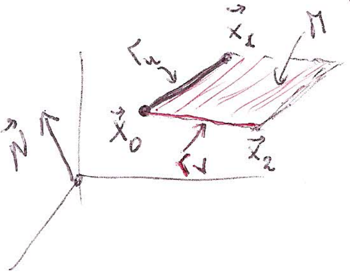
ΜΑΘΗΜΑ 26 (9-05)

Επιφανειακά Ολοκληρώματα: Εφαπτόμενο επίπεδο, Κάθετο διάνυσμα σε επιφάνεια, Ολοκληρώματα

Για να ορίσουμε το μήκος καμπύλης Γ και τα επικαμπύλια ολοκληρώματα χρειαστήκαμε το στοιχειώδες μήκος $ds=\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt$ ($\Gamma: \vec{r}=\vec{r}(t)$, C^1 ή κ.τ. C^1). Αρχίσαμε με ευθύγραμμα τμήματα, συνεχίσαμε με πολυγωνικές γραμμές και επεκτείναμε τους ορισμούς για C^1 ή κ.τ. C^1 καμπύλες παραμετρικοποιημένες.

Πως θα ορίσουμε το στοιχειώδες εμβαδόν επιφάνειας; Με τι είδους "απλές" επιφάνειες θα αρχίσουμε για να επεκταθούμε σε "καλές" επιφάνειες;

Ποιου "απλού" σχήματος/επιφάνειας γνωρίζουμε να υπολογίζουμε το εμβαδόν;



Παραλληλογράμμου !

$$E=\|(\vec{x}_1-\vec{x}_0)\times(\vec{x}_2-\vec{x}_0)\|$$

$$\vec{N}\perp(\vec{x}_1-\vec{x}_0),\ (\vec{x}_2-\vec{x}_0) \qquad ,\ \vec{N}=(\vec{x}_2-\vec{x}_0)\times(\vec{x}_1-\vec{x}_0)$$

Γράφουμε μια παραμέτριση της επιφάνειας Π του παραλληλογράμμου:

$$\vec{r}(u,v)=\vec{r}(u_0,v_0)+(u-u_0)(\vec{x}_1-\vec{x}_0)+(v-v_0)(\vec{x}_2-\vec{x}_0) \quad \text{με } u\in[u_0,u_1],\ v\in[v_0,v_1]$$

ώστε: $\vec{r}(u_1,v_0)=\vec{x}_1$, $\vec{r}(u_0,v_1)=\vec{x}_2$, $\vec{r}(u_0,v_0)=\vec{x}_0$.

$(u_1-u_0=1,\ v_1-v_0=1)$

Η Γ_u: $\vec{r}(u,v_0)=\vec{r}(u_0,v_0)+(u-u_0)(\vec{x}_1-\vec{x}_0)$, με $u\in[u_0,u_1]$

έχει εφαπτόμενο διάνυσμα το $(\vec{x}_1-\vec{x}_0)\overset{\text{συμβ}}{=}\vec{r}_u(u_0,v_0)=\left.\dfrac{d\vec{r}(u,v_0)}{du}\right|_{u=u_0}$

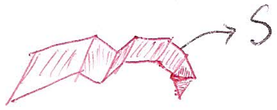
Η Γ_v: $\vec{r}(u_0,v)=\vec{r}(u_0,v_0)+(v-v_0)(\vec{x}_2-\vec{x}_0)$, με $u\in[v_0,v_1]$

έχει εφαπτόμενο διάνυσμα το $(\vec{x}_2-\vec{x}_0)\overset{\text{συμβ}}{=}\vec{r}_v(u_0,v_0)=\left.\dfrac{d\vec{r}(u_0,v)}{dv}\right|_{v=v_0}$

Άρα το $\vec{r}_u(u_0,v_0)\times\vec{r}_v(u_0,v_0)$ είναι <u>κάθετο στην επιφάνεια</u> Π του παραλληλογράμμου, το εμβαδόν του Π είναι

