213

ΜΑΘΗΜΑ 27 (10/05 αντί για 18/05 : Φοιτ. εκλογές)

Επιφανειακά Ολοκληρώματα (συνέχεια)

Ορισμοί *

Έστω $S = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in D\}$, D u-απλό ή v-απλό $\subseteq \mathbb{R}^2$

$D = \{(u,v) : a \leq u \leq \beta,\ \phi(u) \leq v \leq y(u)\}$, $\phi, y : [a,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχείς

ή

$D = \{(u,v) : \gamma \leq v \leq \delta,\ h(v) \leq u \leq g(v)\}$, $h, g : [\gamma,\delta] \to \mathbb{R}$ συνεχείς

επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$.

i) Μια επιφάνεια S του $\mathbb{R}^3$ καλείται $C^1 \Leftrightarrow$ αν υπάρχει $\vec{r} : D \to \mathbb{R}^3$ παραμέτρηση του S, $\vec{r}$ είναι C^1 ($\exists\ \vec{r}' =$ συνεχής)

ii) Μια επιφάνεια S του $\mathbb{R}^3$ καλείται λεία (ή ομαλή) $\Leftrightarrow$ $\exists\ \vec{r} : D \to \mathbb{R}^3$ παραμέτρηση ώστε $(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)(u,v) \neq (0,0,0)$, $(u,v) \in D$

$$\left.\frac{d\vec{r}(u,v_0)}{du}\right|_{u=u_0} = \vec{r}_u(u_0,v_0), \quad \left.\frac{d\vec{r}(u_0,v)}{dv}\right|_{v=v_0} = \vec{r}_v(u_0,v_0)$$

iii) Μια επιφάνεια S του $\mathbb{R}^3$ καλείται απλή $\Leftrightarrow$ αν υπάρχει παραμέτρηση $\vec{r} : D \to \mathbb{R}^3$: ώστε η $\vec{r}$ να είναι 1-1.

iv) Μια επιφάνεια S του $\mathbb{R}^3$ καλείται κλειστή επιφάνεια $\Leftrightarrow$ αν η $S = \partial B$, $B =$ xy-απλό ή yx-απλό, … $B \subseteq \mathbb{R}^3$

v) Μια επιφάνεια απλή+λεία καλείται ΚΑΝΟΝΙΚΗ

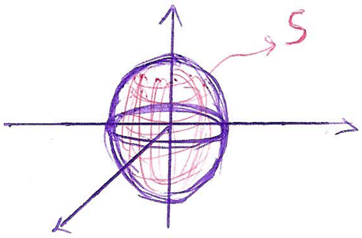
|| * Οι επιφάνειες που θα χρειαστούμε είναι αυτής της μορφής, C^1+λείες. → δηλ. Κανονικές ||

214

$\partial B = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 : \forall \varepsilon > 0 \ , \ S(\vec{x},\varepsilon) \cap B \neq \emptyset \ , \ S(\vec{x},\varepsilon) \cap B^c \neq \emptyset \} \ , \ B \subseteq \mathbb{R}^3$

Π.χ.

α) $B = \{ (x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq a^2 \}$

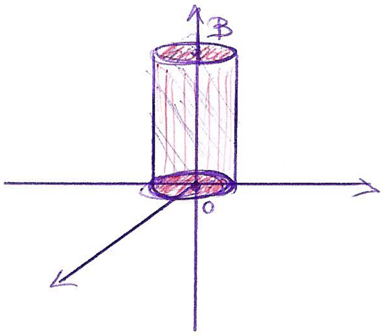


$(a>0)$

$S = \partial B = \{ (x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = a^2 \}$ επιφάνεια της σφαίρας B / S = κλειστή επιφάνεια

$S' = \{ (x,y,z) : x^2+y^2+z^2 = a^2 \ , \ z \geq 0 \}$ δεν είναι κλειστή επιφάνεια (επιφάνεια ημισφαιρίου)

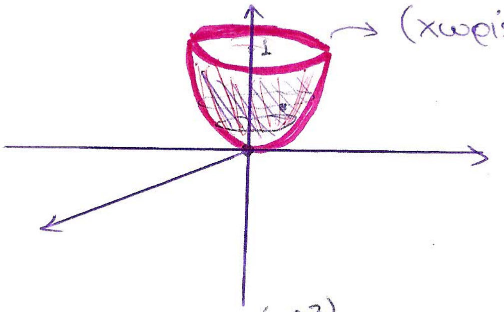
β)



$B = \{ (x,y,z) : x^2+y^2 \leq a^2, \ 0 \leq z \leq \beta \}$

$\partial B = \{ (x,y,z) : x^2+y^2 = a^2 \ , \ z \in [0,\beta] \} \cup \{ (x,y,0) : x^2+y^2 \leq a^2 \} \cup \{ (x,y,z) : x^2+y^2 \leq a, \ z = \beta \}$

$S = \partial B$ = κλειστή επιφάνεια.



