32 ~25

Μάθημα [redacted] (23/5/11)

Το Θεώρημα Stokes.

Προαπαιτούμενα:

(A) Στροβιλισμός διαν. πεδίου του $\mathbb{R}^3$.

(B) Προσανατολισμός συνόρου κανονικής επιφάνειας.

(i) Η περίπτωση του $\mathbb{R}^2$

(ii) Γενίκευση στον $\mathbb{R}^3$.

(A) Στροβιλισμός Διαν. Πεδίου

Ορισμός

Έστω $\vec{F}=(P,Q,R)$ ένα C^1 διαν. πεδίο του $\mathbb{R}^3$ (δηλαδή οι συναρτήσεις $P,Q,R:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ έχουν συνεχείς παραγώγους). Ο στροβιλισμός του $\vec{F}$ είναι το διανυσματικό πεδίο

$$\mathrm{rot}\vec{F}=\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

Ειδικά εάν $\vec{F}=(P,Q,0)$ είναι

$$\mathrm{rot}\vec{F}=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

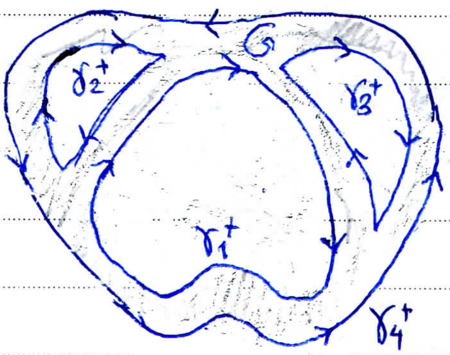
(B) Προσανατολισμός (γεωμετρικού) συνόρου κανονικής επιφάνειας.

(i) Η περίπτωση του $\mathbb{R}^2$

Ορισμός. Έστω γ απλή, κλειστή, ομαλή C^1 καμπύλη του επιπέδου. Η θετική φορά διαγραφής της γ, ορίζεται να είναι η φορά διαγραφής αντίθετα των δεικτών του ρολογιού. Συμβολίζουμε γ^+ τη γ με τη θετική φορά διαγραφής.

Παρατήρηση. Έστω $G \subseteq \mathbb{R}^2$ τέτοιο ώστε η καμπύλη $\gamma = \partial G$ να είναι απλή, κλειστή, ομαλή και C^1. Η θετική φορά διαγραφής επί της γ, είναι εκείνη κατά την οποία, το G παραμένει στο αριστερό μας χέρι καθώς διατρέχουμε την γ.

Παράδειγμα. Ένα επίπεδο ψωμάκι Pretzel.



$$\partial G^+ = \gamma_1^+ \cup \gamma_2^+ \cup \gamma_3^+ \cup \gamma_4^+$$

Εδώ το ∂G αποτελείται από τέσσερις καμπύλες

Σχόλιο. Έστω γ καμπύλη του επιπέδου όπ

προηγουμένως. Το ότι η γ περικλείει ένα αν
σύνολο G είναι εποπτικά προφανές. Μια απ
δειξη αυτού του γεγονότος αποτελεί ένα
περιβόητα δύσκολο εγχείρημα (Θεώρημα Jorda

(ii) Επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$

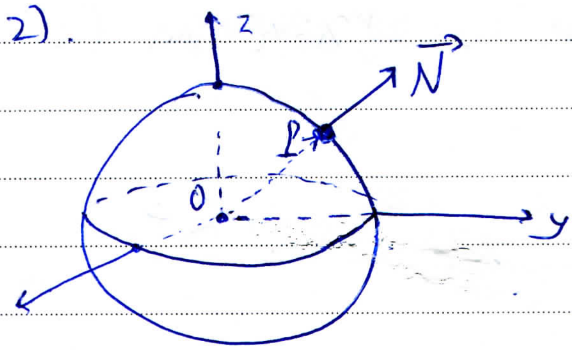
Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^3$ κανονική επιφάνεια. Σε κάθε
σημείο της S, ορίζεται μοναδιαίο κάθετο
(εάν $S = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in D\}$ τότε $\vec{N} = \frac{1}{|\vec{r_u} \times \vec{r_v}|}\vec{r_u} \times \vec{r}$

Έστω $\gamma = \partial S$ η κανονική καμπύλη που απ
τελεί το σύνορο της S (Προσοχή: είναι σύνορο επιφάνειας

Ορισμός. Η θετική φορά διαγραφής στ
της γ, είναι η φορά διαγραφής κατά τη
οποία, ως προς το κάθετο διανυσματικό
πεδίο $\vec{N}$, διατρέχουμε την γ αντίθετα των
δεικτών του ρολογιού. Συμβολίζουμε με γ^+
την γ εφοδιασμένη με τη θετική φορά
διαγραφής.