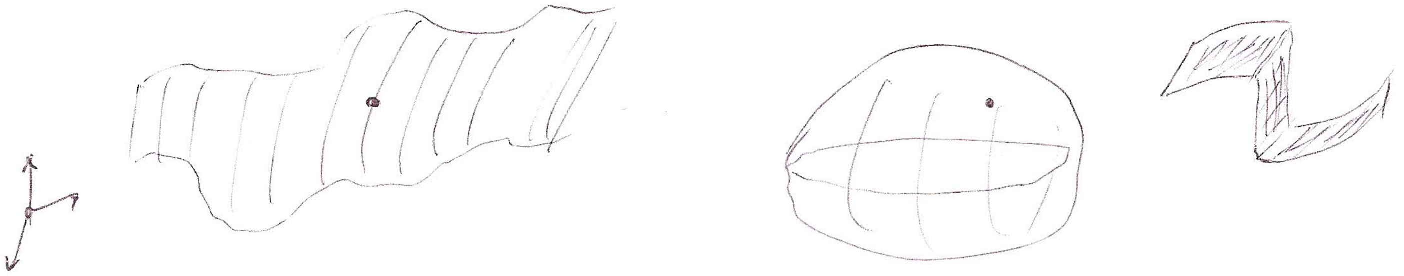
$$E=\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|(u_1-u_0)(v_1-v_0)$$

Αν έχουμε μια πολυεδρική επιφάνεια, που έχει έδρες παραλληλόγραμμα (ή τρίγωνα) μπορούμε να βρούμε το εμβαδόν της

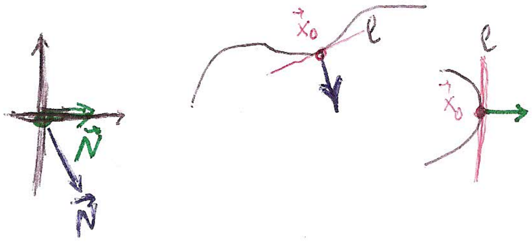


βρίσκοντας τα κάθετα σε κάθε παραλληλόγραμμο και μετά προσθέτοντας έχουμε το $E(S)$

Τι πρέπει να δημιουργήσουμε σε <u>τυχαία "καλή" επιφάνεια</u>;
<u>ΚΑΘΕΤΑ διανύσματα σε τυχαίο σημείο της</u> !!



Εάν είχαμε μια "καλή" καμπύλη Γ στον $\mathbb{R}^2$ θα βρίσκαμε την
εφαπτομένη ευθεία ℓ στο $\vec{x}_0\in\Gamma$
και $\vec{N}$ κάθετο στην Γ στο $\vec{x}_0$ θα
ήταν "καλό" να οριστεί να είναι
κάθετο στην ℓ.



Για να δουλέψουμε για επιφάνειες οφείλουμε να ορίσουμε το <u>Εφαπτόμενο Επίπεδο</u> σε <u>επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$</u>

Πως περιγράφεται μια επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$;;

α) $S_c = \{(x,y,z) : F(x,y,z) = c\}$, όπου $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (ή σε $B \subseteq \mathbb{R}^3$)

α′) $S_0 = \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ z = f(x,y)\}$, όπου $f : D(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$

δηλ. υπογράφημα της f. $S = \{(x,y,z) : F(x,y,z) = z - f(x,y) = 0\}$ (ανάγεται στην α)

β) $S = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in D\}$ όπου $\vec{r} : D(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^3$

$\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

α) Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια συνάρτηση $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (βαθμωτό πεδίο)

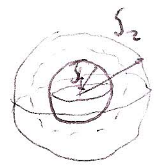
π.χ F = θερμοκρασία, πίεση στο $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Τότε τα σημεία $(x,y,z) \in S$ έχουν την ίδια στάθμη (θερμοκρασία, ...)

π.χ . αν $F(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, τότε για $\alpha > 0$

$S_\alpha = \{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \alpha\}$

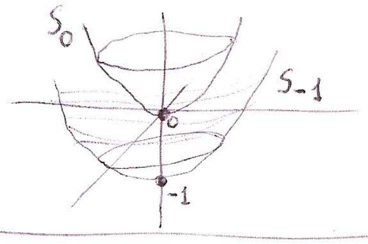
είναι σφαίρες.