(χωρίς καπάκι) : δεν είναι κλειστή επιφάνεια

$S = \{ (x,y,z) : z = x^2+y^2 \ , \ x^2+y^2 \leq 1 \}$

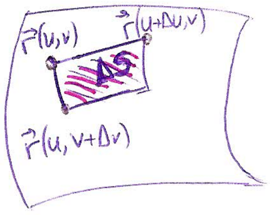
S δεν είναι κλειστή επιφάνεια

$S = \{ (x,y,z) : z = -1+(x^2+y^2) \ , \ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4 \}$
$\cup \{ (x,y,0) : x^2+y^2 \leq 1 \}$ (Μπωλ για φρούτα)

2/5

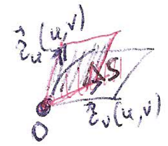
Εμβαδόν λείας C^1 επιφάνειας

$$S=\{\vec{r}(u,v) : (u,v)\in D\}$$



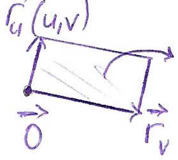
Γ_u : $\vec{r}(u,v_0)$ καμπύλη πάνω στην S

Γ_v : $\vec{r}(u_0,v)$ » S



$$\vec{r}(u+\Delta u,v)-\vec{r}(u,v)\cong \vec{r}_u(u,v)\,\Delta u \quad (*)$$

$$\vec{r}(u,\Delta v+v)-\vec{r}(u,v)\cong \vec{r}_v(u,v)\,\Delta v$$



Εμβαδόν $=\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|(u,v)$

$$\Delta S \overset{(*)}{\cong} \|\vec{r}_u\times\vec{r}_v(u,v)\|\,\Delta u\,\Delta v$$

Ορισμός

Εμβαδόν $\displaystyle A(S):=\iint_D \|\vec{r}_u(u,v)\times\vec{r}_v(u,v)\|\,du\,dv$, $dS=\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|\,du\,dv$

Ασκήσεις

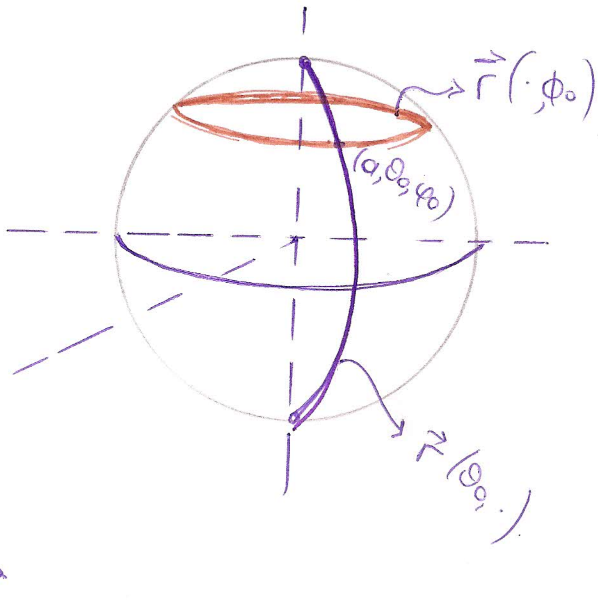
1) $A(S)$, $S=\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=a^2\}$ $(a>0)$

$$\vec{r}(\theta,\varphi)=(a\cdot\text{συν}\theta\,\text{ημ}\varphi,\ a\cdot\text{ημ}\theta\cdot\text{ημ}\varphi,\ a\cdot\text{συν}\varphi)$$