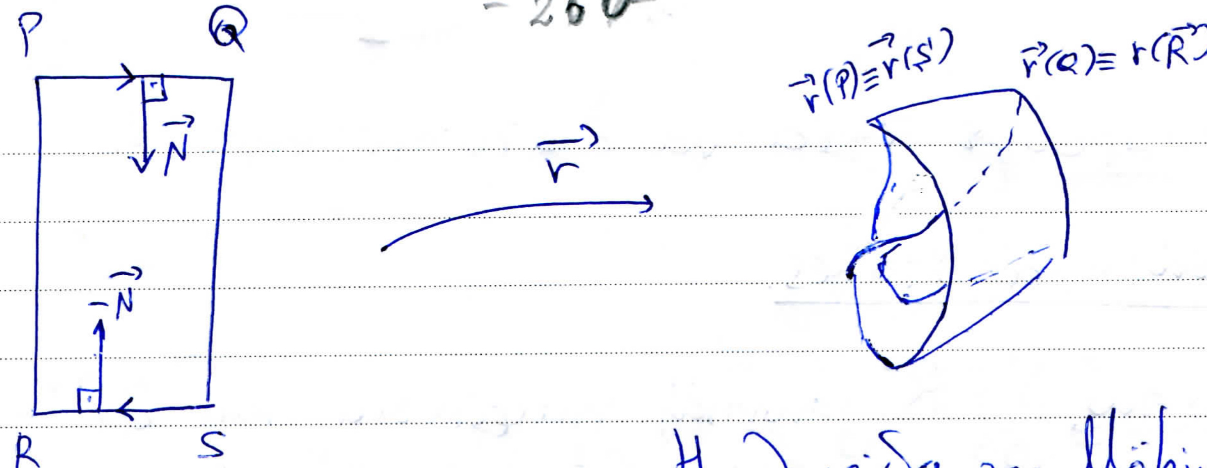
Σχόλιο 1. Η ύπαρξη σαφώς ορισμένου
κάθετου διανυσματικού πεδίου $\vec{N}$ για την S

έπεται από την υπόθεσή μας ότι η S είναι κλειστή, και επομένως το $\vec{N}$ θα έχει φορά "εκτός" της S. Για παράδειγμα, η σφαίρα $S=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2=1\}$ έχει μοναδιαίο κάθετο στο σημείο της $P(x,y,z)$ το διάνυσμα $\vec{N}=(x,y,z)$.



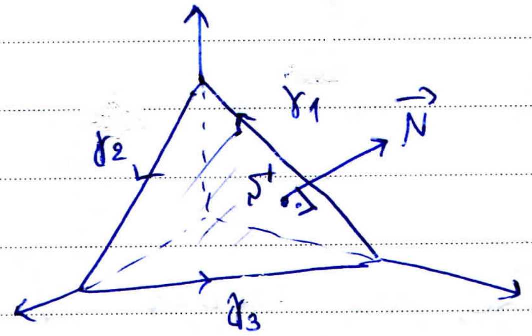
Οι επιφάνειες για τις οποίες υπάρχει σαφώς ορισμένο κάθετο διανυσμ. πεδίο, καλούνται προσανατολίσιμες. (Το Θεώρημα Stokes ισχύει και για προσανατολίσιμες επιφάνειες.)

Σχόλιο 2. Υπάρχουν επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$ που δεν είναι προσανατολίσιμες. Η πλέον διάσημη είναι η διαβόητη "λωρίδα του Möbius": Θεωρούμε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο υφασμα PQRS και το διπλώνουμε ώστε το τμήμα PQ να συμπέσει με το τμήμα SR. Η επιφάνεια που προκύπτει δεν είναι προσανατολίσιμη, καθ' επιλέγοντας κάθετο $\vec{N}$ επί του PQ και μεταφέροντάς το προς το SR, το $\vec{N}$ θα αποκτήσει την αντίθετη φορά.



