ΘΕΩΡΗΜΑ του Stokes

Το θ. Stokes αναφέρεται σε δ.π $\vec{F}: A(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$, $\vec{F} = (P, Q, R)$ $\underline{C^1}$

και σε επιφάνειες παραμετριμένες $\underline{S \subseteq A}$

$$\begin{cases} S = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in D\} \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ όπου} \\ \vec{r} : D(\subseteq \mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}^3,\ 1\text{-}1,\ (\kappa\tau)\ C^2,\ (\kappa\tau) \text{ λεία} \\ \text{με } D \text{ } u\text{-απλό ή } v\text{-απλό υποσύνολο του } \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

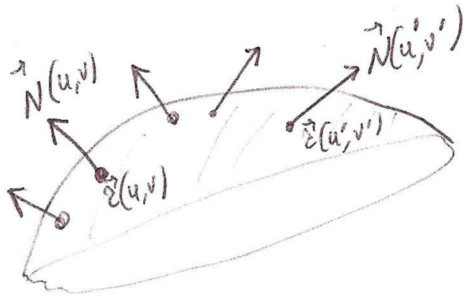
Αναλυτικά: $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ $\quad (u,v) \in D$

$$\vec{r}_u(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)_{(u,v)}$$

$$\vec{r}_v(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)_{(u,v)}$$

με $\vec{N}(u,v) = \dfrac{\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)}{\|\vec{r}_u(u,v) \times \vec{r}_v(u,v)\|} \neq (0,0,0)$

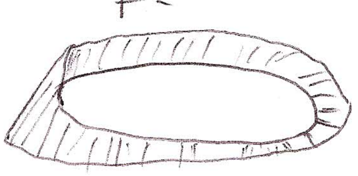
Υπενθυμίζουμε, ότι το $\vec{N}(u,v)$ είναι το μοναδιαίο κάθετο στην S στο σημείο $\vec{r}(u,v) \in S$



Το $\vec{N} : S(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ δείχνει την θετική πλευρά της S και λέμε ότι η S είναι προσανατολισμένη ως προς το $\vec{N}(u,v)$.

(ο προσανατολισμός εξαρτάται από την παραμέτρηση $\vec{r}(u,v)$).

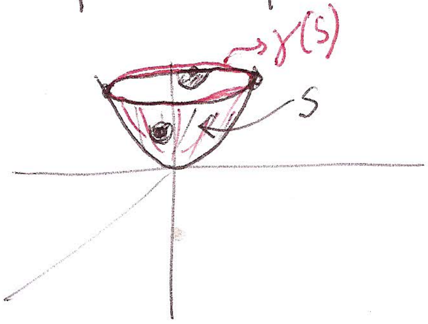
Μια επιφάνεια μπορεί να μην δέχεται προσανατολισμό!

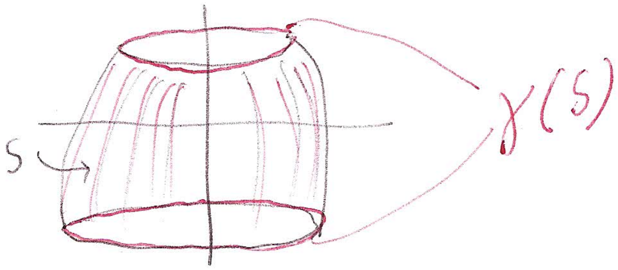


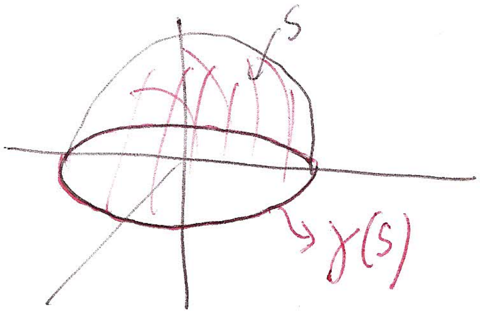
Ταινία Möbius

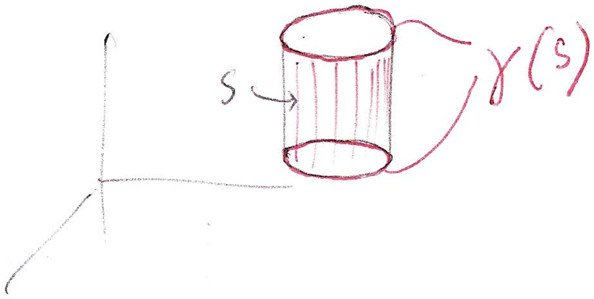
"Σύνορο" επιφάνειας $\gamma(S)$ (ή $\partial(S)$) (S λεία)