$$(\theta,\varphi)\in[0,2\pi]\times[0,\pi]=D$$

$\varphi_0=$ σταθερό , $\vec{r}(\cdot,\varphi_0)$

$\theta_0=$ σταθερό $\vec{r}(\theta_0,\cdot)$



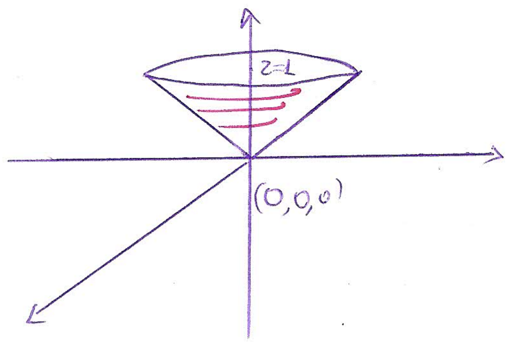
$$\vec{r}_\theta(\theta,\varphi) = (-a\cdot ημθ\cdot ημφ,\ a\cdot συνθ\,ημφ,\ 0)$$

$$\vec{r}_\phi(\theta,\phi) = (a\cdot συνθ\cdot συνφ,\ a\cdot ημθ\,συνφ,\ -a\,ημφ)$$

$$\|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi(\theta,\phi)\| = a^2 ημφ, \quad \phi\in[0,\pi]$$

$$A(S) = \int_0^\pi \left(\int_0^{2\pi} a^2\, ημφ\, d\theta\right) d\phi = 2\pi a^2\cdot 2 = 4\pi a^2$$

2) S, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $0\le z\le 1$



$$\vec{r}(\theta,z) = (z\cdot συνθ,\ z\,ημθ,\ z)$$

$$(\theta,z)\in[0,2\pi]\times[0,1]=D$$

$$\|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z(\theta,z)\| = \sqrt{2}\,z \quad (\text{Μάθημα } 26)$$

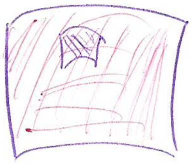
$$A(S) = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{2}\,z\,dz\right)d\theta = 2\pi\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2} = \pi\sqrt{2}.$$

Επιφανειακό ολοκλήρωμα αριθμητικού πεδίου

$f: S\to\mathbb{R}$ / 1ου είδους

$$\iint_S f\,dS = \iint_D f(\vec{r}(u,v))\,\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|\,du\,dv$$

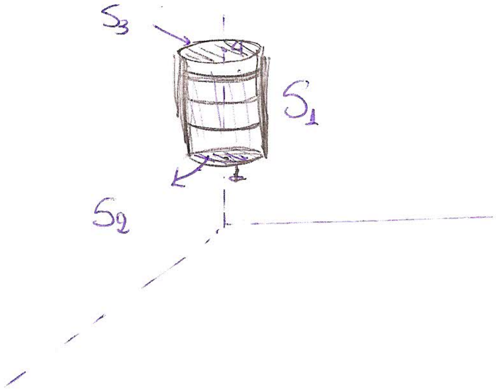
Τι μετράει; f = πυκνότητα,



M = μάζα της επιφάνειας S

Λύση:

$S: x^2+y^2=1$, με βάσεις στο $z=1$, $z=4$ με $\delta(x,y,z)=z(x^2+y^2)$



να υπολογιστεί $M=\iint_S \delta\, dS$

(M= μάζα του κλειστού ίσιου κουτιού)

$S_1 = \{\vec{r}(\theta,z) = (\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta, z) : 0\le\theta\le 2\pi,\ 1\le z\le 4\}$

$$\|\vec{r}_\theta \times \vec{r}_z\| = 1$$

$$\delta(\vec{r}(\theta,z)) = \delta((\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta, z)) = z$$

$$M(S_1) = \int_0^{2\pi}\int_1^4 z\,dz\,d\theta = 15\pi$$

S_2: $\delta(x,y,1) = x^2+y^2$

$$M(S_2) = \int_0^1\left(\int_0^{2\pi} r^2\cdot r\,d\theta\right)dr = \frac{2\pi}{4} = \pi/2$$

$S_2=\{(x,y,1): x^2+y^2\le 1\}$ ($x=r\sigma\upsilon\nu\theta$, $y=r\eta\mu\theta$, $\delta(x,y,1)=r^2$, r = ορίζουσα του πολ. μετασχ.)

