Οι τελεστές της Διανυσματικής Ανάλυσης και οι ιδιότητες τους

1 Εσωτερικό, Εξωτερικό, Μεικτό Γινόμενο διανυσματικών πεδίων

Έστω $\overrightarrow{F}$, $\overrightarrow{G}$, $\overrightarrow{H}: U(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ διάνυσματικά πεδία. Ορίζονται (ανάλογα με τα γινόμενα στον $\mathbb{R}^3$) για $\overrightarrow{F} = (P_1, Q_1, R_1)$, $\overrightarrow{G} = (P_2, Q_2, R_2)$, $\overrightarrow{H} = (P_3, Q_3, R_3)$

i $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{G} = P_1P_2 + Q_1Q_2 + R_1R_2$ με π.ο. το $\mathbb{R}^3$ και π.τ. το $\mathbb{R}$, **το εσωτερικό γινόμενο** των δ.π. $\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}$ ($\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{G}$ α.π.)

ii $\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ P_1 & Q_1 & R_1 \\ P_2 & Q_2 & R_2 \end{vmatrix} =$

$= (Q_1R_2 - R_1Q_2)\overrightarrow{i} - (P_1R_2 - R_1P_2)\overrightarrow{j} + (P_1Q_2 - Q_1P_2)\overrightarrow{k}$ με π.ο. το $\mathbb{R}^3$ και π.τ. το $\mathbb{R}^3$, το **εξωτερικό γινόμενο** των δ.π. $\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}$ ($\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G}$ δ.π.)

iii $(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{H}) = \overrightarrow{F} \cdot (\overrightarrow{G} \times \overrightarrow{H}) = \begin{vmatrix} P_1 & Q_1 & R_1 \\ P_2 & Q_2 & R_2 \\ P_3 & Q_3 & R_3 \end{vmatrix}$ με π.ο. το $\mathbb{R}^3$ και π.τ. το $\mathbb{R}$, το **μεικτό γινόμενο** των δ.π. $\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{H}$ ($(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{H})$ α.π.)

Χρήσιμες ιδιότητες

1. $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{G} = \overrightarrow{G} \cdot \overrightarrow{F}$
2. $\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G} = -\overrightarrow{G} \times \overrightarrow{F}$
3. $(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{H}) = (\overrightarrow{G}, \overrightarrow{H}, \overrightarrow{F}) = (\overrightarrow{H}, \overrightarrow{F}, \overrightarrow{G}) = -(\overrightarrow{F}, \overrightarrow{H}, \overrightarrow{G}) = -(\overrightarrow{H}, \overrightarrow{G}, \overrightarrow{F}) = -(\overrightarrow{G}, \overrightarrow{F}, \overrightarrow{H})$
4. $\overrightarrow{F} \times (\overrightarrow{G} \times \overrightarrow{H}) = (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{H})\overrightarrow{G} - (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{G})\overrightarrow{H}$
   $(\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{D}) \times (\overrightarrow{G} \times \overrightarrow{H}) = (\overrightarrow{F}, \overrightarrow{D}, \overrightarrow{H})\overrightarrow{G} - (\overrightarrow{F}, \overrightarrow{D}, \overrightarrow{G})\overrightarrow{H}$
5. $\overrightarrow{F} \cdot (\overrightarrow{G} \times (\overrightarrow{H} \times \overrightarrow{D}) = (\overrightarrow{G} \cdot \overrightarrow{D})(\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{H}) - (\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{D})(\overrightarrow{G} \cdot \overrightarrow{H})$
6. $(\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G}) \cdot (\overrightarrow{H} \times \overrightarrow{D}) = \overrightarrow{F} \cdot (\overrightarrow{G} \times (\overrightarrow{H} \times \overrightarrow{D}))$

Υπόδειξη: 1,2) εύκολα, 3) απο ιδιότητες ορίζουσας, 4,6) γράφουμε αναλυτικά τα δύο μέλη, 5) Απο την 4).

2 Τελεστές: Κλίσης (grad), Απόκλισης (div), Στροβιλισμού (rot)

Ο τελεστής $\boldsymbol{\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})}$ καλείται **ανάδελτα** (ανάποδο ελληνικό Δ) ή **nabla** (αρχαίο Ασσυριακό μουσικό όργανο, άρπα, με την μορφή ∇).

Ο ∇ ορίστηκε απο τον Hamilton (1837) για να δώσει κομψή και ευανάγνωστη γραφή στις εξισώσεις του. Ο Maxwell υιοθέτησε το σύμβολο για να γράψει με σύντομο τρόπο τις εξισώσεις του.