Έστω σημείο $\vec{\alpha}=\vec{r}(u,v)\in S$ και $S\cap \hat{S}(\vec{\alpha},\varepsilon)=B(\vec{\alpha},\varepsilon)$.
Εάν το $\vec{\alpha}$ δεν ανήκει στο "εσωτερικό" του $B(\vec{\alpha},\varepsilon)$ τότε το $\vec{\alpha}$ καλείται συνοριακό σημείο της επιφάνειας S.



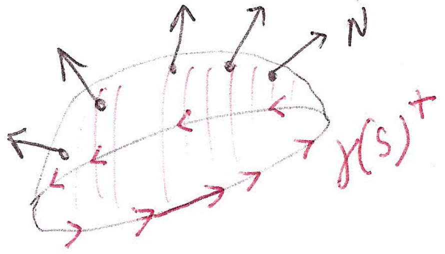


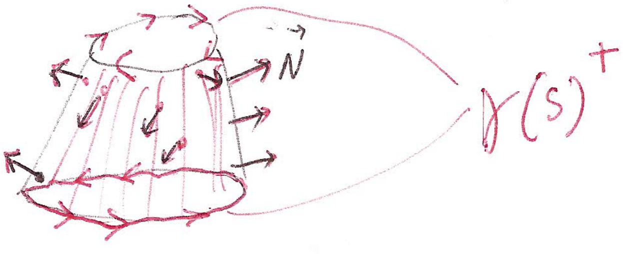




Το σύνολο των συνοριακών σημείων της S συμβολίζεται με $\gamma(S)$ (ή ∂S)
και είναι απλή+κλειστή καμπύλη/καμπύλες

Προσανατολίζουμε την $\gamma(S)$ ως προς το $\vec{N}(u,v)$ ($(u,v)\in D$) κατά την θετική φορά, αν περπατώντας κατά μήκος της καμπύλης $\gamma(S)$, το κεφάλι μας δείχνει την κατεύθυνση του $\vec{N}$, η S να είναι στα αριστερά μας.





Ο προσανατολισμός της $\gamma(S)$ εξαρτάται από τον προσανατολισμό της S.

Τύπος του Stokes (~1850)

Έστω $S=\{\vec{r}(u,v):(u,v)\in D\}$ απλή, λεία, C^2 επιφάνεια του $\mathbb{R}^3$ με $\vec{N}(u,v)$ το δ.π. των μοναδιαίων καθέτων της και $\gamma(S)$ το σύνορο της S, θετικά προσανατολισμένο ως προς $\vec{N}$.
Εάν $\vec{F}=(P,Q,R): S(\subseteq\mathbb{R}^3)\to\mathbb{R}^3$ C^1 δ.π τότε έχουμε

$$\oint_{\gamma(S)}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S(\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S}\overset{(*)}{=}\iint_S(\nabla\times\vec{F})\cdot\vec{N}\,dS \quad \left(\begin{array}{l} d\vec{r}=\vec{r}\,'dt \\ d\vec{S}=(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\,du\,dv \\ dS=\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|\,du\,dv\end{array}\right)$$

Αναλυτικά: Εάν $\vec{\rho}(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$ είναι (θετική) παραμέτρηση του $\gamma(S)$ τότε

$$\int_\alpha^\beta\vec{F}(\vec{\rho}(t))\cdot\vec{\rho}\,'(t)\,dt=\iint_D(\nabla\times\vec{F})\cdot(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\,du\,dv.$$

στην περίπτωση που το $\gamma(S)$ αποτελείται μόνο από μια καμπύλη.

