Ανάλυση ΙΙ

Πρόοδος, 23 Απριλίου 2012

Θ1 Εξετάστε για τον κάθε έναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς, αν είναι σωστός ή λάθος και αιτιολογείστε την απάντησή σας.

i) $\|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\|^2=\|\vec{\alpha}\|^2+2(\vec{\alpha}\bullet\vec{\beta})+\|\vec{\beta}\|^2$

ii) $\vec{\alpha}\times(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})=(\vec{\alpha}\times\vec{\beta})\times\vec{\gamma}$

iii) Εάν τα διανύσματα είναι διάφορα του $\vec{0}$ και κάθετα ανά δύο με $\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}+\nu\vec{\gamma}=\vec{0}$, τότε $\lambda=\mu=\nu=0$.

$\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\in\mathbb{R}^3$ $\boxed{2{,}5}$

Θ2 i) Να περιγραφεί σε πολικές συντεταγμένες το σύνολο $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+(y-2)^2=4$

ii) Να περιγραφεί σε σφαιρικές συντεταγμένες το σύνολο $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2=1,$

Θ3 Για την $\vec{F}(x,y,z)=(x\,\eta\mu(yz),\ \tau o\xi\varepsilon\varphi(x^2z)+3^{z+1})$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ να υπολογισθεί το διαφορικό στο σημείο $(1,\frac{\pi}{2},1)$ και ο πίνακας (Jacobi) του διαφορικού αυτού. $\boxed{2{,}5}$

Θ4 Εάν $\vec{g}(x,y)=(u(x,y),v(x,y))$ με $u=u(x,y)=x^2-y^2$ και $v=v(x,y)=2x$

$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ διαφορίσιμη και $h=f\circ\vec{g}$, αποδείξτε ότι

$$x\frac{\partial h}{\partial x}+y\frac{\partial h}{\partial y}=2\left[u\frac{\partial f}{\partial u}+v\frac{\partial f}{\partial v}\right]$$ $\boxed{2{,}5}$

Θ* Σ/Λ

$f:A(\subseteq\mathbb{R}^2)\to\mathbb{R}$, A ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και $df(\vec{p})(\vec{h})=0$ $(\vec{h}\in\mathbb{R}^2)$ για κάθε $\vec{p}\in A$.

Τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση.

+2,5 για ορθή απάντηση

−2,5 για λανθασμένη απάντηση

Καλή Επιτυχία!

Θ1	Θ2	Θ3	Θ4	Σ

Ενδεικτικές Λύσεις (Από Μαθ. 3ο, 8ο, 12ο+13ο, 15ο: Αναφορές

Θ1/ i) Σωστό: $\|\vec\alpha+\vec\beta\|^2 = (\vec\alpha+\vec\beta)\cdot(\vec\alpha+\vec\beta) = \vec\alpha\cdot\vec\alpha+\vec\alpha\cdot\vec\beta+\vec\beta\cdot\vec\alpha+\vec\beta\cdot\vec\beta =$

$= \|\vec\alpha\|^2+2(\vec\alpha\cdot\vec\beta)+\|\vec\beta\|^2$. (Ιδιότητες εσ. γ

ii) Λάθος π.χ. $\vec\alpha=\vec\beta=\vec i=(1,0,0)$, $\vec\gamma=\vec j=(0,1,0)$

$$\vec i\times(\vec i\times\vec j)=\vec i\times \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k\\ 1&0&0\\ 0&1&0\end{vmatrix} = \vec i\times\vec k = \begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\ 1&0&0\\ 0&0&1\end{vmatrix} = -\vec j=(0,-1,0)$$

$$(\vec i\times\vec i)\times\vec j = \begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\ 1&0&0\\ 1&0&0\end{vmatrix}\times\vec j=(0,0,0)\times(0,1,0)=(0,0,0)$$

διάφορα

iii) Σωστό $\lambda\vec\alpha+\mu\vec\beta+\nu\vec\gamma=\vec0$ με $\vec\alpha\cdot\vec\beta=\vec\alpha\cdot\vec\gamma=\vec\beta\cdot\vec\gamma=0$ ($\vec\alpha,\vec\beta,\vec\gamma$ κάθετα ανά 2)

Άρα, $(\lambda\vec\alpha+\mu\vec\beta+\nu\vec\gamma)\cdot(\lambda\vec\alpha+\mu\vec\beta+\nu\vec\gamma)=\vec0\cdot\vec0 \Rightarrow \lambda^2(\vec\alpha\cdot\vec\alpha)+\mu^2(\vec\beta\cdot\vec\beta)+\nu^2(\vec\gamma\cdot\vec\gamma)=$

με $\vec\alpha\cdot\vec\alpha,\ \vec\beta\cdot\vec\beta,\ \vec\gamma\cdot\vec\gamma>0$ ($\vec\alpha,\vec\beta,\vec\gamma\neq\vec0$). Επομένως $\lambda^2=\mu^2=\nu^2=0\Rightarrow\lambda=\mu=$