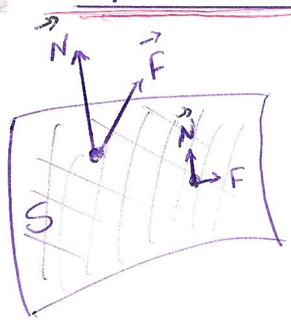
$S_3 : \delta(x,y,4) = 4(x^2+y^2)$

$$M(S_3) = \iint_{(x^2+y^2\le 1)} 4(x^2+y^2)\,dx\,dy = 4\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi$$

$$M(S) = 15\pi + \frac{\pi}{2} + 2\pi$$

Επιφανειακό Ολοκλήρωμα διανυσματικού πεδίου

$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(P, Q, R)$: S: επιφάνεια



(*) $$\iint_S \vec{F}\bullet d\vec{S} =: \iint_D \vec{F}(\vec{r}(u,v))\bullet(\vec{r}_u \times \vec{r}_v(u,v))\,du\,dv$$

$$d\vec{S} = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v(u,v))\,du\,dv$$

$$\vec{N}(u,v) = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}(u,v)$$

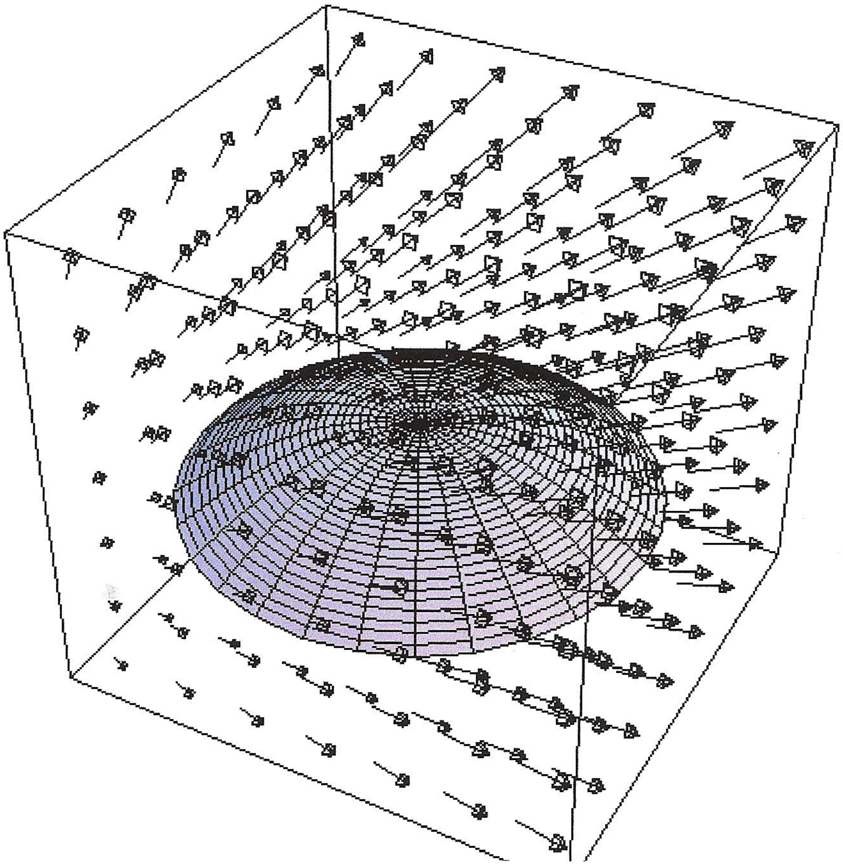
Σχέση επιφανειακών ολοκληρωμάτων

$$\iint_S \vec{F}\bullet d\vec{S} = \iint_S (\vec{F}\bullet\vec{N})\,dS$$

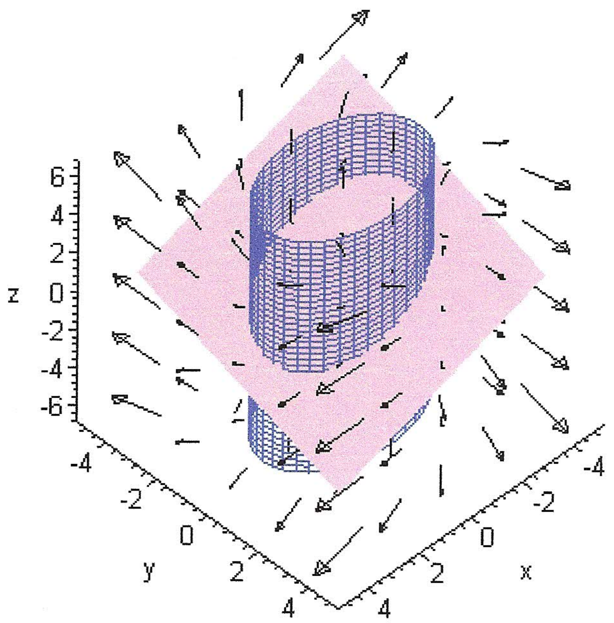
(*) Ροή του διανυσματικού πεδίου $\vec{F}$ διαμέσου της επιφ. S, στην κατεύθυνση του $\vec{N}$