Η ροή/κυκλοφορία του $\vec{F}$ κατά μήκος της $\gamma(S)$ ισούται με την εξερχόμενη ροή του $\nabla\times\vec{F}$ δια μέσου της S

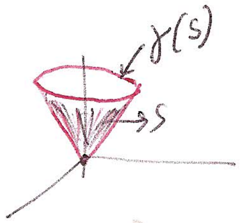
Για περισσότερα: "Vector Calculus" J.E. Marsden and A.J. Tromba
Σύνδεσμοι ηλ. τάξης
ή άλλα βιβλία.

(*) Σχέση των 2 επιφανειακών ολοκληρωμάτων.

Ασκήσεις

1) Έστω $\vec{F}(x,y,z)=(x^2-y)\vec{i}+4z\vec{j}+x^2\vec{k}$ και
$S=\{(x,y,z): z=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ z\in[0,2]\}$.

Να εφαρμόσουμε τον τύπο του Stokes.



$$\oint_{\gamma(S)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D (\nabla\times\vec{F})\cdot(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\,du\,dv.$$

• $S: \vec{r}(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta, r)$, $(\theta,r)\in[0,2\pi]\times[0,2]=D$

$$\begin{cases}\vec{r}_r(r,\theta)=(\cos\theta,\sin\theta,1)\\ \vec{r}_\theta(r,\theta)=(-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)\end{cases}$$

$\vec{r}_r(r,\theta)\times\vec{r}_\theta(r,\theta)=(-r\cos\theta,-r\sin\theta,r)$
$\neq(0,0,0)$ για $r\neq 0$.

$$(\nabla\times\vec{F})(x,y,z)=\left|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ (x^2-y) & (4z) & (x^2)\end{matrix}\right|_{(x,y,z)} = (0-4)\vec{i}-(2x-0)\vec{j}+(0+1)\vec{k}$$

$\nabla\times\vec{F}(\vec{r}(r,\theta))=-4i-(2r\cos\theta)\vec{j}+\vec{k}$

$$I_1=\iint_D(\nabla\times\vec{F})\cdot(\vec{r}_r\times\vec{r}_\theta)\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^2(-4,-2r\cos\theta,1)\cdot(-r\cos\theta,-r\sin\theta,r)\,dr\right]d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^2\left(4r\cos\theta+2r^2\sin\theta\cos\theta+r\right)dr\right]d\theta=\dots=4\pi$$

• $\gamma(S)$: $\vec{\rho}(\theta)=(2\cos\theta, 2\sin\theta, 2)$, $\theta\in[0,2\pi]$

$\begin{pmatrix}x^2+y^2=4\\ z=2\end{pmatrix}$

$$I_2=\oint_{\gamma(S)}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^{2\pi}\vec{F}(\vec{\rho}(\theta))\cdot\vec{\rho}\,'(\theta)\,d\theta=\int_0^{2\pi}\vec{F}(2\cos\theta,2\sin\theta,2)\cdot(-2\sin\theta,2\cos\theta,0)\,d\theta$$

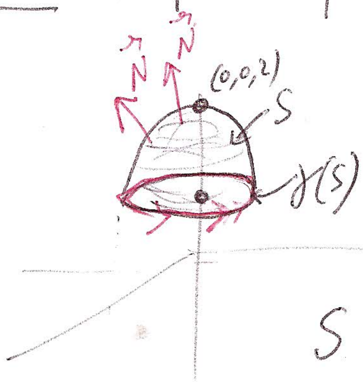
$=\dots=4\pi$

Τελικά $I_1=I_2$.

