Μάθημα I - Ασκήσεις

1) Ορίζουμε $\|\cdot\|_2 : R^n \to R$

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

και $\|\cdot\|_3 : R^n \to R$

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_3 = \max\{|x_i|,\ i=1,\ldots,n\}$$

Ν.δ.ο. η $\|\cdot\|_2$ και $\|\cdot\|_3$ δεν προέρονται από εσωτερικά γινόμενα.

Λύση:

Έστω ότι προέρχονται από εσωτερικό γινόμενο. Σύμφωνα με γνωστή πρόταση θα ικανοποιούν τη σχέση: $\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 + \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 2\|\vec{x}\|^2 + 2\|\vec{y}\|^2$ ⊛

Έστω $\vec{x} = (1,-1,2) \in R^3$ και $\vec{y} = (2,2,-1) \in R^3$

$\vec{x}+\vec{y} = (3,1,1)$, $\vec{x}-\vec{y} = (-1,-3,3)$

$\|\vec{x}+\vec{y}\|_2 = 3+1+1 = 5$

$\|\vec{x}-\vec{y}\|_2 = 1+3+3 = 7$

$\|\vec{x}\|_2 = 1+1+2 = 4$

$\|\vec{y}\|_2 = 2+2+1 = 5$

Οπότε ⊛ $\Rightarrow$

$25+49 = 2\cdot 16 + 2\cdot 25$

$\|\vec{x}+\vec{y}\|_3 = 3$

$\|\vec{x}-\vec{y}\|_3 = 3$

$\|\vec{x}\|_3 = 2$

$\|\vec{y}\|_3 = 2$

Οπότε ⊛ $\Rightarrow 9+9 = 2\cdot 4 + 2\cdot 4$

Άτοπο, επομένως δεν προέρχονται από εσωτερικό γινόμενο.

2) Πρόταση: Ν.δ.ο. αν $\vec{u},\vec{v}$ γραμ. ανεξ. $\Rightarrow$

$(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\times\vec{v})$ δεξιόστροφη βάση

Απόδειξη: Έστω $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)\in R^3$ τότε

$$\vec{u}\times\vec{v}=(u_2v_3-u_3v_2,\, u_3v_1-u_1v_3,\, u_1v_2-u_2v_1)\in R^3$$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ u_2v_3-u_3v_2 & u_3v_1-u_1v_3 & u_1v_2-u_2v_1 \end{vmatrix} =$$

$$= u_1\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ u_3v_1-u_1v_3 & u_1v_2-u_2v_1 \end{vmatrix} - u_2\begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ u_2v_3-u_3v_2 & u_1v_2-u_2v_1 \end{vmatrix} + u_3\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ u_2v_3-u_3v_2 & u_3v_1-u_1v_3 \end{vmatrix} =$$

$$= u_1[v_2(u_1v_2-u_2v_1)-v_3(u_3v_1-u_1v_3)] - u_2[v_1(u_1v_2-u_2v_1)-v_3(u_2v_3-u_3v_2)] + u_3[v_1(u_3v_1-u_1v_3)-v_2(u_2v_3-u_3v_2)]$$

$$= u_1^2v_2^2 - u_1v_2u_2v_1 - u_1v_3u_3v_1 + u_1^2v_3^2 - u_2v_1u_1v_2 + u_2^2v_1^2 + u_2^2v_3^2 - u_2v_3u_3v_2 + u_3^2v_1^2 - u_3v_1u_1v_3 - u_3v_2u_2v_3 + u_3^2v_2^2 =$$

$$= (u_1v_2)^2 - 2u_1v_2\cdot u_2v_1 + (u_2v_1)^2$$
$$+ (u_1v_3)^2 - 2u_1v_3\cdot u_3v_1 + (u_3v_1)^2$$
$$+ (u_2v_3)^2 - 2u_2v_3\cdot u_3v_2 + (u_3v_2)^2 =$$

$$= (u_1v_2 - u_2v_1)^2 + (u_1v_3 - u_3v_1)^2 + (u_2v_3 - u_3v_2)^2 \geq 0$$

Υποθέτουμε ότι η παραπάνω ορίζουσα είναι μηδέν,

άρα $u_1v_2 - u_2v_1 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0$

$$u_1v_3 - u_3v_1 = \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$u_2v_3 - u_3v_2 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

Αυτό όμως είναι άτοπο, διότι τότε $\vec{u}\times\vec{v} = \vec{0} \Leftarrow$

$\vec{u}, \vec{v}$ συγγραμμικά.

Επομένως η ορίζουσα των $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}\times\vec{v})$

είναι γνήσια θετική.

