

Ανάλυση II - 15/04/2011 - μάθημα 22

(I) Αλλαγή συντεταγμένων στον \mathbb{R}^2

$$D \subseteq \mathbb{R}^2, \quad \vec{T}(r, \vartheta) = (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$$

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) dx dy &= \iint_{\vec{T}^{-1}(D)} f(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \left\| \underset{\text{από λ. τιμή}}{J \vec{T}(r, \vartheta)} \right\| dr d\vartheta \\ &= \iint_{\vec{T}^{-1}(D)} f(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \cdot r dr d\vartheta \end{aligned}$$

Ασκησης (με πολλαίο μετασχηματισμό)

- 1) (i) Να υπολογιστεί το εμβαδόν $A(D)$ όπου D κυκλικός δίσκος ακτίνας a ($a > 0$)
(ii) Εάν $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$ να υπολογιστεί

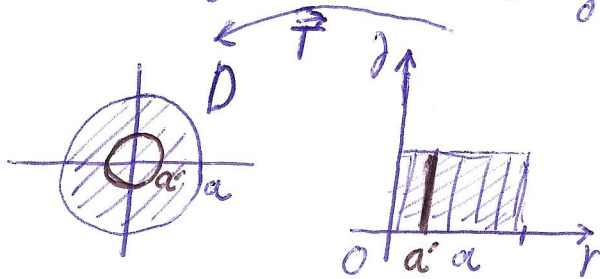
$$I = \iint_D \eta r (x^2 + y^2) dx dy$$

Λύση

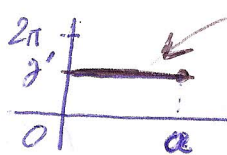
- (i) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq a^2\}$
(Το εμβαδόν και ο όγκος ενός B είναι αναλλοίωτους προς τις μετασχηματισμούς και τις στροφές)

$$A(D) = \iint_D 1 \, dx \, dy = \int_0^a \left(\int_0^{2\pi} r \, d\theta \right) dr = \int_0^a r(2\pi) \, dr = 2\pi \frac{r^2}{2} \Big|_0^a$$

$$= \underline{\underline{\pi a^2}} \quad \left(\text{Καταλήξαμε στον τύπο του Αρχιμήδη} \right)$$



Αν είχαμε αντιστροφή σειρά ολοκλήρωσης



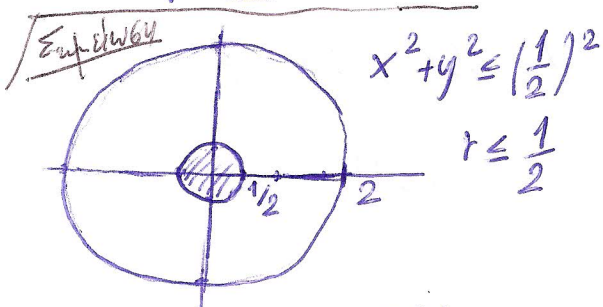
$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad I &= \int_0^a \int_0^{2\pi} r \sin(r^2) \, d\theta \, dr = 2\pi \int_0^a (r \sin r^2) \, dr = \\ &= 2\pi \left[-\frac{\cos r^2}{2} \right]_0^a = \pi (1 - \cos(a^2)) \end{aligned}$$

2η ασκ.) $\iint_D (x^2 + y^2) \, dx \, dy$, D περιβάλλεται από την καμπύλη $x^2 + y^2 = 2x$ και έχει $y \geq 0$



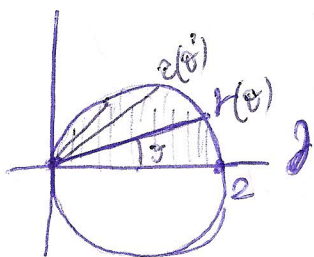
$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$

$$\vec{T}^{-1}(D) = \left\{ (r, \theta) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \underline{\underline{2 \cos \theta}} \right\}$$



ΚΑΝΟΥΜΕ
Λ ΑΘ Ο Σ ...