Παρατηρούμε ότι η Ροή εξαρτάται από την κατεύθυνση του $\vec{N}$ δηλ. αν παίρναμε το κάθετο $\vec{r}_v \times \vec{r}_u$ τότε θα έχουμε αντίθετη τιμή της ροής.

218β



Επιφάνεια σε
διαν. πεδίο

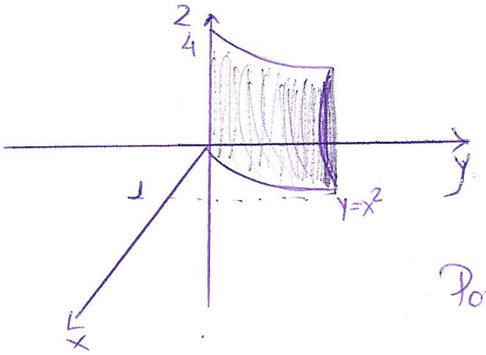


Επιφάνειες σε
διαν. πεδίο.

Λύσεις

1) Ροή; $\vec{F}(x,y,z) = (yz, x, -z^2)$

S:

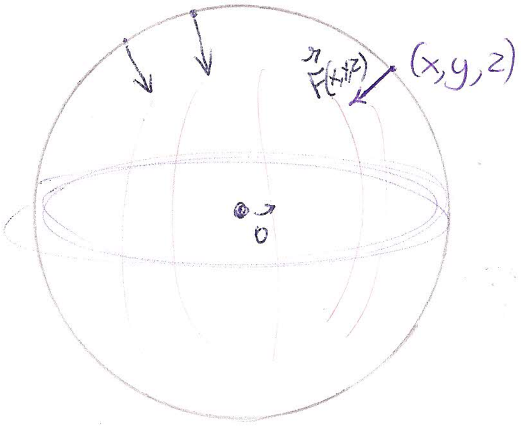


$S=\{(x,y,z) : y=x^2,\ 0\le x\le 1,\ 0\le z\le 4\}$

$=\{\vec{r}(x,z)=(x,x^2,z),\ (x,z)\in[0,1]\times[0,4]\}$

Ροή = 2.

2) $\vec{F}(x,y,z)=(-x,-y,-z)$, $S=\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2=a^2\}$ $\alpha>0$, Ροή;;



$S : \vec{r}(\theta,\phi) = (a\,\sigma\upsilon\nu\theta\,\eta\mu\phi,\ a\,\eta\mu\theta\,\eta\mu\phi,\ a\,\sigma\upsilon\nu\phi)$

$\vec{r}_\theta \times \vec{r}_\phi(\theta,\phi) = -a\,\eta\mu\phi\,\vec{r}(\theta,\phi)$

$$\text{Ροή} = \iint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{(-a\,\sigma\upsilon\nu\theta\,\eta\mu\phi, -a\,\eta\mu\theta\,\eta\mu\phi, -a\,\sigma\upsilon\nu\phi)}_{-\vec{r}(\theta,\phi)}\cdot\underbrace{(-a\,\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\eta\mu\phi, -a\,\eta\mu\theta\,\eta\mu\phi, -a\,\sigma\upsilon\nu\phi)}_{-\vec{r}(\theta,\phi)}(a\cdot\eta\mu\phi)\,d\phi\,d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \|\vec{r}(\theta,\phi)\|^2 a\cdot\eta\mu\phi = a^3 4\pi = 3\,V(B)$$

$$= \iiint_B 3\,dx\,dy\,dz$$

όπου $B=\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2\le \alpha^2\}$

Σχετίζεται η Ροή δια μέσου κλειστής επιφάνειας με τρόπο ολοκλήρωσης;; Ποιας συνάρτησης;;;

Η απάντηση είναι στο Θ. Gauss!!