2) Έστω $\vec{F}(x,y,z) = (-y,\ x+y+z,\ y+z)$ και

$$S = \{(x,y,z) : z = 2-(x^2+y^2),\ x^2+y^2 \leq 1\}$$

Να εφαρμόσουμε τον τύπο του Stokes



$$\oint_{\gamma(S)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D (\nabla\times\vec{F})\cdot(\vec{r}_u\times\vec{r}_v)\,du\,dv.$$

$$S : \vec{r}(r,\theta) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ 2-r^2),\ (\theta,r)\in[0,2\pi]\times[0,1]$$

$$\left\{\begin{array}{l}\vec{r}_r(r,\theta) = (\cos\theta,\ \sin\theta,\ -2r)\\ \vec{r}_\theta(r,\theta) = (-r\sin\theta,\ r\cos\theta,\ 0)\end{array}\right\}\ \vec{r}_r(r,\theta)\times\vec{r}_\theta(r,\theta) =$$

$$= (2r^2\cos\theta,\ 2r^2\sin\theta,\ r) \neq (0,0,0)$$

$r \neq 0$

$$\nabla\times\vec{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (-y) & (x+y+z) & (y+z) \end{vmatrix} = (0,0,2).$$

$$\underline{I_1} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\nabla\times\vec{F}(\vec{r}(r,\theta))\right)\cdot\left((\vec{r}_r\times\vec{r}_\theta)(r,\theta)\right)dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 2r\,dr\right)d\theta = \underline{2\pi.}$$

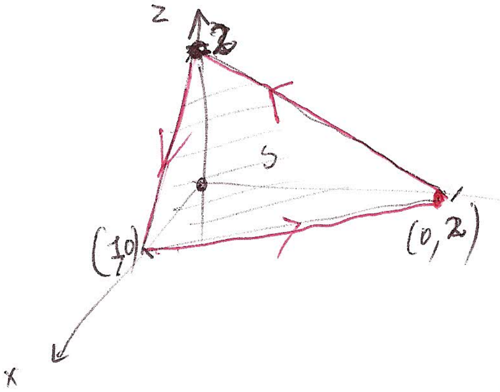
$$\gamma(S) : \vec{\rho}(\theta) = (\cos\theta,\ \sin\theta,\ 1),\ \theta\in[0,2\pi]$$

$$\underline{I_2} = \int_0^{2\pi}\vec{F}(\vec{\rho}(\theta))\cdot\vec{\rho}\,'(\theta)\,d\theta = \int_0^{2\pi}(-\sin\theta,\ \sin\theta+\cos\theta+1,\ \sin\theta+1)\cdot(-\sin\theta,\cos\theta,0)\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}(1+\sin\theta\cos\theta+\cos\theta)\,d\theta = \underline{2\pi}$$

Τελικά $I_1 = I_2$.

3) Να υπολογιστεί η ροή/κυκλοφορία του δ.π $\vec{F}(x,y,z)=(xy,x,3+z)$ κατά μήκος του συνόρου της $S=\{(x,y,z): 2x+y+z=2 \text{ με } x,y,z\geq 0\}$



Το σύνορο είναι κ.τ. C^1 καμπύλη.
Θα χρειαζόμαστε 3-επικαμπύλια.
Θυμόμαστε(!) ότι:

$$\oint_{\gamma(S)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla\times F)\cdot d\vec{S}$$

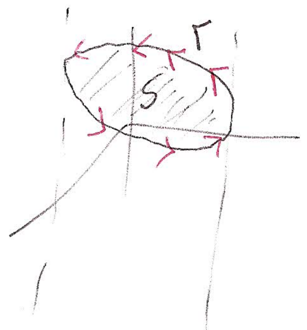
/ Κάθετο στο επίπεδο $2x+y+z=2$ είναι το $(2,1,1)$

$S: \vec{r}(x,y)=(x,y,2-2x-y)$, $(x,y)\in D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq 2-2x\}$

$\nabla\times\vec{F}(x,y)=(0,0,1-x)$ Άρα

$$\oint_{\gamma(S)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\nabla\times\vec{F}(\vec{r}(x,y))\right)\cdot(\vec{r}_x\times\vec{r}_y)\,dx\,dy = \int_0^1\left[\int_0^{2-2x}(1-x)\,dy\right]dx = \underline{2/3}$$

4) Να υπολογιστεί η ροή/κυκλοφορία του δ.π $\vec{F}(x,y,z)=(-y^3,x^3,-z^3)$ κατά μήκος της καμπύλης Γ $\{(x,y,z): x^2+y^2=1,\ x+y+z=1\}$