• αν $F(x,y,z) = x^2+y^2-z$, τότε για

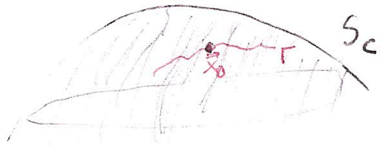
$S_\alpha = \{(x,y,z) : x^2+y^2-z = \alpha\} = \{(x,y,z) : \alpha + z = x^2+y^2\}$

είναι παραβολοειδή.



Η $S_c = \{(x,y,z) : F(x,y,z) = c\}$ καλείται ισοσταθμική επιφάνεια της F στάθμης c

Ας πάρουμε μια καμπύλη Γ πάνω στην S_c που περνά από το $\vec{x}_0 \in S_c$



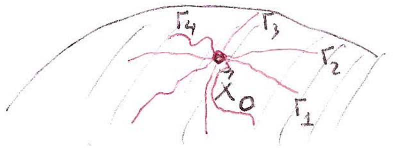
δηλαδή $\begin{cases} F(\vec{r}(t)) = c, & t\in[\alpha,\beta] \\ \vec{r}(t_0)=\vec{x}_0 & \text{για κάποιο } t_0\in[\alpha,\beta] \end{cases}$ $\quad (\Gamma : \vec{r}=\vec{r}(t),\ t\in[\alpha,\beta])$

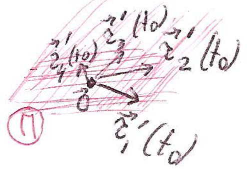
Τότε $\dfrac{d(F\circ\vec{r})(t)}{dt}=0$, υποθέτοντας ότι οι F, $\vec{r}$ είναι διαφορίσιμες.

Όμως $\dfrac{d(F\circ\vec{r})(t_0)}{dt} = \nabla F(\vec{r}(t_0))\circ\vec{r}\,'(t_0)$ (Κανόνας Αλυσιδωτής Παραγώγισης)

Τελικά: $\nabla F(\vec{x}_0)\circ\vec{r}\,'(t_0)=0$

Άρα το $\nabla F(\vec{x}_0)$ είναι κάθετο στο εφ. διάνυσμα $\vec{r}\,'(t_0)$ τυχαίας Γ που περνά από το $\vec{x}_0$ $(\nabla F(\vec{x}_0)\neq\vec{0})$



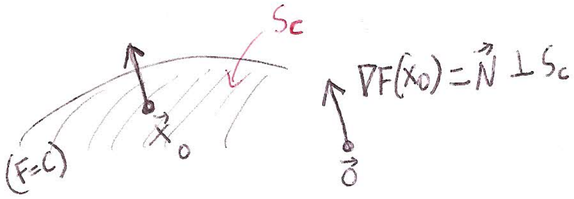


Όλα αυτά τα $\vec{r}\,'(t_0)$ ανήκουν στο ίδιο επίπεδο Π αυτό ορίζεται ως εφαπτόμενο επίπεδο της S_c στο $\vec{x}_0$.

Το επίπεδο αυτό έχει κάθετο το $\nabla F(\vec{x}_0)$ και περνά από το $\vec{x}_0$. Η εξίσωση του ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ στο $\vec{x}_0\in S$ στην ισοσταθμική $S_c=\{(x,y,z) : F(x,y,z)=c\}$ θα είναι:

$$\nabla F(\vec{x}_0)\circ(\vec{x}-\vec{x}_0)=0$$

ή



αν $\vec{x}_0=(x_0,y_0,z_0)$, $\vec{x}=(x,y,z)$

$$(x-x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)+(y-y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)+(z-z_0)\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)=0$$

Μπορούμε φυσιολογικά να ορίσουμε:

Το $\vec{N}=\nabla F(\vec{x}_0)$ είναι κάθετο στην S_c στο $\vec{x}_0\in S_c$

(είναι $\perp$ στα εφ. διανύσματα $\vec{r}\,'(t_0)$)

Το α') είναι πια απλό! Έστω $f: D \to \mathbb{R}$ και $z_0 = f(x_0,y_0), (x_0,y_0) \in D$.