Η λωρίδα του Möbius.

Παράδειγμα. Έστω $S' = \{ (x,y,z) : x+y+z=1,$
$0 \le x,y \le 1 \}$. Επιφάνεια επιπέδου.



$$\partial S^+ = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \quad \text{όπου}$$

$\gamma_1: \ \vec{r_1}(t) = (0, -t, 1+t), \ -1 \le t \le 0$

$\gamma_2: \ \vec{r_2}(t) = (t, 0, 1-t), \ 0 \le t \le 1$

$\gamma_3: \ \vec{r_3}(t) = (2-t, t-1, 0), \ 1 \le t \le 2$

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το

Θεώρημα Stokes.

Έστω $S \subseteq \mathbb{R}^3$ κανονική επιφάνεια και $\partial S = \gamma$.
Εάν $\vec{F}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ είναι C^1 διαν. πεδίο, τότε

$$\iint_S \mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = \oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

όπου $\vec{N}$ το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην S.

Παρατηρήσεις.

(1) Εάν $S \subseteq \mathbb{R}^2$, $\vec{F}=(P,Q,0)$ τότε $\vec{N}=\vec{k}=(0,0,1)$ και ανακτούμε το Θεώρημα Green (εφ. μορφή)

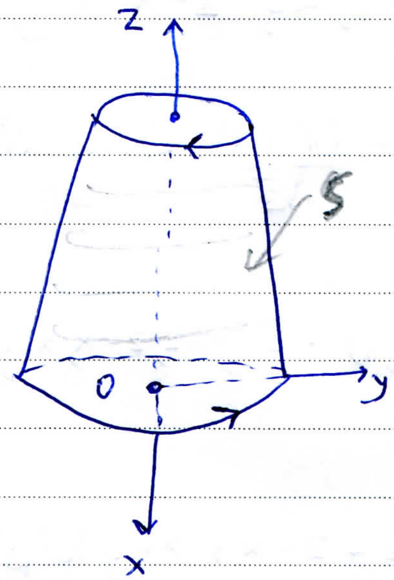
$$\iint_S \mathrm{rot}\vec{F}\cdot\vec{k} = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_\gamma P\,dx+Q\,dy$$

(2) Το Θεώρημα μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τη ροή του διαν. πεδίου $\mathrm{rot}\vec{F}$ μέσω της S γνωρίζοντας τις τιμές του $\vec{F}$ μόνο στο ∂S.

(3) Εάν οι επιφάνειες S_1 και S_2 έχουν κοινό σύνορο γ, τότε η ροή του διαν. πεδίου rot

μέσω της S_1 ισούται με την ροή του διαν. πεδίου μέσω της S_2.

<u>Σχόλιο.</u> Το θεώρημα εξακολουθεί να ισχύει εάν το σύνορο της S' αποτελείται από περισσότερες από μία κλειστές καμπύλες. Ο προσανατολισμός αυτών των καμπυλών ακολουθεί τον κανόνα του "αριστερού χεριού" που γνωρίζουμε από την περίπτωση του $\mathbb{R}^2$.



S': Κόλουρος κώνος

S': Προσωπείο της Comedia Nova (~100 π.Χ)

Εάν ωστόσο το σύνορο της S αποτελείται από τις κλειστές καμπύλες $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, $k \in \mathbb{N}$ τότε για το C^1 διαν. πεδίο $\vec{F}$ θα έχουμε

$$\iint_{S'} \operatorname{rot}\vec{F} \cdot \vec{N}\, dS' = \oint_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_{\gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \ldots + \oint_{\gamma_k} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

<u>Άσκηση.</u> Δίνεται το διαν. πεδίο
$$\vec{F} = (y^2+z^2)\vec{i} + (x^2+z^2)\vec{j} + (x^2+y^2)\vec{k}$$
και η επιφάνεια S' που αποκόπτει το πρώτο οκταημόριο από το επίπεδο $x+y+z=1$.
(1) Να βρεθεί η ροή του $rot\vec{F}$ διαμέσου της S'.
(2) Να επαληθευτεί η ισχύς του Θεωρήματος Stokes