... αν βάλουμε $r \leq \frac{1}{2}$ και $r \leq 2$, τότε $D = \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right\} \cup \left\{ (x, y) : \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 4 \right\}$



$$x^2 + y^2 = 2x$$

$$r^2 = 2r \cos \theta$$

$$r = 2 \cos \theta$$

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{2 \cos \theta} r^2 \cdot r \, dr \right) d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{(2 \cos \theta)^4}{4} d\theta = 4 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

(II) Αλλαγή συντεταγμένων στον \mathbb{R}^3

$$\iiint_B f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \iiint_{\vec{T}^{-1}(B)} f(\vec{T}(u, v, w)) \left| \det \vec{J} \vec{T}(u, v, w) \right| \, du \, dv \, dw$$

πίνακας Jacobi του \vec{T} στο (u, v, w)

* *

|||

ορίσματα

απόλυτη τιμή

$\vec{T}(u, v, w) = (x, y, z)$
 τύπος αλλαγής συντεταγμένων στο τριώνιο ομοκυβερητό

• Τι μας δίνει το $\iiint_B f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$ για $f \geq 0$

Έστω $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ (συνεχής), $B \subseteq \mathbb{R}^3$, xy -απλό (ή xy απλό, ... ή απλό), $f \geq 0$.

Υπενθύμιση

$$A \left\{ \begin{array}{l} f: D \rightarrow \mathbb{R}, f \geq 0, \Sigma(f, D) = \{(x, y, z) : (x, y) \in D (\subseteq \mathbb{R}^2) \\ D \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ x-απλό (ή γ-απλό ή απλό)} \\ 0 \leq z \leq f(x, y) \} \end{array} \right.$$

$$\Sigma(f, D), V(\Sigma(f, D)) = \iint_D f(x, y) dx dy$$

$$f \equiv 1, V(\Sigma(f, D)) = \iint_D 1 dx dy = A(D)$$

(A = εμβαδόν)

$$M = \iint_D f dx dy = \text{Μάζα του } D \text{ αν}$$

υπάρχει πυκνότητα $f(x, y)$ στο $(x, y) \in D$

$$\text{Το } V_4(\Sigma(f, B)) = \iiint_B f dx dy dz$$

ή $M = \iiint_B f dx dy dz$ η μάζα του στερεού B
με πυκνότητα $f(x, y, z)$ στο $(x, y, z) \in B$

$$f \equiv 1, V_4(\Sigma(f, B)) = \iiint_B 1 dx dy dz = V_3(B)$$

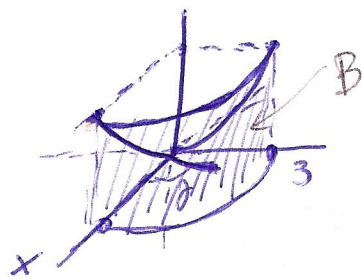
Άσκησης I (Αλλαγή μεταβλητών σε κυλινδρικές)

Ξημείωση: Χρησιμοποιούμε κυλινδρ. συντεταγμένες όταν στο προβλημα μας υπάρχει συμμετρία ως προς ΑΞΟΝΑ Ζ

• Η ορίζουσα του πίνακα Jacobi του $\vec{T}(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ είναι (απόλυτως) r

Άσκησης (με Κυλινδρικό Μετασχηματισμό)

1) Όγκος του στερεού B που βρίσκεται στο 1^ο οχδοημόριο (δηλ. $x, y, z \geq 0$) και περιβάλλεται από τις επιφάνειες $x^2 + y^2 = 9$, $3z = x^2 + y^2$