3) Έστω $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in R^3$

Να αποδείξετε ότι:

i) $\|\vec{x} \times \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2$ (Ταυτ. Lagrange)

ii) $\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \eta\mu\theta$ με $\theta \in [0, \pi]$

(Ισχύει $\sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$, $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$)

iii) Το εμβ(Ε)παρ/μου με κορυφές τα $(0,0,0), \vec{x}, \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}$ είναι $E = \|\vec{x} \times \vec{y}\|$

Απόδειξη: (Θεωρείστε $\|\cdot\|$ το Ευκλείδειο μέτρο)

i)
$$\|\vec{x} \times \vec{y}\|^2 = (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2 + (x_3 y_1 - x_1 y_3)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2$$

και

$$\|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2 - (\vec{x} \cdot \vec{y})^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3)^2 =$$

$$= \cancel{x_1^2 y_1^2} + x_1^2 y_2^2 + x_1^2 y_3^2 + x_2^2 y_1^2 + \cancel{x_2^2 y_2^2} + x_2^2 y_3^2 + x_3^2 y_1^2 + x_3^2 y_2^2 + \cancel{x_3^2 y_3^2} - \cancel{x_1^2 y_1^2} - \cancel{x_2^2 y_2^2} - \cancel{x_3^2 y_3^2} - 2 x_1 y_1 x_2 y_2 - 2 x_2 y_2 x_3 y_3 - 2 x_1 y_1 x_3 y_3 =$$

$$= (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 + (x_1 y_3 - x_3 y_1)^2 + (x_2 y_3 - x_3 y_2)^2$$

ii) Ισχύει $\vec{x}\cdot\vec{y} = \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\,συνθ$, οπότε

με αντ/ση στην ταυτ. Lagrange (i)

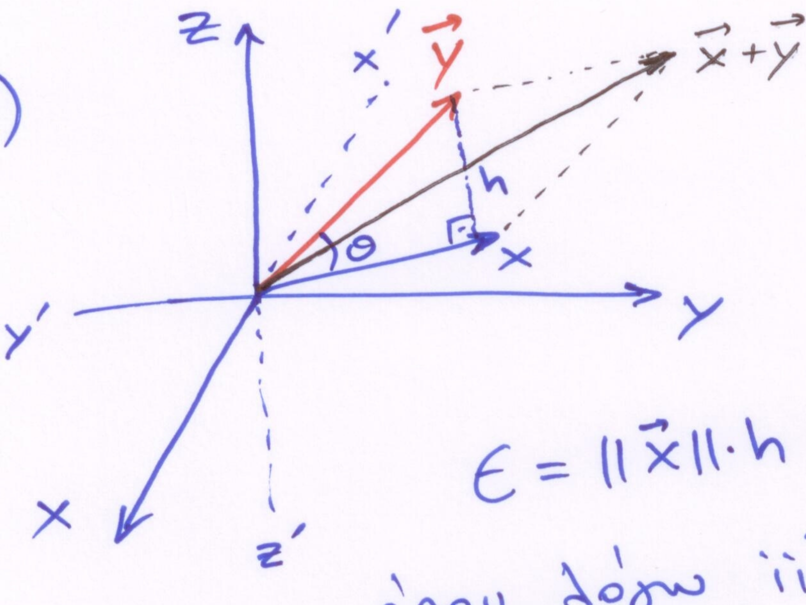
$$\|\vec{x}\times\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 συν^2θ =$$

$$= \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2(1 - συν^2θ) = \|\vec{x}\|^2\|\vec{y}\|^2 ημ^2θ$$

Άρα $\|\vec{x}\times\vec{y}\| = \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\cdot|ημθ|$, όμως $θ\in[0,\pi]$ $(ημθ \geq 0)$

δηλ. $\|\vec{x}\times\vec{y}\| = \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\,ημθ$.

iii)



$$ημθ = \frac{h}{\|\vec{y}\|}$$

$$E = \|\vec{x}\|\cdot h = \|\vec{x}\|\cdot\|\vec{y}\|\cdot ημθ$$

όπου λόγω ii) $E = \|\vec{x}\times\vec{y}\|$.