<u>Απαντ.</u> (1) Έχουμε
$$rot\vec{F} = \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2+z^2 & x^2+z^2 & x^2+y^2 \end{pmatrix} = 2(y-z, z-x, x-y)$$
οπότε, εφ' όσον το διάνυσμα $\vec{N} = \frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}$ είναι κάθετο στην S' παντού,
$$\iint_{S'} rot\vec{F}\cdot\vec{N}\, dS' = \iint_{S'} \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\cdot 2(y-z, z-x, x-y)\,dS'$$
$$= \iint_{S'} \frac{2}{\sqrt{3}}(y-z+z-x+x-y)\,dS'$$
$$= \iint_{S'} 0\, dS' = 0.$$
(2) Το Θεώρημα Stokes μας εγγυάται πως
$$\iint_{S'} rot\vec{F}\cdot\vec{N}\, dS' = \oint_{\gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

όπου γ είναι το θετικά προσανατολισμένο σύνορο της S'. Από το παράδειγμα της σελίδας (259) θα είναι

$$\partial S'^{+} = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$$

και άρα

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_3} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= I_1 + I_2 + I_3.$$

Υπολογίζουμε

$$I_1 = \int_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{-1}^{0} (1+t)^2(-1) + t^2 \, dt = 0$$

$$I_2 = \int_{\gamma_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{0}^{1} (1-t)^2\cdot 1 + t^2(-1) \, dt = 0$$

$$I_3 = \int_{\gamma_3} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{1}^{2} (t-1)^2\cdot(-1) + (2-t)^2\cdot 1 \, dt = 0$$

Οπότε

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

και το θεώρημα Stokes επαληθεύεται.

Άσκηση. Δίνεται το διαν. πεδίο

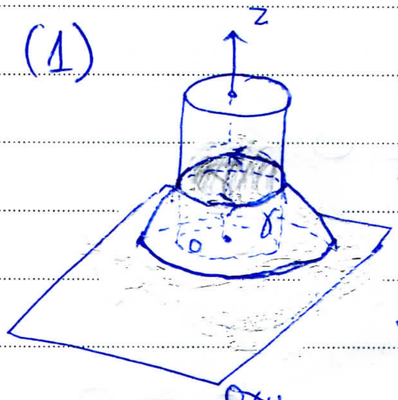
$$\vec{F} = x^2y^3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

(1) Να βρεθεί η ροή του $rot\vec{F}$ διαμέσου της επιφάνειας S' που αποκόπτει ο κύλινδρος $x^2+y^2=4$ από το ημισφαίριο $x^2+y^2+z^2=16, z\geq 0$.

(2) Εαν c είναι η καμπύλη που αποτελεί το σύνορο της S' με την αρνητική φορά, να βρεθεί η ροή του $\vec{F}$ διαμέσου της c.

Απάντηση.

(1)



Η τομή του κυλίνδρου και του ημισφαιρίου είναι η καμπύλη

$$\gamma: \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x^2+y^2+z^2=16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=\sqrt{12} \end{cases}$$

Έστω ότι η γ είναι προσανατολισμένη με τη θετική φορά. Από το θεώρημα Stokes

$$\iint_{S'} rot\vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

οπότε αρκεί να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\vec{F}$ επί της γ.

Μια παραμετρική παράσταση της γ είναι

$$\gamma: \quad \vec{r}(t) = (2\cos t, 2\sin t, \sqrt{12}), \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Συνεπώς

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot \vec{r}\,'(t)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(4\cos^2 t\, 8\sin^3 t\,(-2\sin t) + 2\cos t\right)dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-64\cos^2 t\sin^4 t + 2\cos t\right)dt$$

$$= -64\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2}\cdot\frac{(1-\cos(2t))^2}{4}$$

$$= -8\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sin^2(2t)}{8} - \frac{\sin^2(2t)\cos(2t)}{8}\right)dt$$

$$= -8\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos(4t)}{16} - \frac{(\sin^3(2t))'}{16\cdot 3}\right)dt$$

$$= -8\,\frac{\pi}{8} = -\pi.$$

(2) $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \pi.$