$S_0 = \{(x,y,z) : z = f(x,y)\}$, $F(x,y,z) = z - f(x,y)$, $F: D \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(D \subseteq \mathbb{R}^2)$

δηλαδή η S_0 είναι ισοσταθμική της F στάθμης $c = 0$.

Οπότε αν η f είναι διαφορίσιμη το εφαπτόμενο επίπεδο στην S_0 (στο γράφημα της f) είναι $\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0), \frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\right)$

$\cdot (x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0$ ή

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + 1\cdot(z-z_0) = 0 \quad \text{ή}$$

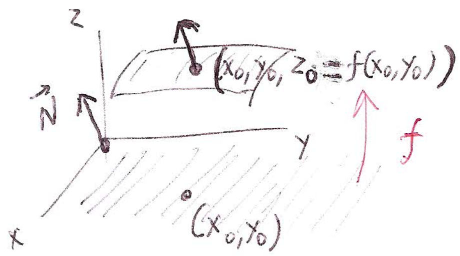
$$z = z_0 + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \quad \text{ή}$$

* $L(x,y) = f(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

δηλ. η Γραμμικοποίηση της f στο $(x_0,y_0) \in D$.

Κάθετο διάνυσμα στο γράφημα της f είναι

$$\vec{N} = \nabla F(x_0,y_0,z_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right)$$

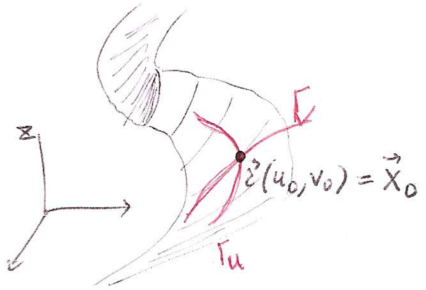


$$\vec{N} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right)$$

- Σε ισοσταθμική επιφάνεια το $\vec{x}_0 \in S_c$ με $\nabla F(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$ καλείται ομαλό.
- Παρατηρούμε ότι τα σημεία του γραφήματος μιας διαφορίσιμης συνάρτησης είναι όλα ομαλά.

β) $S=\{\vec{r}(u,v) \ : \ (u,v)\in D\}$

και $\vec{x}_0=\vec{r}(u_0,v_0)\in S$



Σταθεροποιούμε το v_0,

τότε η $\Gamma_u: \vec{r}_1(u)=\vec{r}(u,v_0)$ είναι καμπύλη πάνω στην S

Σταθεροποιούμε το u_0,

τότε η $\Gamma_v: \vec{r}_2(v)=\vec{r}(u_0,v)$ είναι καμπύλη πάνω στην S.