4) Στον R^3 με το Ευκλείδειο μέτρο να αποδείξετε ότι ισχύουν:

i) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}+\vec{\gamma})\times(\vec{\gamma}+\vec{a}) = 2\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{\gamma})$, $\vec{a},\vec{b},\vec{\gamma}\in R^3$

ii) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{\gamma}) = (\vec{a}\cdot\vec{\gamma})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{\gamma}$, $\vec{a},\vec{b},\vec{\gamma}\in R^3$

<u>Απόδειξη:</u>

i) Υπολογίζουμε αρχικά το

$$(\vec{b}+\vec{\gamma})\times(\vec{\gamma}+\vec{a})$$

Θέτουμε $\vec{b}+\vec{\gamma}=\vec{\delta}$

$$\vec{\delta}\times(\vec{\gamma}+\vec{a}) \overset{\text{διγραμ.}}{=} \vec{\delta}\times\vec{\gamma}+\vec{\delta}\times\vec{a} =$$

$$= -\vec{\gamma}\times(\vec{b}+\vec{\gamma}) - \vec{a}\times(\vec{b}+\vec{\gamma}) \overset{\text{διγραμ.}}{=}$$

$$= -\vec{\gamma}\times\vec{b} - \cancel{\vec{\gamma}\times\vec{\gamma}}^{\,0} - \vec{a}\times\vec{b} - \vec{a}\times\vec{\gamma} = \vec{b}\times\vec{\gamma}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{\gamma}\times\vec{a}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{b}\times\vec{\gamma}+\vec{b}\times\vec{a}+\vec{\gamma}\times\vec{a}) =$$

$$= \vec{a}(\vec{b}\times\vec{\gamma}) + \cancel{\vec{a}(\vec{b}\times\vec{a})}^{\,0} + \cancel{\vec{a}(\vec{\gamma}\times\vec{a})}^{\,0} + \cancel{\vec{b}(\vec{b}\times\vec{\gamma})}^{\,0}$$

$$+ \cancel{\vec{b}(\vec{b}\times\vec{a})}^{\,0} + \vec{b}(\vec{\gamma}\times\vec{a}) = 2\vec{a}(\vec{b}\times\vec{\gamma})$$

εφόσον $\vec{b}(\vec{\gamma}\times\vec{a}) = (\vec{b}\times\vec{\gamma})\cdot\vec{a} = \vec{a}(\vec{b}\times\vec{\gamma})$

ii) Θεωρούμε $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, $\vec{\gamma}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ του R^3

$$\vec{\beta}\times\vec{\gamma}=(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2,\ \beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3,\ \beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)$$

$$\vec{a}\times(\vec{\beta}\times\vec{\gamma})=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2 & \beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3 & \beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1 \end{vmatrix}=$$

$$=(a_2\beta_1\gamma_2-a_2\beta_2\gamma_1-a_3\beta_3\gamma_1+a_3\beta_1\gamma_3)\vec{i}$$
$$+(-a_1\beta_1\gamma_2+a_1\beta_2\gamma_1+a_3\beta_2\gamma_3-a_3\beta_3\gamma_2)\vec{j}$$
$$+(a_1\beta_3\gamma_1-a_1\beta_1\gamma_3-a_2\beta_2\gamma_3+a_2\beta_3\gamma_2)\vec{k}$$

Εξετάζουμε το συν/σή του $\vec{i}$

$$\underline{a_2\beta_1\gamma_2}-a_2\beta_2\gamma_1-a_3\beta_3\gamma_1+\underline{a_3\beta_1\gamma_3}+\underline{a_1\beta_1\gamma_1}-a_1\beta_1\gamma_1=$$

$$=\beta_1(a_1\gamma_1+a_2\gamma_2+a_3\gamma_3)-\gamma_1(a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3)=$$

$$=\beta_1(\vec{a}\cdot\vec{\gamma})-\gamma_1(\vec{a}\cdot\vec{\beta})$$

Ομοίως οι συν/σές των $\vec{j},\vec{k}$ γράφονται:

$$\beta_2(\vec{a}\cdot\vec{\gamma})-\gamma_2(\vec{a}\cdot\vec{\beta}) \quad \text{και}$$

$$\beta_3(\vec{a}\cdot\vec{\gamma})-\gamma_3(\vec{a}\cdot\vec{\beta})$$

Ἄρα $\vec{a} \times (\vec{\beta} \times \vec{\gamma}) =$

$$\underline{\beta_1 (\vec{a} \cdot \vec{\gamma})} \vec{i} - \gamma_1 (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{i} + \underline{\beta_2 (\vec{a} \cdot \vec{\gamma})} \vec{j} - \gamma_2 (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \vec{j}$$

$$+ \underline{\beta_3 (\vec{a} \cdot \vec{\gamma}) \vec{k}} - \gamma_3 (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \vec{k} =$$

$$= (\vec{a} \cdot \vec{\gamma})(\beta_1 \vec{i} + \beta_2 \vec{j} + \beta_3 \vec{k}) - (\vec{a} \cdot \vec{\beta})(\gamma_1 \vec{i} + \gamma_2 \vec{j} + \gamma_3 \vec{k}) =$$

$$= (\vec{a} \cdot \vec{\gamma}) \vec{\beta} - (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \vec{\gamma}$$