$I=\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S}$, όπου $S=\{(x,y,z): x+y+z=1,\ x^2+y^2\leq 1\}$ με κάθετο το $(1,1,1)$

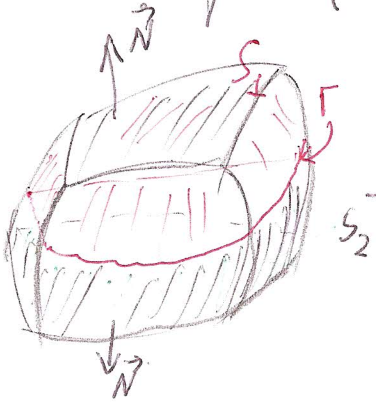
$\nabla\times\vec{F}(x,y,z)=(0,0,3(x^2+y^2))$

$I=\iint_D 3(x^2+y^2)\,dx\,dy$ όπου $D=\{(x,y): x^2+y^2\leq 1\}$, $D'=\{(r,\theta): 0\leq r\leq 1,\ 0\leq\theta\leq 2\pi\}$

$$I=3\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cdot r\,dr\,d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

5) Έστω $B \subseteq \mathbb{R}^3$ στερεό με επιφάνεια S κανονική + κλειστή (+υποθ. Stokes) και $\vec{F}: B \to \mathbb{R}^3$ C^1 δ.π. Τότε

$$\oiint_{\partial B} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0$$



$S = S_1 \cup S_2$

Έστω Γ απλή + κλειστή + (κτ) C^1 καμπύλη στο $\partial B = S$ ώστε $\Gamma = \gamma(S_1) = \gamma(S_2)$, $(S = S_1 \cup S_2,\ S_1 \cap S_2 = \Gamma)$

Τότε $\iint_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ και $\iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = -\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Άρα $$\iint_{S = S_1 \cup S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0.$$

6)** Έστω $\vec{F} : A(\subseteq \mathbb{R}^3) \to \mathbb{R}^3$ C^1, με $\nabla \times \vec{F}(x,y,z) = (0,0,0)$ $(x,y,z) \in A$.

($\vec{F}$=αστρόβιλο)

Υποθέτουμε ότι για τυχαία Γ απλή+κλειστή+C^1 καμπύλη του A, υπάρχει επιφάνεια S (που ικανοποιεί τις υποθέσεις Stokes) ώστε το σύνορο $\gamma(S) = \Gamma$

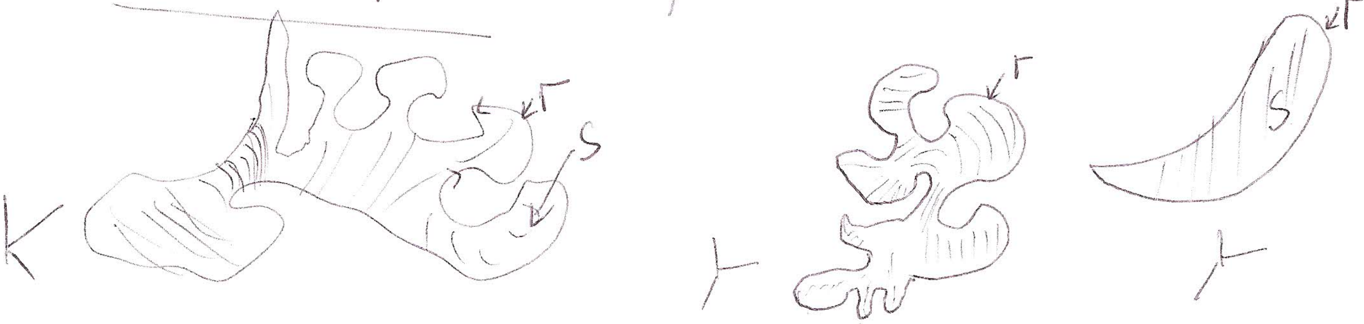
(κτ)

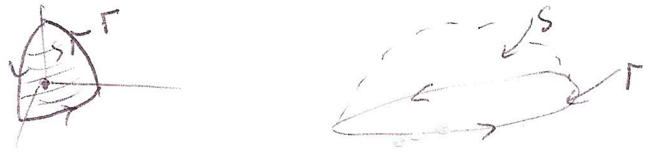
και $S \subseteq A$.