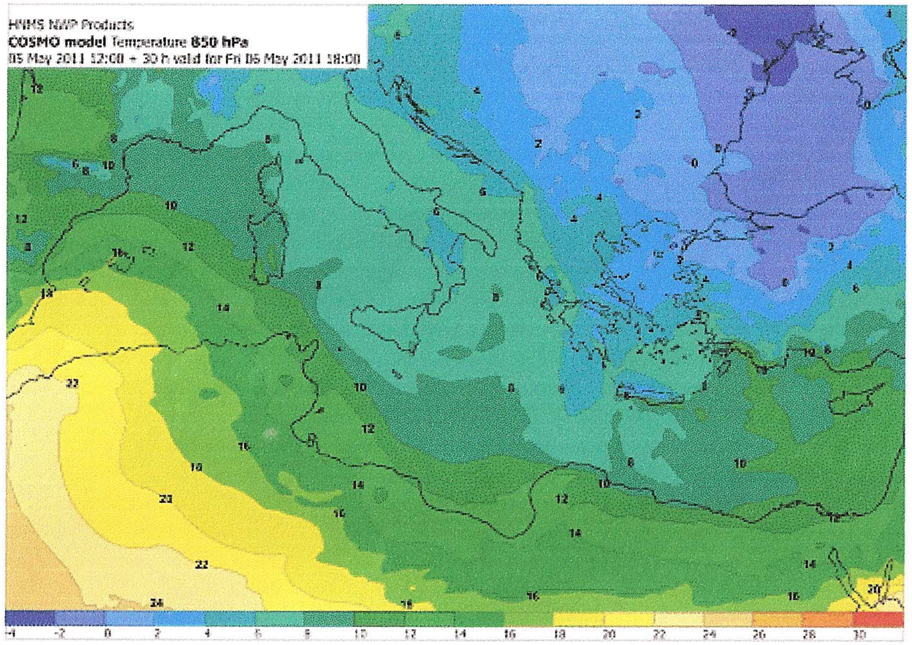
Η Γ_u έχει εφαπτόμενο διάνυσμα στο $u=u_0$: $\vec{r}_u(u_0,v_0)=\vec{r}_1{}'(u_0)$

και η Γ_v » » στο $v=v_0$: $\vec{r}_v(u_0,v_0)=\vec{r}_2{}'(v_0)$

Άρα : κάθετο στην S θα είναι $\vec{N}=\vec{r}_u(u_0,v_0)\times\vec{r}_v(u_0,v_0)$ στο σημείο $\vec{x}_0=\vec{r}(u_0,v_0)$ (αν $\vec{r}_u(u_0,v_0)\times\vec{r}_v(u_0,v_0)\neq\vec{0}$)

~ · ~

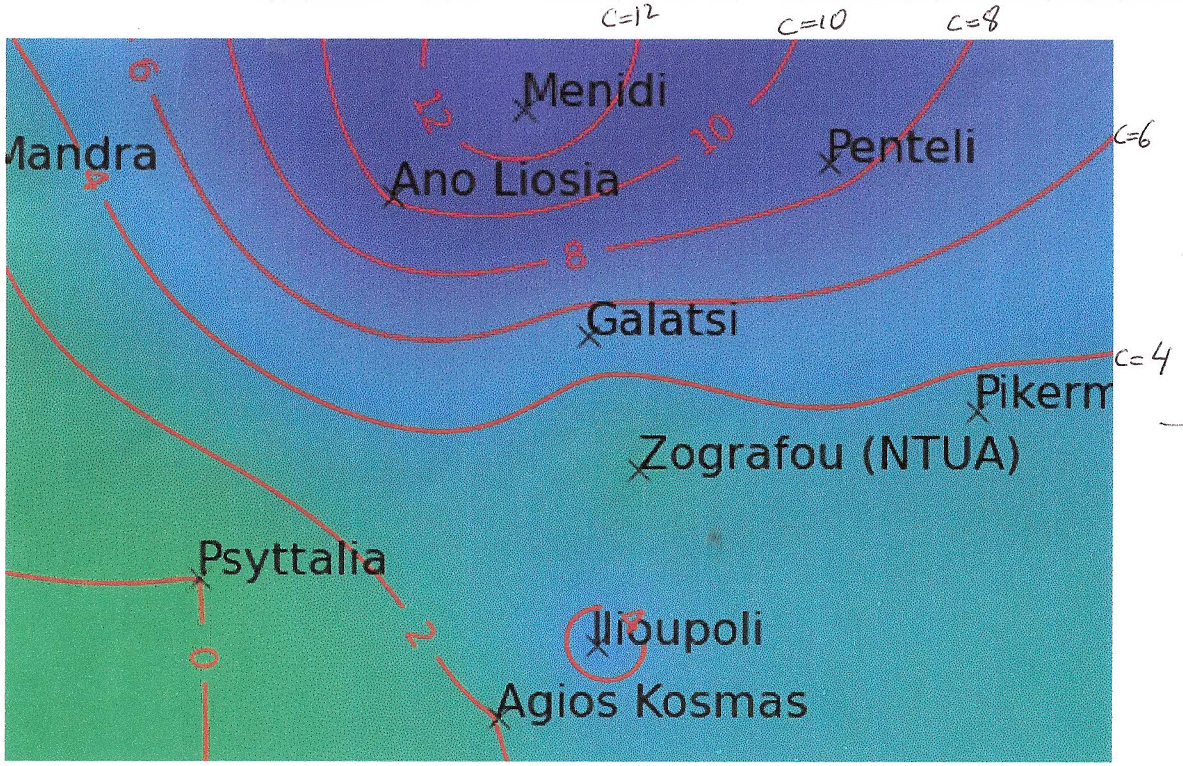
Ανάλογα με τις ισοσταθμικές επιφάνειες έχουμε τις ισοσταθμικές καμπύλες για $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.