Ο τελεστής έχει δράση σε συναρτήσεις $f : U(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμο (π.χ. C^1) α.π. και $\overrightarrow{F} : U(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ διαφορίσιμο (π.χ. C^1) δ.π. Η δράση του ορίζεται ως εξής:

i $\boldsymbol{\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})}$, με π.ο. στο $\mathbb{R}^3$ και π.τ. στο $\mathbb{R}^3$, την **κλίση** ή **βαθμίδα** της f (∇f δ.π.)

Σύμβ.: $\mathbf{grad}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{\nabla f}$ (gradient).

ii $\boldsymbol{\nabla \cdot \overrightarrow{F} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \cdot (P, Q, R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}}$ με π.ο. στο $\mathbb{R}^3$ και π.τ. στο $\mathbb{R}$, την **απόκλιση** της $\overrightarrow{F}$ ($\nabla \cdot \overrightarrow{F}$ α.π.)

Σύμβ.: $\mathbf{div}\boldsymbol{\overrightarrow{F}} = \boldsymbol{\nabla \cdot \overrightarrow{F}}$ (divergence).

iii $\boldsymbol{\nabla \times \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\overrightarrow{i} + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\overrightarrow{j} + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\overrightarrow{k}}$ με π.ο. και π.τ. στο $\mathbb{R}^3$ τον **στροβιλισμό** της $\overrightarrow{F}$ ($\nabla \times \overrightarrow{F}$ δ.π.)

Σύμβ.: $\mathbf{curl}\boldsymbol{\overrightarrow{F}} = \mathbf{rot}\boldsymbol{\overrightarrow{F}} = \boldsymbol{\nabla \times \overrightarrow{F}}$ (curl, rotation).

Χρήσιμες ιδιότητες I

1. $\mathrm{grad}(f+g) = \mathrm{grad}(f) + \mathrm{grad}(g)$, $\mathrm{grad}(\lambda f) = \lambda \mathrm{grad}(f)$,
   $\mathrm{grad}(fh) = h\mathrm{grad}(f) + f\mathrm{grad}(h)$
2. $\mathrm{div}(f\overrightarrow{F}) = f\mathrm{div}(\overrightarrow{F}) + \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{grad} f$, $\mathrm{rot}(\phi\overrightarrow{F}) = \phi\mathrm{rot}(\overrightarrow{F}) + \mathrm{grad}\phi \times \overrightarrow{F}$ ή
   $\nabla \cdot (f\overrightarrow{F}) = f(\nabla \cdot \overrightarrow{F}) + \overrightarrow{F} \cdot \nabla(f)$, $\nabla \times (\phi\overrightarrow{F}) = \phi(\nabla \times \overrightarrow{F}) + \nabla\phi \times \overrightarrow{F}$
3. $\mathrm{div}(\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G}) = \overrightarrow{G} \times \mathrm{rot}(\overrightarrow{F}) - \overrightarrow{F} \times \mathrm{rot}(\overrightarrow{G})$ ή
   $\nabla \cdot (\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G}) = \overrightarrow{G} \cdot (\nabla \times \overrightarrow{F}) - \overrightarrow{F} \cdot (\nabla \times \overrightarrow{G})$
4. $\mathrm{rot}(\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G}) = \overrightarrow{F}\mathrm{div}(\overrightarrow{G}) - \overrightarrow{G}\mathrm{div}(\overrightarrow{F}) + (\overrightarrow{G} \cdot \mathrm{grad})(\overrightarrow{F}) - (\overrightarrow{F} \cdot \mathrm{grad})(\overrightarrow{G})$ ή
   $\nabla \times (\overrightarrow{F} \times \overrightarrow{G}) = \overrightarrow{F}(\nabla \cdot \overrightarrow{G}) - \overrightarrow{G}(\nabla \cdot \overrightarrow{F}) + (\overrightarrow{G} \cdot \nabla)(\overrightarrow{F}) - (\overrightarrow{F} \cdot \nabla)(\overrightarrow{G})$
5. $\mathrm{grad}(\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{G}) = \overrightarrow{G} \times \mathrm{rot}(\overrightarrow{F}) + \overrightarrow{F} \times \mathrm{rot}(\overrightarrow{G}) + (\overrightarrow{G} \cdot \mathrm{grad})(\overrightarrow{F}) + (\overrightarrow{F} \cdot \mathrm{grad})(\overrightarrow{G})$ ή
   $\nabla(\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{G}) = \overrightarrow{G} \times (\nabla \times \overrightarrow{F}) + \overrightarrow{F} \times (\nabla \times \overrightarrow{G}) + (\overrightarrow{G} \cdot \nabla)(\overrightarrow{F}) + (\overrightarrow{F} \cdot \nabla)(\overrightarrow{G})$