Τότε $\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

Λύση

$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = 0$

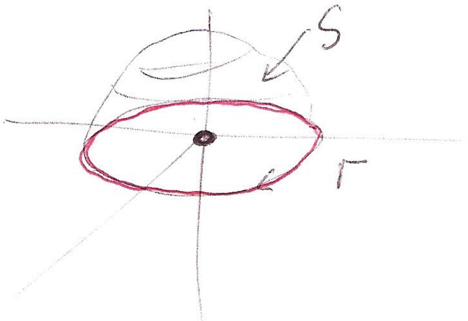




$S \subseteq A$ = π.ο της $\vec{F}$

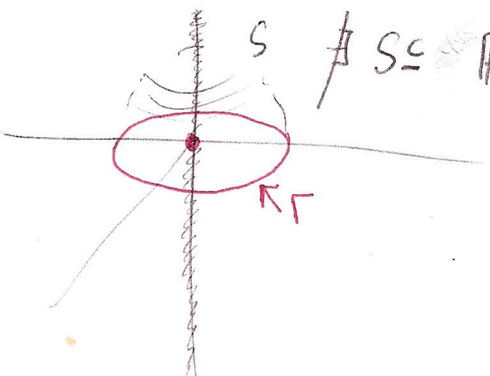
$A = \mathbb{R}^3$ ✓

$A = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$



✓

$A = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$ δεν ισχύει η υπόθεση της άσκησης !

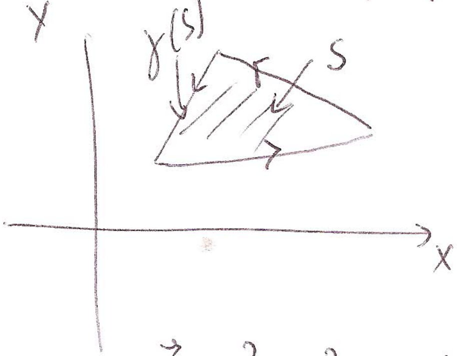


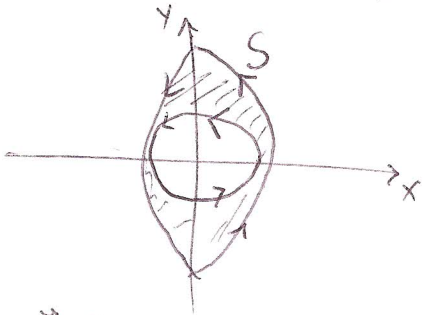
$\nexists\, S \subseteq \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$ ώστε $\gamma(S) = \Gamma$

✗

Παρατήρηση

Έστω επιφάνεια S του επιπέδου x-y, και το σύνορό της είναι καμπύλη/καμπύλες απλή+κλειστή+C^1 (κτ) + λεία (κτ).





και $\vec{F}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, C^1 δ.π. $\vec{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$.

Ορίζουμε το $\vec{F}$ στον $\mathbb{R}^3$ με $\vec{F}(x,y,z)=(P(x,y),Q(x,y),0)$.

Το μον. $\vec{N}(x,y)=$ κάθετο στην επιφάνεια S (που είναι στο x-y) είναι το $(0,0,1)$.

Από τον τύπο του Stokes με $(\nabla\times\vec{F})(x,y,z)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P(x,y) & Q(x,y) & 0\end{vmatrix}=\left(0,0,\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$

$$\int_{\gamma(S)}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_S(\nabla\times\vec{F})(x,y,z)\cdot d\vec{S}=\iint_S\left(0,0,\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot(0,0,1)\,dx\,dy=$$
$$=\iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

Δηλαδή: ο τύπος του Stokes στο επίπεδο x-y είναι ο τύπος του Green (εφαπτομενική μορφή).

Υπάρχουν και άλλα λυμένα παραδείγματα στο άλλο αρχείο.

Συνέχεια στη 267