6 Μαΐου 2011.

ΕΜΥ (hnms.gr)

Ισοσταθμικές καμπύλες



Βροχή 5 Μαΐου 2011.

$f(x,y)$ = χιλιοστά βροχής στο $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$\Gamma_c = \{(x,y) : f(x,y) = c\}$ | ισοσταθμική καμπύλη στάθμης c

ΕΜΠ (hoa.ntua.gr)

Ασκήσεις

1) Να ευρεθεί κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας S στο $\vec{x}_0 \in S$ και το εφαπτόμενο επίπεδο :

$S=\{(x,y,z) : z=x^2+y^2\}$ στο $\vec{x}_0=(1,1,2)\in S$.

α) $F(x,y,z)=z-x^2+y^2$, $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $S=S_0$ ισοσταθμική της F με $c=0$ '

Κάθετο στο $(1,1,2)$ είναι

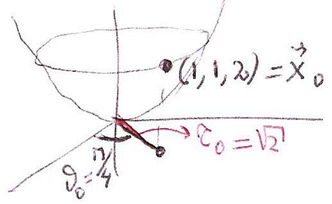
$\vec{N}(1,1,2)=\nabla F(1,1,2)=(-2,-2,1)$

α') $S=\{(x,y,z) : f(x,y)=x^2+y^2\}$, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $S=$ γράφημα της f

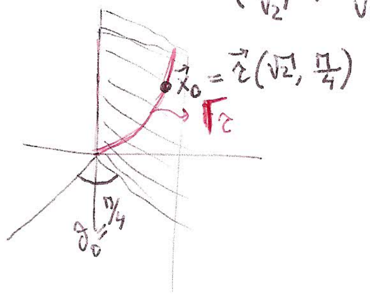
Κάθετο στο $(1,1,2)$ είναι $\vec{N}(1,1,2)=\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(1,1),-\frac{\partial f}{\partial y}(1,1),+1\right)=(-2,-2,1)$

β) $S=\{\vec{\tau}(\tau,\theta)=(\tau\,\sigma\upsilon\nu\vartheta, \tau\,\eta\mu\vartheta, \tau^2) \ , (\tau,\theta)\in[0,+\infty)\times[0,2\pi]\}$

$(1,1,2)=\vec{\tau}\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)$

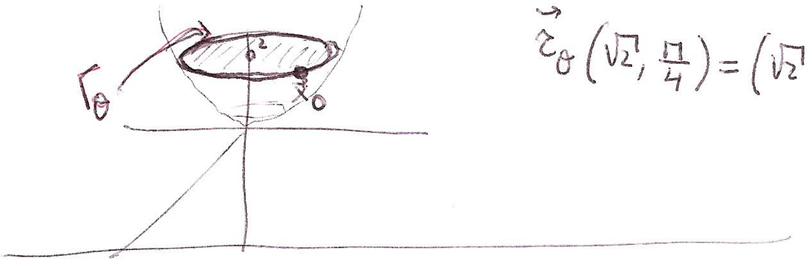


Γ_τ : $\vec{\tau}_1\left(\tau,\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}},\frac{\tau}{\sqrt{2}},\tau^2\right)$



$\vec{\tau}_\tau\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}},\frac{\tau}{\sqrt{2}},\tau^2\right)'_{(\tau=\sqrt{2})}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},2\sqrt{2}\right)$