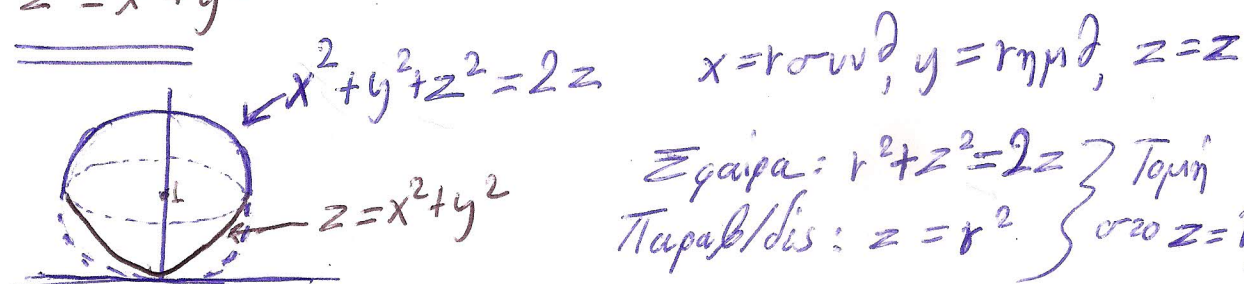
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = r^2 &\Rightarrow \begin{cases} \text{Κύλινδρος} \\ r^2 \leq 9 \text{ και } 3z \leq r^2 \end{cases} \text{ Παρολογοειδής.} \\ x, y \geq 0 &\Rightarrow \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{aligned}$$

$$B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 9, 3z \leq x^2 + y^2, x, y, z \geq 0 \right\}$$

$$\vec{T}^{-1}(B) = \left\{ (r, \theta, z) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 3, 0 \leq z \leq \frac{r^2}{3} \right\}$$

$$V(B) = \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \left(\int_0^{r^2/3} r \, dz \right) dr \, d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^3 \frac{r^3}{3} dr = \frac{\pi}{2 \cdot 3 \cdot 4} 3^4$$

2) Όγκος B που βρίσκεται εντός της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ και εντός του παραβολοειδούς $z = x^2 + y^2$



$$\left. \begin{aligned} \text{Σφαίρα: } r^2 + z^2 = 2z \\ \text{Παραβ/δής: } z = r^2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Τομή} \\ &\text{στο } z=1, \text{ ατμάδα.} \end{aligned}$$



- Σ επιπέδα

$$z^2 - 2z + 1 = 0$$

$$z = 1 + \sqrt{1-1^2}$$

Παραβολοειδής

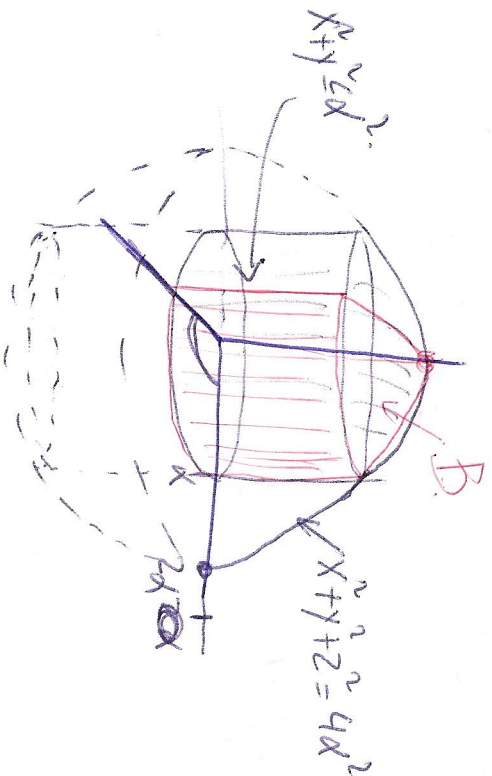
$$z = r^2$$

$$V(B) = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(\int_r^{1+\sqrt{1-r^2}} r \, dz \right) dr d\theta = \dots = \frac{5\pi}{6}$$

3) $M = \iiint_B z \, dx \, dy \, dz$ (=Μάζα του B με πυκνότητα 1)
 όπου $B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2, z \geq 0\}$

$$B = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2, z \geq 0\}$$

$$M = \int_0^{\pi/2} \int_0^a \left(\int_0^{\sqrt{4a^2-r^2}} r \cdot z \, dz \right) dr d\theta = \frac{7\pi}{16} a^2$$



Σ επιπέδα

Κύβινος

$$x^2 + z^2 \leq 4a^2$$

$$x^2 \leq a^2$$