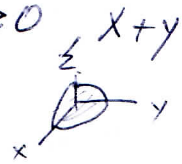
Θ2 i) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2=4y\}$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, $\begin{cases}x^2+y^2=r^2\\ r\geq 0,\ 4y=x^2+y^2\geq 0\Rightarrow \sin\end{cases}$

Γίνεται $A_\Pi=\{(r,\theta): r=4\sin\theta,\ \theta\in[0,\pi]\}$

ii) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2=1,\ x,y,z\geq 0\}$

$x=\rho\cos\theta\sin\varphi\geq 0$, $y=\rho\sin\theta\sin\varphi\geq 0$, $z=\rho\cos\varphi\geq 0$, $x^2+y^2+z^2=\rho^2$

$A_\Sigma=\{(\rho,\theta,\varphi): \rho=1,\ \theta\in[0,\frac{\pi}{2}],\ \varphi\in[0,\frac{\pi}{2}]\}$



Θ3 $F_1(x,y,z)=x\sin(yz)$, $dF_1(1,\frac{\pi}{2},1)(h_1,h_2,h_3)=(1,0,0)\cdot(h_1,h_2,h_3)=1\cdot h_1+0h_2+$

$F_2(x,y,z)=\text{τοξεφ}(x^2z)+3^{z+1}$, $dF_2(1,\frac{\pi}{2},1)(h_1,h_2,h_3)=(1,0,\frac{1}{2}+9\ln 3)\cdot(h_1,h_2,h_3)$

$d\vec F(1,\frac{\pi}{2},1)(h_1,h_2,h_3)=\begin{pmatrix}1&0&0\\ 1&0&\frac{1}{2}+9\ln 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\\ h_3\end{pmatrix}$, Πίνακας Jacobi $\begin{pmatrix}1&0&0\\ 1&0&\frac{1}{2}+9\ln\end{pmatrix}$

Θ4 $\dfrac{\partial h}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=2x\dfrac{\partial f}{\partial u}+2y\dfrac{\partial f}{\partial v}$

$\dfrac{\partial h}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=(-2y)\dfrac{\partial f}{\partial u}+2x\dfrac{\partial f}{\partial v}$

$u=x^2-y^2$, $v=2xy$

$(x,y)\xrightarrow{g}$, $h\searrow$ $\mathbb{R}$

$x\dfrac{\partial h}{\partial x}+y\dfrac{\partial h}{\partial y}=\left(2x^2\dfrac{\partial f}{\partial u}+2xy\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)+\left(-2y^2\dfrac{\partial f}{\partial u}+2xy\dfrac{\partial f}{\partial v}\right)=2(x^2-y^2)\dfrac{\partial f}{\partial u}+4xy\dfrac{\partial f}{\partial v}$

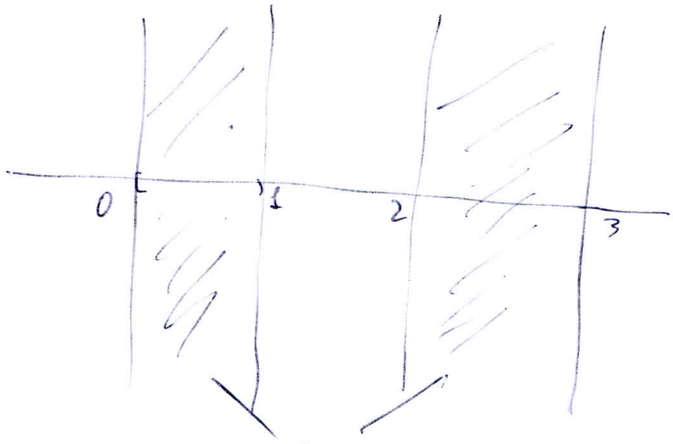
$=2\left[u\dfrac{\partial f}{\partial u}+v\dfrac{\partial f}{\partial v}\right]$

θ^* <u>Λάθος</u>

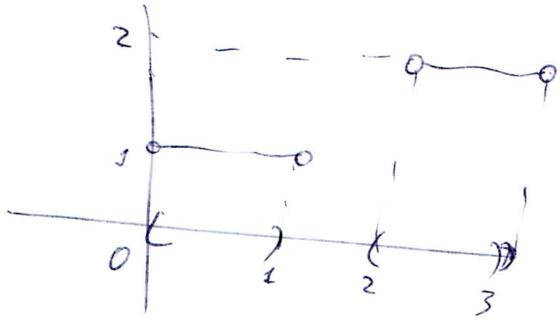
πχ. $f(x,y)=\begin{cases} 1 & x\in(0,1),\ y\in\mathbb{R} \\ 2 & x\in(2,3),\ y\in\mathbb{R} \end{cases}$

$$df(x_0,y_0)(h_1,h_2)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)h_2=0h_1+0h_2=0 \quad ,(h_1,h_2)\in\mathbb{R}$$

Αλλά η f <u>δεν</u> είναι σταθερή!



A.



Οποια άλλη λύση δοθεί σε θέμα είναι δεκτή αν είναι πλήρως τεκμηριωμένη