Γ_θ : $\vec{\tau}_2(\sqrt{2},\theta)=(\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\vartheta,\sqrt{2}\,\eta\mu\vartheta,2)$



$\vec{\tau}_\theta\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)=(\sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu\vartheta,\sqrt{2}\,\eta\mu\vartheta,2)'_{\theta=\frac{\pi}{4}}=(-1,1,0)$

$\vec{N}(1,1,2)=\vec{\tau}_\tau\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)\times\vec{\tau}_\theta\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},2\sqrt{2}\right)\times(-1,1,0)\Rightarrow$

$\vec{N}(1,1,2)=\sqrt{2}(-2,-2,1)$

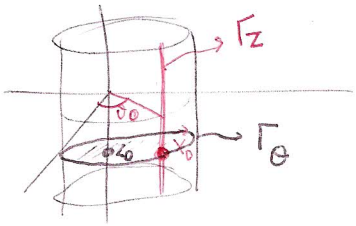
Το εφαπτόμενο επίπεδο είναι $\vec{N}(1,1,2)\circ(\vec{x}-\vec{x}_0)=0$ (στο $(1,1,2)\in S$)

$$2(x-x_0)+2(y-y_0)-(z-z_0)=0 \quad , \ (x_0,y_0,z_0)=(1,1,2)$$

$$2(x-1)+2(y-1)-(z-2)=0$$

$z=2x+2y-2$ Εφ. επίπεδο της S στο $(1,1,2)$

2) Να βρεθεί κάθετο διάνυσμα της $S=\{(x,y,z):\ x^2+y^2=a^2\}$ $(a>0)$ στο $(x_0,y_0,z_0)\in S$.

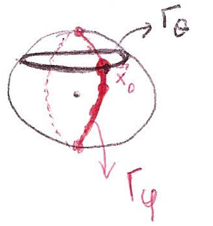


$$S=\{\vec{r}(\theta,z)=(a\,\text{συν}\theta,\ a\,\text{ημ}\theta,\ z):\ (\theta,z)\in[0,2\pi]\times\mathbb{R}\}$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{r}_\theta(\theta_0,z_0)&=(-a\,\text{ημ}\theta_0,\ a\,\text{συν}\theta_0,\ 0)\\ \vec{r}_z(\theta_0,z_0)&=(0,\ 0,\ 1)\end{aligned}\right\}\ \vec{N}=\vec{r}_\theta(\theta_0,z_0)\times\vec{r}_z(\theta_0,z_0)=(a\,\text{συν}\theta_0,\ a\,\text{ημ}\theta_0,\ 0)$$

όπου $(x_0,y_0,z_0)=(a\,\text{συν}\theta_0,\ a\,\text{ημ}\theta_0,\ z_0)$

3) Να βρεθεί κάθετο διάνυσμα στην $S:\ x^2+y^2+z^2=a^2$ $(a>0)$ στο $(x_0,y_0,z_0)\in S$.



$$(x_0,y_0,z_0)=(a\,\text{συν}\theta_0\,\text{ημ}\varphi_0,\ a\,\text{ημ}\theta_0\,\text{ημ}\varphi_0,\ a\,\text{συν}\varphi_0)$$

$$S:\ \vec{r}(\theta,\varphi)=(a\,\text{συν}\theta\,\text{ημ}\varphi,\ a\,\text{ημ}\theta\,\text{ημ}\varphi,\ a\,\text{συν}\varphi)\ ,\ (\theta,\varphi)\in[0,2\pi]\times[0,\pi]$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{r}_\theta(\theta_0,\varphi_0)&=(-a\,\text{ημ}\theta_0\,\text{ημ}\varphi_0,\ a\,\text{συν}\theta_0\,\text{ημ}\varphi_0,\ 0)\\ \vec{r}_\varphi(\theta_0,\varphi_0)&=(a\,\text{συν}\theta_0\,\text{συν}\varphi_0,\ a\,\text{ημ}\theta_0\,\text{συν}\varphi_0,\ -a\,\text{ημ}\varphi_0)\end{aligned}\right\}$$

$$\vec{N}=\vec{r}_\theta(\theta_0,\varphi_0)\times\vec{r}_\varphi(\theta_0,\varphi_0)=-a\,\text{ημ}\varphi_0\,\vec{r}(\theta_0,\varphi_0)$$

