ελαχ
- $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$, (x_0,y_0) Τοπ Μέγιστο

ii) Εάν $|H(x_0,y_0)| < 0$, (x_0,y_0) Σαγμ. σημείο.

Ασκήσεις

1) $f(x,y) = xy - x^2 - y^2 - 2x - 2y + 4$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

Να βρεθούν τα σημεία Τοπ. Ακροτάτων και σημεία σάγματος.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y - 2x - 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x - 2y - 2$$

$$\nabla f(x,y) = (0,0)$$
$$(x_1 = -2,\ y_1 = -2)$$

$$f_{xx}(x_1,y_1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_1,y_1) = -2$$

$$f_{yy}(x_1,y_1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_1,y_1) = -2$$

$$f_{xy}(x_1,y_1) = 1$$

$$H(x_1,y_1) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$|H(x_1,y_1)| = 4-1 = 3 > 0$

$a = f_{xx}(x_1,y_1) = -2 < 0$ / $(-2, -2)$ Τοπ. Μέγιστο

2) $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + y^2$

$f_x(x,y) = 3x^2 - 6x = 0$

$f_y(x,y) = 2y = 0$

/ Κρίσιμα σημεία: $(x_1=0, y_1=0)$, $(x_2=2, y_2=0)$

$H(0,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -12 < 0$, $(0,0)$ Σημείο Σάγματος

$H(2,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 12 > 0$

$(2,0)$ Τοπ. Ελάχιστο.

3) $f(x,y)=x^3+x^2y-y^2-4y$

Κρίσιμα: $(0,-2)$, $\left(1,-\frac{3}{2}\right)$, $(-4,6)$

$H(0,-2)=\begin{pmatrix}-4 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$, $(0,-2)$ Τ. Μέγιστο

$H\left(1,-\frac{3}{2}\right)=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$, $\left(1,-\frac{3}{2}\right)$ Σάγμα

$H(-4,6)=\begin{pmatrix}-12 & -8\\ -8 & -2\end{pmatrix}$, $(-4,6)$ Σάγμα

4) $f(x,y)=x^2y^2-5x^2-8xy-5y^2$ (Μόνοι μας)

Σημείωση: Ανάλογη θεωρία ισχύει για $f: V(\subseteq \mathbb{R}^3)\to\mathbb{R}$, $(x_0,y_0,z_0)\in V$=
και γενικότερα για $f: V(\subseteq \mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ $(n\geq 4)$

Περισσότερες Ασκήσεις

Υλικό Παρελθόντων Ετών → ασκήσεις 2007 → 0.5 Ακρότατα Συνα

→ Ασκήσεις: 5.1, 5.3 (με σχήματα)

ΚΑΙ Taylor + Ακρότατα (Π. Μπουμπούλης)