Υπόδειξη: Απο ιδιότητες του τελεστη παραγώγισης $\frac{d}{dt}$

Χρήσιμες ιδιότητες II

Έστω $f : U(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$, $\overrightarrow{F} : U(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ είναι C^2 συναρτήσεις. Ισχύουν

1. $\mathrm{rot}(\mathrm{grad} f) = \overrightarrow{0}$ ή $\bigtriangledown \times (\bigtriangledown f) = \overrightarrow{0}$
2. $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\overrightarrow{F}) = 0$ ή $\bigtriangledown \cdot (\bigtriangledown \times \overrightarrow{F}) = 0$
3. $\mathrm{div}(\mathrm{grad}(f) \times \mathrm{grad}(h)) = 0$ ή $\bigtriangledown \cdot (\bigtriangledown f \times \bigtriangledown h) = 0$

Υπόδειξη 1,2) από το θεώρημα για τις 2ης τάξης μερικές παραγώγους, 3) από την 3) στις ιδιότητες I και την 1) απο τις ιδιότητες II)

Τελεστης Laplace

Έστω $f : U(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}$, $\overrightarrow{F} : U(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ C^2 συναρτήσεις. Έστω ο τελεστής $\boldsymbol{\bigtriangledown^2 = \bigtriangledown \cdot \bigtriangledown = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \cdot \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}}$. Ορίζουμε

- i $\boldsymbol{\bigtriangledown^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$ με πο στο $\mathbb{R}^3$ και πτ στο $\mathbb{R}$ **το α.π. Laplace** της f.
- ii $\boldsymbol{\bigtriangledown^2 \overrightarrow{F} = (\bigtriangledown^2 P, \bigtriangledown^2 Q, \bigtriangledown^2 R)}$ με π.ο. και π.τ. στο $\mathbb{R}^3$, **το δ.π. Laplace** της $\overrightarrow{F}$

Χρήσιμες ιδιότητες $\Delta \equiv \bigtriangledown^2$

1. $\Delta \overrightarrow{F} = \mathrm{grad}(\mathrm{div}(\overrightarrow{F})) - \mathrm{rot}(\mathrm{rot}(\overrightarrow{F}))$ ή
   $\bigtriangledown^2 \overrightarrow{F} = \bigtriangledown(\bigtriangledown \cdot \overrightarrow{F}) - \bigtriangledown \times (\bigtriangledown \times \overrightarrow{F})$
2. $\mathrm{div}(f\mathrm{grad}(h) - h\mathrm{grad}(f)) = f\Delta g - g\Delta f$ ή
   $\bigtriangledown \cdot (f \bigtriangledown g - g \bigtriangledown f) = f \bigtriangledown^2 g - g \bigtriangledown^2 f$
3. $\Delta(fh) = h\Delta f + f\Delta h + 2(\mathrm{grad}(f) \cdot \mathrm{grad}(h))$ ή
   $\bigtriangledown^2(fh) = h \bigtriangledown^2 f + f \bigtriangledown^2 h + 2(\bigtriangledown f \cdot \bigtriangledown h)$

3 Πεδία ειδικής μορφής

- i Εαν $\boldsymbol{\overrightarrow{F} = \bigtriangledown f}$, το δ.π. $\overrightarrow{F}$ καλείται **συντηρητικό πεδίο**.
- ii Εαν $\boldsymbol{\bigtriangledown \times \overrightarrow{F} = 0}$ το δ.π. $\overrightarrow{F}$ καλείται **αστρόβιλο δ.π.** ή **δ.π. μηδενικού στροβιλισμού**.
- iii Εαν $\boldsymbol{\bigtriangledown \cdot \overrightarrow{F} = 0}$ το δ.π. $\overrightarrow{F}$ καλείται **ασυμπίεστο δ.π.**
- iv Εαν $\boldsymbol{\bigtriangledown^2 f = 0}$ το α.π. f καλείται **αρμονικό α.π.**

Σημειώσεις

α΄Εάν $\overrightarrow{F} = (P, Q, R)$ τότε $\overrightarrow{F} \cdot \bigtriangledown = (P, Q, R) \cdot (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) = P\frac{\partial}{\partial x} + Q\frac{\partial}{\partial y}, R\frac{\partial}{\partial z})$

β΄ Πολλές φορές (στην Φυσική) ο τελεστής $\bigtriangledown$ συμβολίζεται $\overrightarrow{\bigtriangledown}$

Συντομεύσεις

π.ο.= πεδίο ορισμού, π.τ.=πεδίο τιμών, δ.π.=διανυσματικό πεδίο, α.π.=αριθμητικό πεδίο.

ΑνάλυσηII(2010-2011)

Τμήμα Πληροφορικής και Τηλεπικοινωνιών Ε.Κ.Π.Α