$(=c(x_0,y_0,z_0)\ ,\ c=\text{σταθερά})$

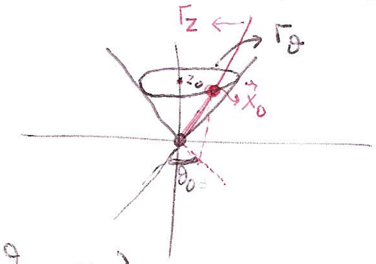
4) Να βρεθεί το κάθετο στην S: $z^2=x^2+y^2$, στο $(x_0,y_0,z_0)\in S$ με $z_0\neq 0$.

—

$\vec{r}(\theta,z)=(z\,\text{συν}\theta,\ z\,\text{ημ}\theta,\ z)$, $(x_0,y_0,z_0)=(z_0\,\text{συν}\theta_0,\ z_0\,\text{ημ}\theta_0,\ z_0)$

$\vec{r}_\theta(\theta_0,z_0)=(-z_0\,\text{ημ}\theta_0,\ z_0\,\text{συν}\theta_0,\ 0)$

$\vec{r}_z(\theta_0,z_0)=(\text{συν}\theta_0,\ \text{ημ}\theta_0,\ 1)$



$\vec{N}=\vec{r}_\theta(\theta_0,z_0)\times\vec{r}_z(\theta_0,z_0)=(z_0\,\text{συν}\theta_0,\ z_0\,\text{ημ}\theta_0,\ -z_0)$.

<u>Σημείωση</u> Στις 2), 3), 4) το εφαπτόμενο βρίσκεται ευκολότερα με τον α)

2) $\begin{cases} F(x,y,z)=x^2+y^2-\alpha^2, & \nabla F(x_0,y_0,z_0)=(2x_0,2y_0,0)\perp S \\ (x_0,y_0,z_0)\in S=\{(x,y,z): x^2+y^2-\alpha^2=0\} & \end{cases}$

$(\nabla F(\vec{x}_0)\neq\vec{0}$ διότι $\alpha>0)$

Άρα το <u>εφ. επίπεδο είναι</u> $2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+0(z-z_0)=0$

$$\underline{xx_0+yy_0=\alpha^2}$$

3) $\begin{cases} F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-\alpha^2, & \nabla F(x_0,y_0,z_0)=(2x_0,2y_0,2z_0)\perp S \\ (x_0,y_0,z_0)\in S=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2-\alpha^2=0\} & \end{cases}$

$(\nabla F(x_0,y_0,z_0)\neq(0,0,0)$ διότι $\alpha>0)$

Άρα το <u>εφ. επίπεδο</u> είναι $2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0$

$$xx_0+yy_0+zz_0=\alpha^2.$$

4) $\begin{cases} F(x,y,z)=x^2+y^2-z^2 \\ (x_0,y_0,z_0)\in S\{(x,y,z): x^2+y^2-z^2=0\} \end{cases}$ $\nabla F(x_0,y_0,z_0)=(2x_0,2y_0,-2z_0)\perp S$

(<u>Πρέπει</u> $z_0\neq 0$ για να έχουμε $\nabla F(\vec{x}_0)\neq\vec{0}$)

Άρα το <u>εφ. επίπεδο</u> είναι $2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-2z_0(z-z_0)=0$

$$xx_0+yy_0-zz_0=0$$

<u>ΣΗΜ</u> Προφανώς εάν $\vec{N}\perp S$ κάθε $\lambda\vec{N}$ με $\lambda\neq 0$ είναι κάθετο.
Τα $\frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$, $-\frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$ είναι τα μοναδικά <u>Μοναδιαία κάθετα</u>.